EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

10. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Témata přednášky:

a) diskrétní náhodná veličina (Stejnoměrné rozdělení, Binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení),

b) spojitá náhodná veličina (Stejnoměrné rozdělení, Exponenciální rozdělení, Normální rozdělení).

Náhodná veličina

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Náhodná veličina = soubor všech hodnot znaku + rozdělení pravdě-podobnosti hodnot

- některé hodnoty se nabývají častěji než jiné → mají větší pravděpodobnost výskytu

- hodnoty znaku statistických jednotek se „generují“ podle **pravděpodobnostního rozdělení**

Příklady diskrétní náhodné veličiny

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

1. Jistý hotel má 100 pokojů, celkový počet obsazených pokojů 1. července je náhodná veličina X s možnými hodnotami $x = 0,1,2,\ldots,100$

2. Počet zákazníků v supermarketu mezi 12 až 18 hod. je náhodná veličina X, která může **teoreticky** nabývat jakékoliv nezáporné celočíselné hodnoty $x \geq 0$

Příklady diskrétní náhodné veličiny

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

3. Rozdíl mezi počtem zákazníků ve dvou supermarketech (Kaufland, Tesco) v jednom dni je náhodná veličina *X*, jež může teoreticky nabýt jakékoliv celočíselné hodnoty

$$x = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

1. Diskrétní model pr-sti rozdělení: Stejnoměrné rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Diskrétní náhodná veličina X
nabývá právě k různých hodnot: $1, 2, 3, \ldots, k$
se stejnou pravděpodobností

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{k}} \qquad \text{pro } x = 1,2,3,\ldots,k$$

Stejnoměrné rozdělení

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k+1}{2}$

obecný vzorec: $E(X) = \sum_x x p(x)$

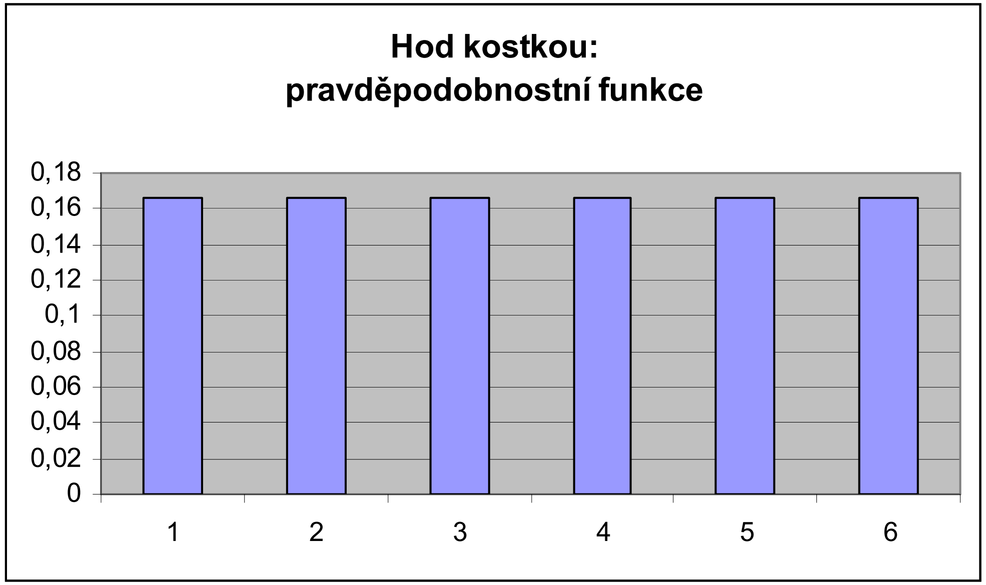
Rozptyl: $Var(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$

obecný vzorec: $Var(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x)$

Příklad – hod kostkou

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Střední hodnota: $E(X) = (6+1)/2 = 3{,}5$
- Rozptyl: $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2{,}92$



