Finanční a pojistná matematika

Složené, smíšené a spojité úročení
Nominální a reálná úroková míra
Spoření

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

FIU/BKFPM
Ing. Roman Hlawiczka, Ph.D.
Katedra financí a účetnictví

Složené úročení

- Složené úročení je typ úročení, které se využívá při uložení kapitálu na dobu delší než jedno úrokové období.
- Úroky se připisují k jistině a spolu s ní se dále úročí.

- Z matematického hlediska:
  - Jednoduché úročení je aritmetická řada (úroky se počítají z téhož základu)
  - Složené úročení je geometrická řada (úroky se připisují k původnímu kapitálu a v následujícím období se opět úročí)

Složené úročení polhůtní

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Vzorec:

$$C_n = C_0 * (1 + i * (1 - d))^n$$

$$C_n = C_0 * (1 + i)^n$$

- C_n – budoucí hodnota kapitálu, splatná částka
- C_0 – současná hodnota kapitálu, jistina
- i – roční úroková sazba (sazba p.a.)
- d – srážková daň z úroků
- n – počet úrokovacích období

Řešený příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Na účet úročený 3 % p.a. dnes vložíte 10 000 Kč. Jakou sumou budete disponovat za tři roky?

Efektivní úroková míra

- Připisují-li se úroky m-krát ročně, bude celkový úrok při stejné úrokové sazbě (za předpokladu dalšího úročení) vyšší, než v případě, že se úroky připíší jen jednou na konci vkladu.
- EAIR (Effective Annual Interest Rate) je tedy taková roční úroková míra, při níž hodnota vloženého kapitálu je po jednom roce stejná, jako hodnota kapitálu, který je úročen m-krát do roka, přičemž stejně tak jsou úročeny m-krát ročně při úrokové míře i připisované úroky.
- EAIR je možné použít například pro porovnání výhodnosti uložení kapitálu u různých bank.
- Při stejné úrokové míře je hodnota kapitálu při ročním úrokovacím období nižší, než při úrokovacím období m-krát ročně.

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

- Pro spojité úročení: $i_e = e^i - 1$

Področní složené úročení

- **Je-li úrokovací období kratší než 1 rok**
- Vzorec:

$$C_n = C_0 * \left(1 + \frac{i * (1 - d)}{m}\right)^{n*m}$$

$$C_n = C_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n*m}$$

$$C_n = C_0 * (1 + EAIR)^n$$

- C_n – budoucí hodnota kapitálu, splatná částka
- C_0 – současná hodnota kapitálu, jistina
- i – roční úroková sazba (sazba p.a.)
- d – srážková daň z úroků
- n – počet let
- m – frekvence úročení (kolikrát jsou úroky připisovány do roka)

Řešený příklad 2

- Jakou úrokovou sazbou by musel být úročen běžný účet v bance A s připisováním úroků jednou za rok, aby se vyrovnal běžnému účtu v bance B s měsíčním připisováním úroků a úrokovou sazbou 12 % p.a.?

1. Uložili jsme částku 110 000 Kč. Jak vysoký bude kapitál za 4 roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úroková sazba činí 2,4 % p.a.se čtvrtletním úročením?

2. Při jaké úrokové sazbě se čtvrtletním připisování úroků se nám za dobu 5 let zúročí částka 50 000 EUR na 70 000 EUR?

3. Podnikatel dluží bance 200 000 Kč splatných za rok a 300 000 Kč splatných za 2 roky. Disponuje dostatečným obnosem, který není schopen lépe investovat, proto okamžitě vyrovná dluh. Kolik zaplatí, jestliže banka účtuje 15 % úrokovou sazbu s půlročním úročením a dovoluje předčasně splácet bez sankcí?

Smíšené úročení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Kombinace složeného a jednoduchého úročení.

- Smíšené úročení se používá při uložení kapitálu na dobu, kterou nelze vyjádřit jako celý počet úrokových období.
- Jde o kombinaci jednoduchého a složeného úročení, protože během jednoho úrokového období je pro vkladatele výhodnější jednoduché úročení a při uložení na více období zase složené úročení.

