Finanční a pojistná matematika

Důchody
23.11.2021

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

FIU/BPFPM

Ing. Roman Hlawiczka, Ph.D.
Katedra financí a účetnictví

Důchod

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Důchod je pravidelná platba ve stejné výši, která se nazývá anuita (výplata důchodu).

- **Podle okamžiku, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:**
    - předlhůtní – anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu,
    - polhůtní – anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu.

- **Podle délky vyplácení, rozlišujeme důchod:**
    - dočasný – důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu,
    - věčný – důchod je vyplácen neomezeně dlouho.

- **Podle okamžiku, kdy se začne důchod vyplácet, rozlišujeme:**
    - důchod bezprostřední – s výplatou důchodu se začne nyní,
    - důchod odložený – výplata důchodu začne až po uplynutí určité doby.

V souvislosti s důchody budeme počítat:

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Počáteční (současnou) hodnotu důchodu *D* – součet současných hodnot všech v budoucnu realizovaných plateb důchodů – udává, kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušných výplat důchodu po danou dobu;
- Konečnou (budoucí) hodnotu důchodu *S* – součet všech výplat důchodu, přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí. Konečná hodnota důchodu tedy udává, kolik bychom celkem získali ke konci posledního roku, kdybychom všechny výplaty důchodu okamžitě po jejich vyplacení při dané úrokové sazbě uložili (investovali se stejným úrokem). Konečná hodnota důchodu je tedy stejná jako naspořená částka.

$$S = D * (1 + i)^n$$

- *S* – budoucí hodnota důchodu
- *D* – současná hodnota důchodu
- *i* – roční úroková sazba (uvažuje se roční úrokové období)
- *n* – počet úrokových období, ve kterých dochází k výplatě anuit

Důchod dočasný

Důchod dočasný předlhůtní (dlouhodobý, kombinovaný)

$$D = [a * (1 + i) + P] * \frac{1-v^n}{i}$$

$$D = \left[X * m * \left(1 + \frac{m+1}{2*m} * i\right) + P\right] * \frac{1-v^n}{i}$$

- *D* – počáteční hodnota důchodu (současná hodnota pravidelných plateb)
- *i* – úroková sazba v úrokovém období (nemusí být roční)
- *n* – počet úrokových období, po která se důchod vyplácí (nemusí se rovnat počtu let)
- *a, X* – velikost jedné pravidelné platby, anuita
- *m* – počet plateb za úrokové období
- *v* – diskontní faktor $v = \frac{1}{1+i}$
- *P* – výše poplatku přepočtená ke konci úrokového období

Důchod dočasný

Důchod dočasný polhůtní (dlouhodobý, kombinovaný)

$$D = (a + P) * \frac{1-v^n}{i}$$

$$D = \left[X * m * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) + P\right] * \frac{1-v^n}{i}$$

- D – počáteční hodnota důchodu (současná hodnota pravidelných plateb)
- i – úroková sazba v úrokovém období (nemusí být roční)
- n – počet úrokových období, po která se důchod vyplácí (nemusí se rovnat počtu let)
- a, X – velikost jedné pravidelné platby, anuita
- m – počet plateb za úrokové období
- v – diskontní faktor $v = \frac{1}{1+i}$
- P – výše poplatku přepočtená ke konci úrokového období

Důchod věčný předlhůtní

- Důchod, jehož výplata není časově omezena a pravidelné částky jsou vypláceny vždy na počátku určitého časového intervalu
- =perpetuita

$$D = a + \frac{a}{i} + P = \frac{a*(1+i)+P}{i}$$

$$D = \frac{X*m*\left(1+\frac{m+1}{2*m}*i\right)+P}{i}$$

- *D* – počáteční hodnota důchodu (současná hodnota pravidelných plateb)
- *i* – úroková sazba v úrokovém období
- *a* – velikost jedné pravidelné platby, anuita
- *X* – velikost jedné platby

Důchod věčný polhůtní

- Důchod, jehož výplata není časově omezena a pravidelné částky jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu

$$D = \frac{a+P}{i} \qquad\qquad D = \frac{X * m * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) + P}{i}$$