2. Model: Binomické rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$\boldsymbol{n}$ pokusů s alternativním rozdělením,
celkem $\boldsymbol{x}$ krát úspěch a $\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{x}$ krát neúspěch,
p pravděpodobnost úspěchu

Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$\boxed{P(x \mid n; p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x}}$$

pravděpodobnost, že při n-krát opakovaném alternativním procesu nastane x krát úspěch a n-x krát neúspěch

Charakteristiky binomického rozdělení

- Střední hodnota: $E(X) = n.p$
- Rozptyl: $Var(X) = n.p.(1- p)$
- Směrodatná odchylka: $\sigma(X) =$

Příklad

Je známo, že při epidemii chřipky onemocní každý třetí student, tj. pravděpodobnost onemocnění je 1/3 =0,333 , tj. p = 1/3.

Zjistěte pravděpodobnost, že ve studijní skupině s 20 studenty onemocní každý druhý

$$n = 20,\ p = 1/3,\ \ x = 10 \ \ \Rightarrow\ P(10|\ 20;1/3) =$$

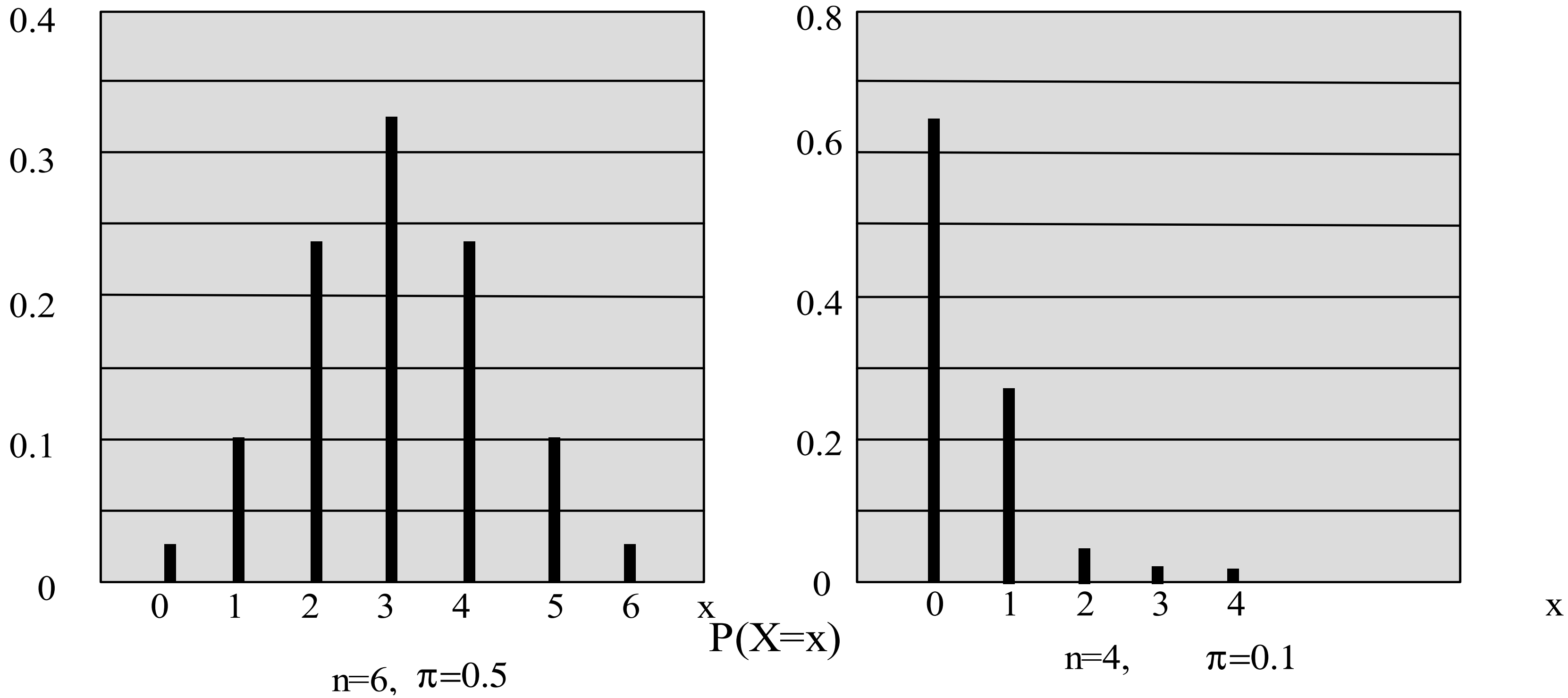
$$= \quad \frac{20!}{10!.10!} 0{,}333^{10}.0{,}667^{10} \quad = 20*0{,}333 = 0{,}092\ \ (9{,}2\ \%)$$