- V praxi se běžně stává, že kapitál je úročen po neúplný počet úrokovacích období.
  - V takovém případě pro celý ukončený počet úrokovacích období použijeme složené úročení, pro poslední, neúplné, úrokovací období použijeme jednoduché úročení.
  - Například kapitál máme uložen po dobu 5 let a 3 měsíce, úroky jsou připisovány ročně, takže po dobu 5 let úročíme pomocí složeného úročení a po dobu 3 měsíců pomocí jednoduchého úročení.

Vzorec:

$$C_n = C_0 * \left(1 + \frac{i * (1-d)}{m}\right)^{n*m} * (1 + i * (1-d) * l)$$

C_n – budoucí hodnota kapitálu, splatná částka
C_0 – současná hodnota kapitálu, jistina
i – úroková sazba
d – srážková daň z úroků
n – počet celých úrokových období, po které byl kapitál uložen
m – frekvence úročení
l – zbytková doba uložení

- 1. Vložili jsme do banky 175 000 Kč. Kolik Kč budeme mít na účtu za 2 roky a 11 měsíců při úrokové sazbě 2 % p.a.? Úroky jsou připisovány každé pololetí.

- 2. Jaká je doba splatnosti kapitálu, když jeho počáteční hodnota byla 13 000 Kč a v době splatnosti máme obdržet 13 799,76 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a. a pololetním polhůtním úročení?

- 3. Kolik Kč musíme dnes uložit na účet, abychom za 7 let a 8 měsíců měli k dispozici 135 000 Kč? Banka úročí při úrokové sazbě 2,05 % p.a.

- 4. Máme možnost dnes investovat do cenného papíru částku 3 200 Kč, přičemž za 3 roky získáme z tohoto cenného papíru částku 4 000 Kč. Je to výhodná investice, když si jinak můžeme peníze uložit do banky na účet s úrokovou sazbu 3,4 % p.a.?