- *D* – počáteční hodnota důchodu (současná hodnota pravidelných plateb)
- *i* – úroková sazba v úrokovém období
- *a* – velikost jedné pravidelné platby, anuita
- *X* – velikost jedné platby

Důchod rostoucí

Důchod dočasný rostoucí tempem *g* za úrokové období

- $D = a * \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}$

Důchod věčný rostoucí tempem *g* za úrokové období

- $D = \frac{a}{i-g},$ pokud $g < i$

- *D* – počáteční hodnota důchodu (současná hodnota pravidelných plateb)
- *I* – úroková sazba v úrokovém období
- *a* – velikost jedné pravidelné platby, anuita
- *g* – tempo růstu vyplácených částek

Důchod odložený

Důchod odložený o *r* úrokových období

- Pokud výplata důchodu nezačíná ihned, ale až za r úrokových období, musíme všechny vzorce upravit vynásobením v^r - diskontujeme tedy navíc všechny platby o *r* období.

- *v* – diskontní faktor $v = \frac{1}{1+i}$
- *i* – úroková sazba v úrokovém období (ne nutně ročním)
- *r* – počet úrokových období před první výplatou

Příklad

- Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 5 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 3 % p.a. (abstrahujeme od všech poplatků a zdanění úroků).

Příklad

- Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 5 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 3 % p.a. (abstrahujeme od všech poplatků a zdanění úroků).

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = 5000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}03}\right)^{20}}{0{,}03}$$

$$D = \underline{\underline{74\,387{,}37\,\text{Kč}}}$$

Příklad

- Jaká částka nám zajistí důchod ve výši 6 000 Kč vyplácený na začátku každého roku po dobu 10 let při úrokové sazbě 2,5 % p.a. s ročním připisováním úroků?

Příklad

- Jaká částka nám zajistí důchod ve výši 6 000 Kč vyplácený na začátku každého roku po dobu 10 let při úrokové sazbě 2,5 % p.a. s ročním připisováním úroků?

$$D = \left[a \cdot (1+i)\right] \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

$$D = \left[6000 \cdot (1+0{,}025)\right] \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}025}\right)^{10}}{0{,}025}$$

$$D = \underline{53\,825{,}19\ \text{Kč}}$$

Příklad

- Kolik bychom museli mít naspořeno, jestliže bychom si nyní chtěli nechat z naspořené částky vyplácet na konci každého měsíce (tj. polhůtně) důchod ve výši 8 000 Kč po dobu 10 let? Úroková sazba je 2,8 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků, úroky jsou daněny 15 % srážkovou daní.

Příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Kolik bychom museli mít naspořeno, jestliže bychom si nyní chtěli nechat z naspořené částky vyplácet na konci každého měsíce (tj. polhůtně) důchod ve výši 8 000 Kč po dobu 10 let? Úroková sazba je 2,8 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků, úroky jsou daněny 15 % srážkovou daní.

$$D = \left[m \cdot X \cdot \left(1 + \frac{m-1}{m \cdot 2} \cdot i\right]\right. \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = \left[3 \cdot 8000 \cdot \left(1 + \frac{3-1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{0{,}028}{4} \cdot (1-0{,}15)\right)\right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{0{,}028}{4} \cdot (1-0{,}15)}\right)^{40}}{\frac{0{,}028}{4} \cdot (1-0{,}15)}$$

$$D = 853\,755{,}40 \text{ Kč}$$

Příklad

- Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 3 500 Kč po dobu 8 let? Uvažujeme úrokovou sazbu 3 % p.a. a pololetní úrokové období.

Příklad

- Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 3 500 Kč po dobu 8 let? Uvažujeme úrokovou sazbu 3 % p.a. a pololetní úrokové období.

$$D = \left[X \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right)\right] \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = \left[3500 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{6-1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{0{,}03}{2}\right)\right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{0{,}03}{2}}\right)^{2 \cdot 8}}{\frac{0{,}03}{2}}$$

$$D = \underline{298\,611{,}27 \text{ Kč}}$$

Příklad

- 1. Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5 % p.a. (abstrahujeme od všech poplatků a zdanění úroků).