$$E(X) = 20.\ 1/3 = 6{,}67$$

$$Var(X) = 20\ .1/3.2/3 = 4{,}44$$

$$\sigma(X) = 2{,}11$$

Binomické rozdělení – různé parametry



3. Model: Poissonovo rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například:

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu,
- zákazníci přicházející do prodejny,
- automobily zastavující u benzínového čerpadla.

Takové jevy vznikají v tzv.

Poissonově procesu !!!

Poissonovo rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

X - náhodná veličina = počet výskytu jevu Poissonova procesu

v daném časovém intervalu délky *t*

(např. za 1 minutu, 1 hodinu apod.)

\+ rozdělení pr-sti počtu výskytů

(tj. s jakou pr-stí nastane v daném čas. intervalu určitý počet výskytů jevu)

Vlastnosti Poissonova procesu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

3 vlastnosti:

1. Počet výskytu jevu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu

2. Střední hodnota počtu výskytu jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu

3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu

Vlastnosti Poissonova rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Pravděpodobnost výskytu x jevů Poissonova procesu X:

$$\boxed{P(x \mid \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}}$$

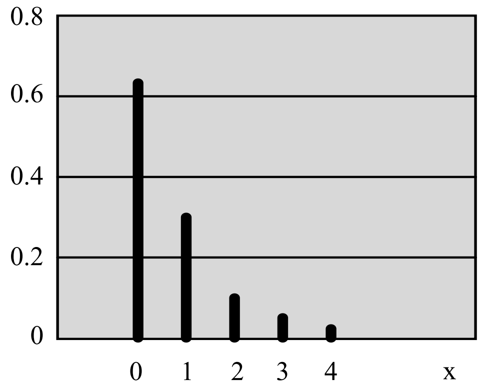
- λ, t - parametry Poissonova rozdělení
- x – počet výskytů jevu
- λ - intenzita Poissonova procesu (střední hodnota výskytů jevů)
- t - délka časového intervalu

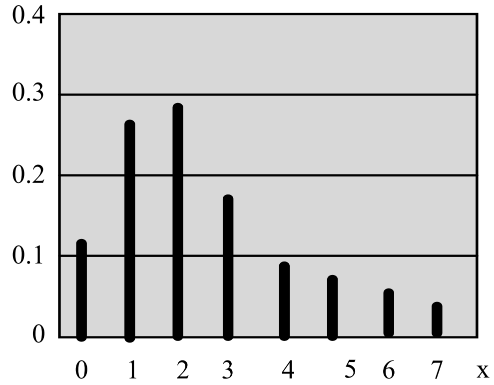
$$\boxed{E(X) = \lambda . t \quad Var(X) = \lambda . t \quad \sigma(X) = }$$

Poissonovo rozdělení s různými parametry (t = 1)