Spojité úročení – úroková intenzita

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

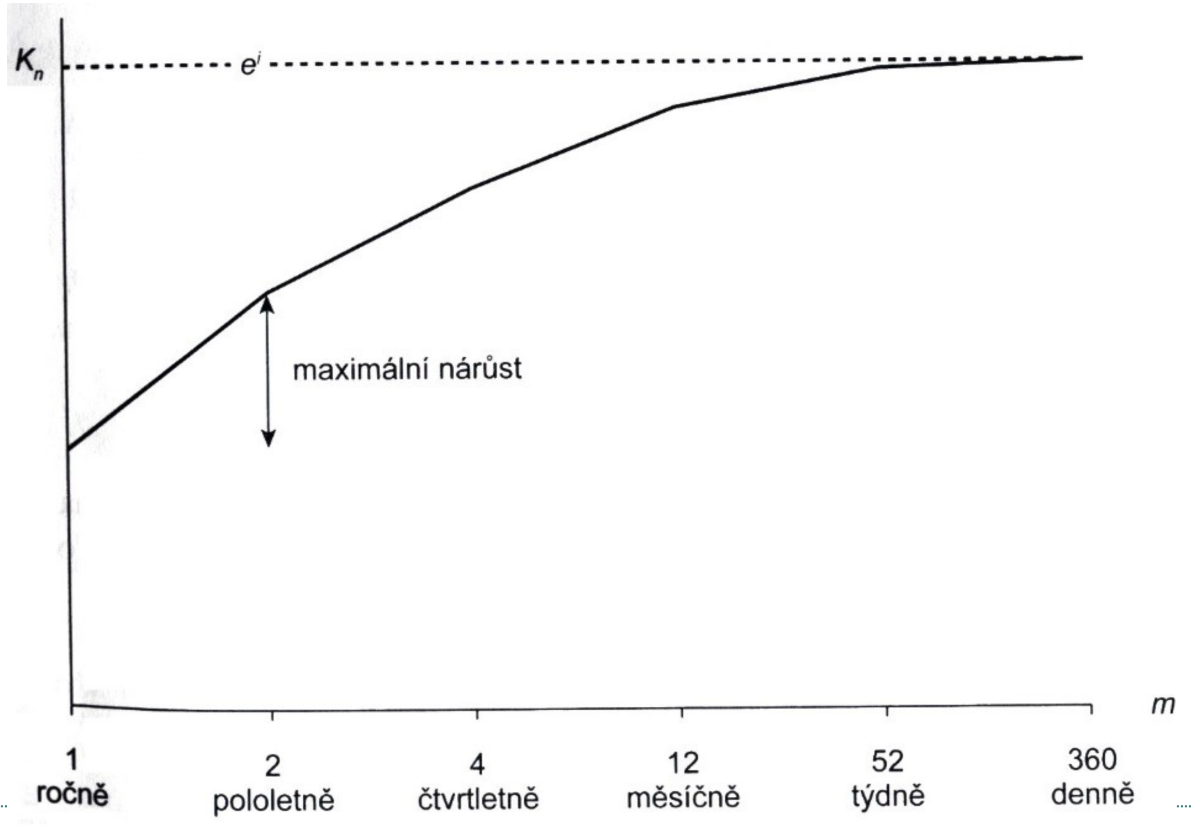
$$C_n = C_0 * e^{i*n}$$

- C_n - budoucí hodnota kapitálu, splatná částka
- C_0 - současná hodnota kapitálu, jistina
- i – roční úroková sazba (sazba p.a.)
- n – doba uložení kapitálu v letech

Příklad

- Na jakou částku se zúročí vklad 100 000 Kč za 1 rok a 6 měsíců při spojitém úročení s úrokovou sazbou 5 % p.a.?

- Čím častěji se připisují úroky, tím je to pro vkladatele výhodnější (protože se mu počítají úroky z úroků). Nárůst splatné částky má však svou hranici – graf závislosti budoucí hodnoty kapitálu za jeden rok na počtu úrokových období během jednoho ruky vypadá následovně:



Nominální a reálná úroková míra

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Úrokové sazby, které jsou oficiálně vyhlašované bankami, uvedené ve smlouvách nebo vytištěny na cenných papírech, jsou tzv. nominální úrokové sazby, to znamená takové, v jejichž hodnotě není zohledněna míra inflace. Reálnou úrokovou míru dostaneme, pokud do nominální úrokové míry zohledníme míru inflace.

	Současnost	Budoucnost
Zboží	1	1 + r
Cena zboží	P1	P2
Hodnota zboží vyjádřená v penězích	P1	P1 * (1 + n)

r…………reálná úroková míra
n……….nominální úroková míra

Inflace

$$C_n = C_0 * (1 + \pi_1) * \cdots * (1 + \pi_n)$$

- C_n - budoucí cena zboží a služeb
- C_0 - současná cena zboží a služeb
- $\pi_1, \ldots, \pi_n$ - roční míry inflace v letech 1 … *n*

Reálná úroková míra

- Reálná úroková míra určuje skutečné zhodnocení uloženého kapitálu – tj. přírůstek kupní síly vkladatele v důsledku odložení spotřeby na pozdější dobu.

$$i_r = \frac{i_n * (1 - d) - \pi}{1 + \pi}$$

- i_r - reálná úroková sazba
- i_n- nominální úroková sazba
- π – míra inflace
- d – srážková daň z úroků

Reálná úroková míra

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Níže uvedenou aproximaci lze použít při nízkých mírách inflace.

$$i_r \approx i_n * (1 - d) - \pi$$

- i_r - reálná úroková sazba
- i_n- nominální úroková sazba
- π – míra inflace
- d – srážková daň z úroků

Příklad 2

- Jaká byla na konci roku 2017 cena zboží, které bylo možno na konci roku 2015 koupit za 1 000 Kč, jestliže míra inflace byla v roce 2016 - 15,2 %, v roce 2017 - 10,5 % a v roce 2017 byla 10,2 %.
- Kolik stálo na konci roku 2015 zboží, které bylo možno na konci roku 2017 koupit za 1 000 Kč?

- 3. Banka nám nabízí 2 typy termínovaných vkladů:
  - účet s 2 % roční úrokovou sazbou a s měsíčním připisováním úroků
  - účet s 2,1 % roční úrokovou sazbou a s pololetním připisováním úroků.
- Který účet si vybereme?

- 4. Vypočtěte reálnou úrokovou sazbu, je-li
  - nominální úroková sazba 6 % a míra inflace 2,5 %,
  - nominální úroková sazba je 3,5 % a míra inflace je taktéž 3,5 %,
  - nominální úroková sazba je 2,8 % a míra inflace je 3,2 %.

