



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:  
**KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI**

Vyučující:  
**Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**



**SLEZSKÁ  
UNIVERZITA**  
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ  
FAKULTA V KARVINĚ



**SILESIA  
UNIVERSITY**  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

# **KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI**

## **3. PŘEDNÁŠKA**

**Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**



# Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

*Témata přednášky:*

- a) číselné posloupnosti,*
- b) vlastnosti posloupností,*
- c) výpočet limity posloupnosti.*

# Posloupnosti



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

## Nekonečnou číselnou

**posloupností** prvků číselné množiny **je funkce**, která každému přirozenému číslu  $n$  přiřazuje reálné číslo.

definiční obor –  $N$

obor hodnot -  $R$

Zápis:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$



# Zadání posloupnosti

•  $n$ -tým členem  $a_n = \frac{2n-1}{4n} \quad \left\{ \frac{2n-1}{4n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

• výčtem prvků  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

• rekurentně  $a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad a_1 = -2$

• graficky

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

# Aritmetická posloupnost



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

• rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference**  $d$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Platí:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**Příklad.** Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

# Geometrická posloupnost



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

Podíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní,  
nazývá se kvocient  $q$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Platí:

$$1) \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2) \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

# Součet nekonečné geometrické řady

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

POSLOUPNOST KONVERGUJE



# Příklad:

**Určete součet posloupnosti:**

a)  $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

b)  $2, 4, 8, 16, \dots$

# Monotónnost posloupnosti



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  **je rostoucí, jestliže**  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  **je klesající, jestliže**  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

# Omezenost posloupnosti



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je omezená shora, jestliže

$$\exists K \in R, \forall n \in N : a_n \leq K$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je omezená zdola, jestliže

$$\exists L \in R, \forall n \in N : a_n \geq L$$

# Příklad:

Je dána posloupnost  $a_n = \frac{3n-1}{2n}$

Určete:

a)  $a_1 =$                        $a_2 =$                        $a_3 =$                        $a_{100} =$                        $a_{1000} =$

$a_{n+1} =$

b) monotónnost posloupnosti

# Příklad:



**SILESIA  
UNIVERSITY**  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

c)  $\max P =$  ,  $\min P =$  ,

$\sup P =$  ,  $\inf P$

d) Je posloupnost omezená?

# Limita posloupnosti – vlastní limita

a)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se blíží konečnému číslu  $A$ , zapisujeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

jedná se o **vlastní limitu**.

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je konvergentní.

# Limita posloupnosti – nevlastní limita

b)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se blíží nevlastnímu číslu  $\infty$ , resp.  $(-\infty)$

zapisujeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

jedná se o **nevlastní limitu**.

**Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je divergentní.**

# Limita posloupnosti neexistuje



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

- c) Posloupnost nemusí mít ani vlastní ani nevlastní limitu.

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je divergentní.

Např.  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$



# Definice vlastní limity posloupnosti



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim a_n = A \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

# Definice nevlastní limity posloupnosti



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim a_n = \infty \iff$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : a_n > M$$

$$\lim a_n = -\infty \iff$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : a_n < -M$$

# Výpočet limit – lomená funkce



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_r(n)}{Q_s(n)} = \begin{cases} \infty \text{ } (-\infty) & r > s \\ 0 & r < s \\ \textit{podíl} \dots & r = s \end{cases}$$

# Výpočet limity posloupnosti - příklady



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{5n^2 + 3n + 2} =$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5}{-4n^2 + 2} =$$

# Výpočet limity posloupnosti - příklady



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$3) \quad \lim \frac{5n^3 - 2n + 2}{4n - 1} =$$

$$4) \quad \lim \frac{5n^3 - 2}{1 - 4n} =$$

# Výpočet limity posloupnosti - příklady



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$5) \lim \frac{\sqrt{9n^2 - 2} + \sqrt{4n^2 + 1}}{7n + 3} =$$

$$6) \lim \frac{-5n^3}{2n - 1} =$$

# Výpočet limity posloupnosti - příklady



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$7) \quad \lim \frac{-5n^3 - 2}{4n} =$$

$$8) \quad \lim \frac{\sqrt{25n^2 - 2}}{7n + 3} =$$

# Výpočet limit s odmocninami



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 7n} - 2n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$



# Výpočet limit s odmocninami



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$$

$$4) \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$

# Výpočet limit „ $n$ v exponentu“



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim \left( -\frac{3}{7} \right)^n =$$

$$\lim \left( \frac{-7}{3} \right)^n =$$

# Výpočet limit „ $n$ v exponentu“



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim \frac{7^n - 11^n}{6^n} =$$

$$\lim \frac{6^n}{7^n - 11^n} =$$

# Výpočet limit „ $n$ v exponentu“



SILESIA  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim \frac{2.5^{n+2} - 3.2^{n-1}}{2^{n+3} + 3.5^{n-1}} =$$

$$\lim \frac{10^n + 8.3^{n+2}}{4.10^n - 6^{n+3}} =$$

# Limita vedoucí na Eulerovo číslo



**SILESIA  
UNIVERSITY**  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

# Limita vedoucí na Eulerovo číslo



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim \left( 1 - \frac{5}{3n+4} \right)^{3n+7} =$$

$$\lim \left( \frac{4n^2 + 3}{4n^2 - 1} \right)^{\frac{n^2}{3}} =$$

# Jiné limity:



$$\lim \left( \frac{8n-5}{4n+4} \right)^{2n+7} =$$

$$\lim \left( \frac{4n+4}{8n-5} \right)^{2n+7} =$$

# Opakování – domácí úkol



SILESIAN  
UNIVERSITY  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

a)  $\lim \frac{2n}{5n+8} =$

d)  $\lim \frac{2}{5n+8} =$

b)  $\lim \frac{8n^5+1}{2-7n+2n^6} =$

e)  $\lim \frac{4n^3+1}{2-7n+2n^3} =$

c)  $\lim (-2)^n =$

f)  $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n =$



# Závěr přednášky



**SILESIAN  
UNIVERSITY**  
SCHOOL OF BUSINESS  
ADMINISTRATION IN KARVINA

**Děkuji Vám za pozornost !!!**