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

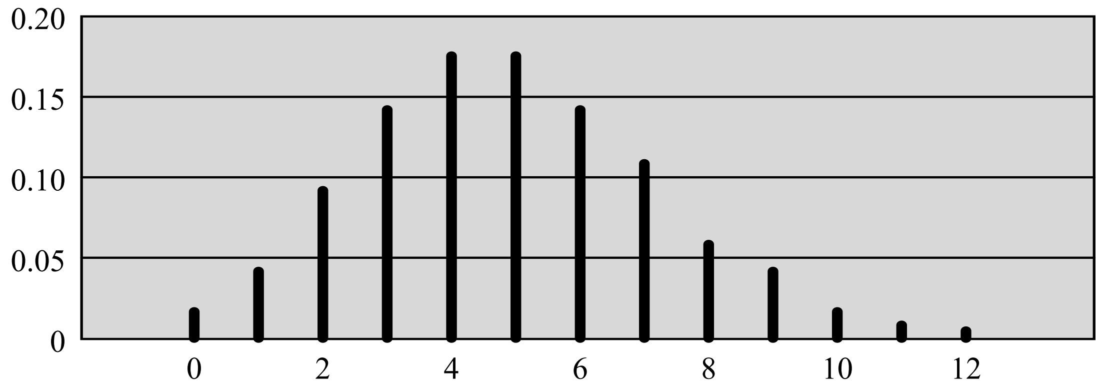
$\lambda = 0{,}5$





$\lambda = 2$

$\lambda = 5$



Příklad – Poissonovo rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení:

$$P(2\,|\,4{,}1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}1465$$

Střední hodnota $E(X) = 4$, rozptyl $Var(X) = 4$,
směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{4} = 2$

Diskrétní náhodná veličina - obecně

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina X.
Bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,20	0,40	0,25	0,10	0,03	0,01

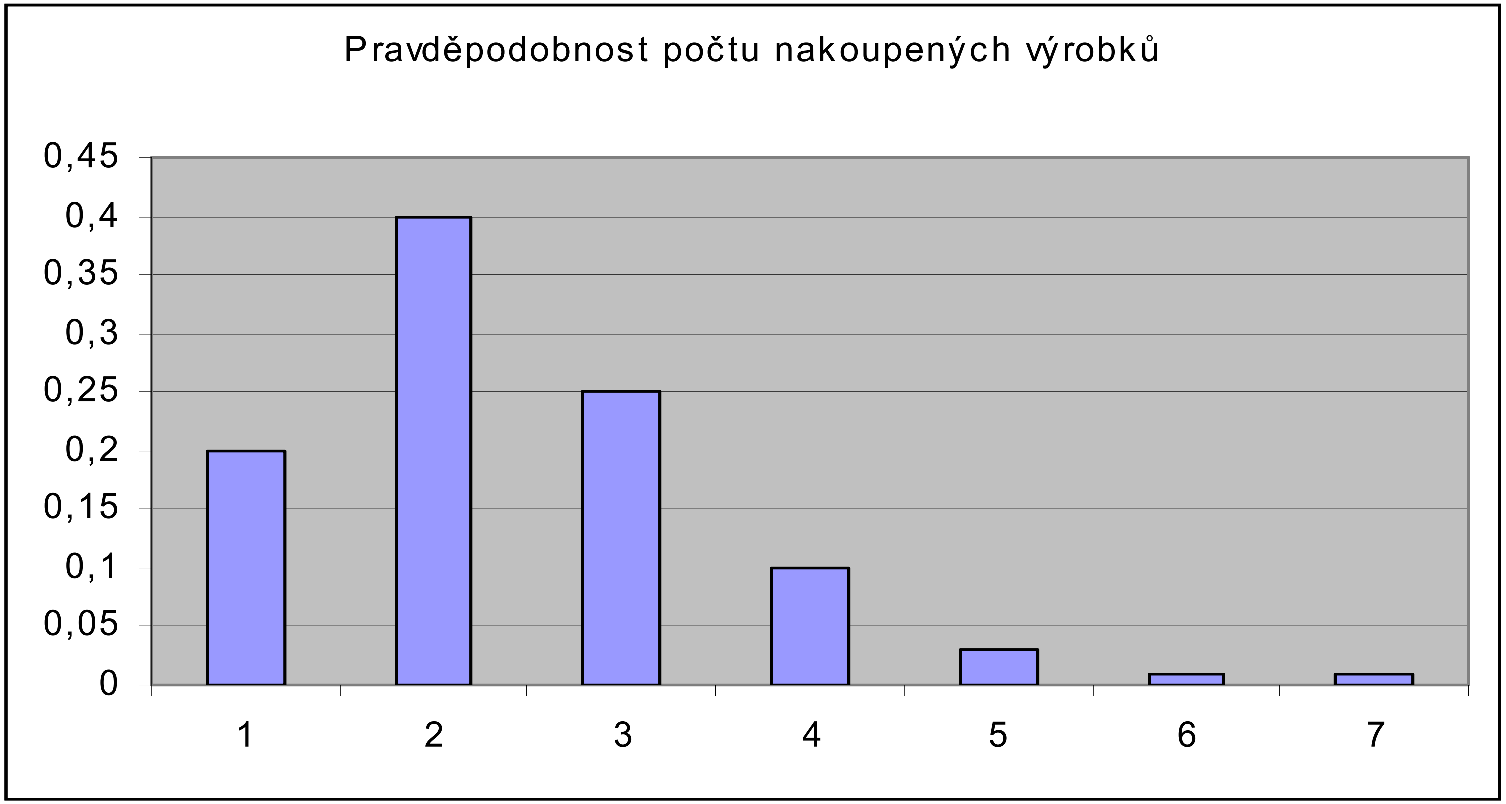
Řešení:

Střední hodnota počtu druhů zboží zakoupeného jedním zákazníkem

$E(X)$ = 0*0,2+1*0,4+2*0,25+3*0,1+4*0,03 +5*0,01 = 1,37

Diskrétní náhodná veličina - obecně

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA



Diskrétní náhodná veličina - obecně

- Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nabývá maximální hodnotu 0,4 pro $x = 1$: $Mod(X) = 1$

- Medián: $p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1) = 0{,}2+0{,}4 = 0{,}6 \geq 0{,}5$

  $p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + \ldots + p(X=5) = 0{,}4+0{,}25+0{,}1+0{,}03+0{,}01 = 0{,}7 \geq 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
  Podle definice je medián: $Med(X) = 1$

- $Var\,(X) = 0^2.0{,}2+1^2.0{,}4+2^2.0{,}25+3^2.0{,}1+4^2.0{,}03 + 5^2.0{,}01 - 1{,}37^2 = 3{,}39 – 1{,}88 = 1{,}51$

- $\sigma(x) = \sqrt{1{,}51} = 1{,}23$

Spojité modely – Stejnoměrné rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Spojitá náhodná veličina X má ***stejnoměrné rozdělení:***
nabývá hodnot z intervalu $[a,b]$ stejnou pravděpodobností

Funkce hustoty: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ pro $x \in [a,b]$, jinak $f(x) = 0$

Pravděpodobnost: $c,d \in [a,b]$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \dfrac{d-c}{b-a}$

Střední hodnota: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Rozptyl: $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X) = \dfrac{(b-a)}{\sqrt{12}}$

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Autobusy odjíždějí z určité zastávky během dne pravidelně každých 15 minut. V náhodnou dobu přijdete na zastávku.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budete na autobus čekat dobu mezi 5 až 10 minutami?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat alespoň 12 minut?

(c) Stanovte střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání.