- 5. Jaká je výsledná úroková sazba, pokud klesla z 8,45 % o 61 b. p.?

- 6. Vypočtěte cenu zboží na konci roku, když na začátku roku byla jeho cena 550 Kč. Obdrželi jsme výnos 44 Kč, reálná úroková sazba je 1,5 %.

Spoření

- Při spoření jsou zpravidla ukládány v pravidelných intervalech určité dané částky, které jsou úročeny úrokovou sazbou.

- V modelech spoření se rozlišuje období ukládací a období úrokovací.
- Budeme předpokládat, že ukládací období je části období úrokovacího, nebo že je shodné s úrokovacím.

Podle doby trvání spoření se rozlišuje:

- Spoření krátkodobé – při kterém doba spoření nepřesáhne jedno úrokovací období.
- Spoření dlouhodobé – při kterém doba spoření přesáhne jedno úrokovací období.

- Při krátkodobém spoření budeme používat jednoduché úročení, při dlouhodobém spoření budeme používat složeného úročení. Někdy také kombinaci krátkodobého a dlouhodobé spoření.
- V předlhůtním spoření se částka ukládá na počátku příslušného období, v polhůtním spoření se částka ukládá na konci období.

Krátkodobé spoření – budoucí hodnota anuity

- Krátkodobé spoření předlhůtní

$$a = m * X * \left(1 + \frac{m+1}{2*m} * i\right)$$

- Krátkodobé spoření polhůtní

$$a = m * X * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right)$$

- a – naspořená částka (budoucí hodnota pravidelných plateb), anuita
- i – úroková sazba příslušná úrokovému období
  - Pozn. Pokud jsou úroky daněny, dosadíme místo i $i * (1 - d)$
- m – počet úložek za úrokové období
- X – velikost jedné úložky

- 1. Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1.500 Kč při úrokové sazbě 3% p. a.?

- 2. Kolik musíme spořit na konci každého měsíce, abychom za rok našetřili 18.000 Kč při úrokové sazbě 3 % p. a.?

Dlouhodobé spoření – budoucí hodnota anuity

- 3. Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má dle prognózy vývoje cen stát v té době 750.000 Kč. Kolik musíme tedy spořit na počátku každého roku, abychom za pět let uspořili 750.000 Kč? Úspory dáváme na účet, úročený sazbou 5 % p.a. s ročním připisováním úroků.

- 4. Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má dle prognózy vývoje cen stát v té době 750.000 Kč. Kolik musíme tedy spořit na konci každého roku, abychom za pět let uspořili 750.000 Kč při úrokové sazbě 5 % p.a. a ročním úrokovém období?

Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

- Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření se používá v případě, že chceme zjistit, kolik uspoříme do konce *n*-tého období, jestliže ukládáme *m*-krát za jedno úrokové období.
- Tento problém rozdělíme opět podle toho, zda ukládáme na počátku nebo na konci určité části, tedy *m*-tiny úrokového období, což znamená, že
  - budeme aplikovat vztah buď pro krátkodobé spoření předlhůtní,
  - nebo pro krátkodobé spoření polhůtní.

Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

- **Předlhůtní**

$$S = m * X * \left(1 + \frac{m+1}{2*m} * i\right) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- **Polhůtní**

$$S = m * X * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

1. Naspořená částka při více úložkách v úrokovém období

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Kolik uspoříme za tři roky, spoříme-li začátkem každého měsíce 1 700 Kč při neměnné 2% roční úrokové sazbě? Předpokládáme roční připisování úroků.

2. Výše úložky ukládané vícekrát v úrokovém období

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má dle prognóz vývoje stát v té době 750 000 Kč. Kolik musíme spořit počátkem každého čtvrtletí, abychom za pět let uspořili 750 000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 2,5 % a ročním připisováním úroků?

3. Doba spoření

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Jak dlouho je nutno spořit počátkem každého měsíce 500 Kč, aby uspořená částka dosáhla výše 50 000 Kč při neměnné 4% roční úrokové sazbě a ročním připisování úroků?

4. Naspořená částka při připisování úroků vícekrát v roce

- Kolik naspoříme za tři roky, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 2,8 % p.a. a čtvrtletním úrokovém období?

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