Příklad

- 2. Jaká částka nám (a našim pozůstalým) zajistí čtvrtletní polhůtní věčný důchod ve výši 5 000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 4 % p.a.?

Příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- 3. Absolvent OPF si chce začít ve 25 letech spořit na důchod, kam předpokládá, že půjde v 65 letech. V důchodu si chce nechat vyplácet po dobu 15 let měsíčně polhůtně 10 000 Kč s růstem výše této platby o 0,2 % oproti předchozímu měsíci. Kolik musí spořit na konci každého měsíce, pokud po celou dobu spoření i vyplácení důchodu bude účet úročen roční úrokovou sazbou 6 % s měsíčním připisování úroků a z úroků bude strhávána srážková daň 15 %?

4. Jak velkou částku musíme dnes při neměnné úrokové sazbě 6% p.a. uložit novorozenému dítěti, aby v 19 letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečil po dobu 7 let (do 26 věku) měsíční polhůtní důchod ve výši 3.000 Kč?

- 5. Jaká částka nám zajistí důchod ve výši 7 000 Kč vyplácený na začátku každého roku po dobu 12 let při úrokové sazbě 3,5 % p.a. s ročním připisováním úroků?

- 6. Kolik jsme museli naspořit, jestliže si nyní chceme nechat z naspořené částky vyplácet měsíčně polhůtně důchod ve výši 5 900 Kč po dobu 15 let? Úroková sazba je 4,8 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků, úroky jsou daněny 15 % srážkovou daní.

- 7. Pojistné plnění z obrovské pojistné události bude vypláceno postupně, vždy ve výši 1 157 510 EUR ročně, a to polhůtně, po dobu 4 let, s jednoletým odkladem. Určete současnou hodnotu příjmů pojištěného, jestliže uvažujeme roční úrokovou míru 5,5 % s ročním úročením.

- 8. Rodiče uložili dceři 3 roky před zahájením studia na VŠ 500 000 Kč, které bude dcera čerpat rovnoměrně měsíčně polhůtně po celou dobu VŠ studia (5 let). Úroková sazba je 6 % p.a. s pololetním připisováním úroků. Jak velké bude dostávat každý měsíc kapesné?

- 9. Zvažujete koupi nemovitosti k trvalému pronajímání. Odhadujete, že bude (po odečtení všech poplatků včetně nákladů na údržbu) vynášet čisté nájemné 14 500 Kč na konci každého měsíce. Předpokládáte její držbu po dobu 15 let a poté její prodej za 5 mil. Kč. Při jaké aktuální ceně jste ochotni nemovitost koupit, pokud ji kupujete na 100% hypotéku při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a. s ročním úročením? Pozn. abstrahujeme od daní.

- 10. Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme až za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4 % roční úrokové sazbě?

- 11. Jak velkou částku musíme dnes při neměnné roční úrokové sazbě 5 % uložit novorozenému dítěti, aby v osmnácti letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečoval po dobu deseti let čtvrtletní polhůtní důchod ve výši 1 400 Kč?

- 12. Jak vysoká dnes složená částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního důchodu ročního ve výši 10 000 Kč od pětašedesáti let našeho věku, je-li nám dnes třicet jedna let a uvažujeme neměnnou úrokovou sazbu 5 % p.a.?

- 13. Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 1 000 Kč po dobu pěti let? Uvažujeme úrokovou sazbu 5 % p.a. a pololetní úrokové období.

- 14. Rentiér měl před 28 lety na účtu 15 000 000 USD a po celých 28 let z účtu odčerpával na počátku měsíce částku 65 000 USD. Kolik peněz vstoupí do dědického řízení, jestliže rentiér právě zemřel? Úroková sazba bylo po celou dobu neměnná ve výši 3,5 % p.a. s ročním úročením.

- 15. Jaká je současná hodnota důchodu, který nám zajistí polhůtní důchod 11 450 Kč ročně po dobu 15 let při úrokové sazbě 6,4 % p.a. s ročním připisováním úroků, jestliže nám bude finanční ústav na konci každého roku strhávat poplatek ve výši 390 Kč?

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