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

X je spojitá náhodná veličina s následující hustotou:

$$f(x) = \frac{1}{15} \quad \text{pro } 0 \le x \le 15$$
$$= 0 \quad \text{jinde}$$

$$E(X) = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$$

$$Var(X) = \frac{(15-0)^2}{12} = 18{,}75$$

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

$$P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$$

(a) S využitím vzorce vypočítáme: $P(5<X<10) = (10\text{-}5)/(15\text{-}0) = 0{,}33$

(b) Analogicky obdržíme: $P(12< X<15) = (15\text{-}12)/(15\text{-}0) = 0{,}2$

(c) $\sigma(X) = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$

Střední čekací doba je 7,5 minut, směrodatná odchylka je 4,33 minut.

Normální rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nejdůležitější rozdělení ve statistice!

Normální (Gaussovo) rozdělení pr-sti NV:

Způsobené kolísáním NV velkého počtu nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů, které se skládají (sečítají).

Příklady:

(1) výsledky různých testů (body)

(2) výsledky měření rozměrů a hmotností (mm, cm, m, g, kg, t aj.)

Normální rozdělení

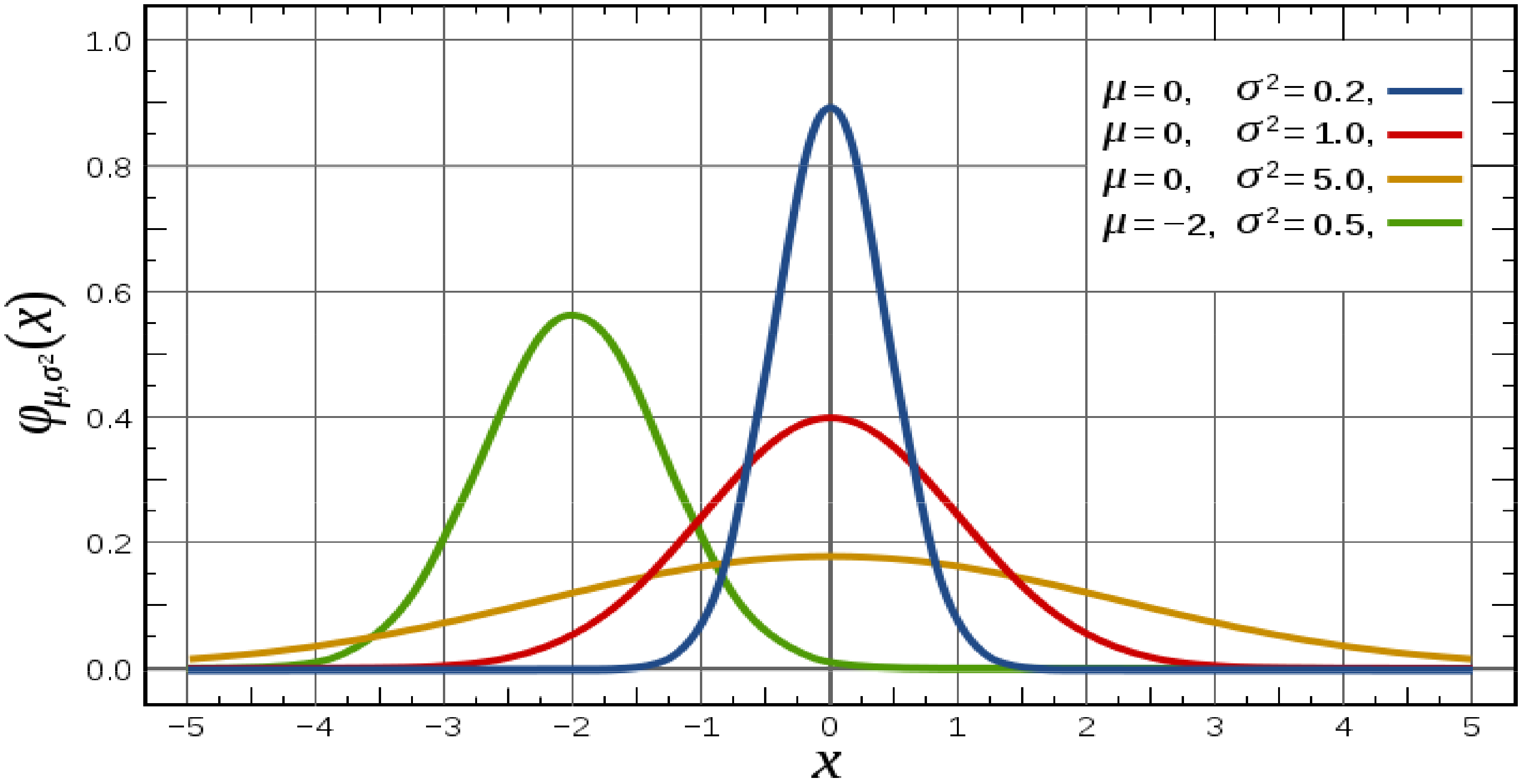
Funkce hustoty rozdělení pr-sti $f(x|\mu,\sigma^2)$:

$$f(x\,|\,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0,\ \text{kde } \mu \text{ a } \sigma$$

se nazývají **parametry rozdělení**

Gaussova křivka – funkce hustoty



Charakteristiky normálního rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Střední hodnota: $E(X) = \mu$

Rozptyl: $Var(X) = \sigma^2$

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sigma$

Normované normální rozdělení

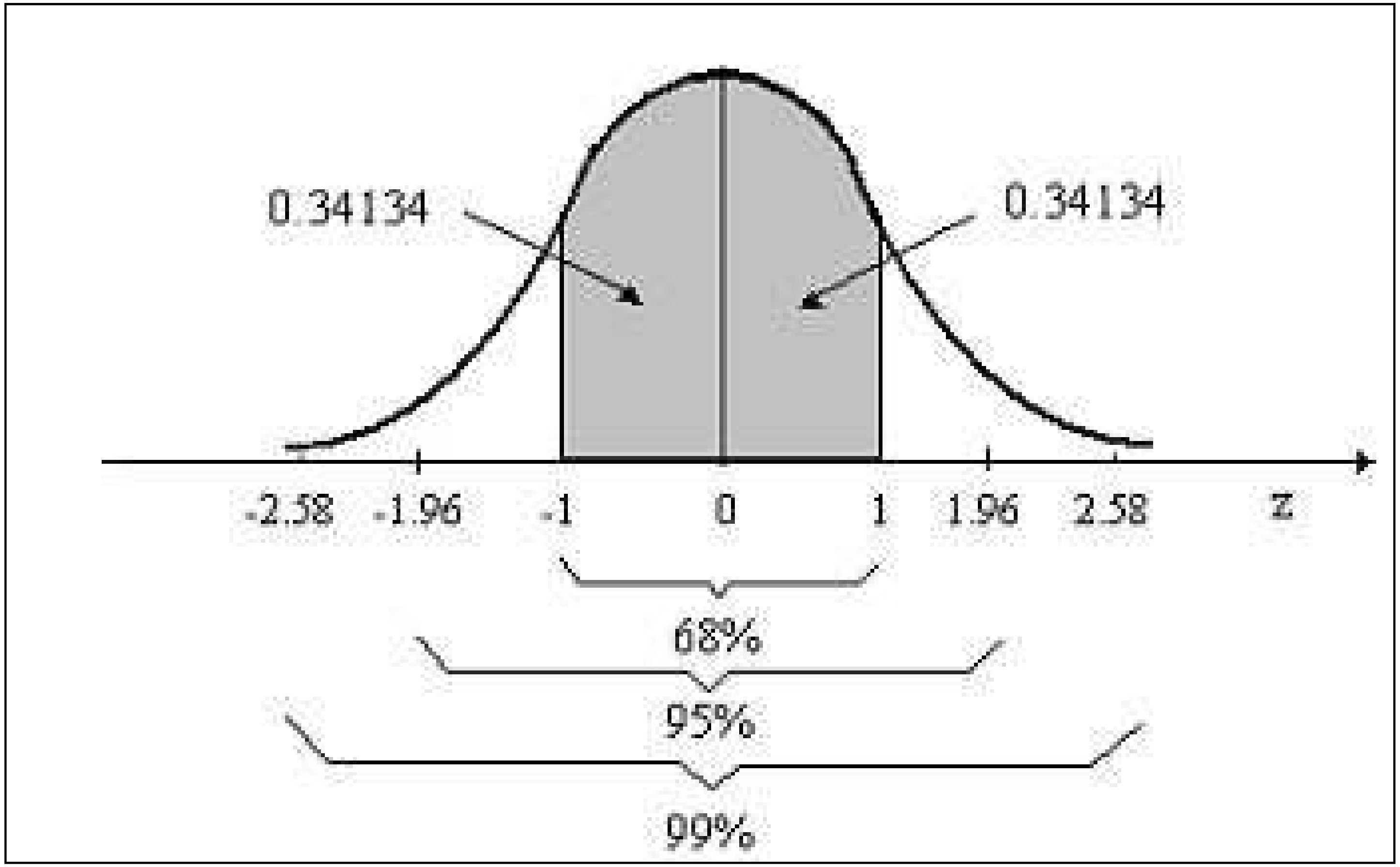
SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Namísto NV X s normálním rozdělením s parametry μ, σ^2 uvažujeme transformovanou NV Z takto:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (*)$$

- potom se funkce hustoty převede na hustotu normovaného normálního rozdělení transformaci (*) nazýváme ***normalizace***
- **V Excelu**: **NORMDIST**(x; Střed_hodn; Sm_odch; Součet)
  NORMINV(prst; střední; sm_odch)

Významné hodnoty normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$



Příklad – normální rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Jistý druh pomerančů má průměrnou hmotnost plodu μ =100 g se směrodatnou odchylkou σ =10 g.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný plod bude mít hmotnost mezi 100g až 110g?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný plod bude mít hmotnost větší než 120g?

Exponenciální rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti doby životnosti výrobků, čekacích dob v modelech hromadné obsluhy, apod.

Příklady: (1) doba pobytu ve frontě u přepážky
(2) doba obsluhy jednoho zákazníka

- Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x|\ \delta)$:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \quad \text{pro } x > 0$$
$$= 0 \quad \text{jinak}$$

Přitom $\delta > 0$ je parametr

Exponenciální rozdělení - charakteristiky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Střední hodnota: $E(X) = \delta$

Rozptyl: $Var(X) = \delta^2$

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \delta$ (= $E(X)$!!!)

Pravděpodobnost: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = e^{-\frac{a}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}}$

Exponenciální rozdělení - příklad

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Průměrná doba čekání u přepážky v bance je 5 min.

Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat

(a) Právě 5 minut,

(b) Méně než 5 minut

(c) Více než 5 minut

(d) Více než 3 minuty a méně než 6 minut?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \left[-e^{-\frac{x}{\delta}} \right]_a^b = e^{-\frac{a}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}}$$

Exponenciální rozdělení – řešení příkladu

Průměrná doba čekání u přepážky v bance je δ **= 5**.

(a) Právě 5 minut: $P(X=5)=0$!!! - spojité rozdělení,

(b) Více než 5 minut: $P(X \geq 5) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{5}^{-\infty} = e^{-\frac{5}{5}} - \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{5}} - = e^{-1} - 0 \approx 0{,}368$

(c) Méně než 5 minut: $P(X \leq 5) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{0}^{5} = e^{0} - e^{-1} \approx 1 - 0{,}368 = 0{,}632$

(d) Více než 3 minuty a méně než 6 minut:

$$P(3 \leq X \leq 6) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{3}^{6} = e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{6}{5}} \approx 0{,}549 - 0{,}301 = 0{,}248$$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!