Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Distanční studijní text

Radmila Krkošková

Karviná 2017

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Obor: Matematika, statistika.

Klíčová slova: matice, determinanty, posloupnost a její limita, funkce a její limita, diferenciální počet jedné reálné proměnné, kvalitativní znaky, kvantitativní znaky, binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení, normální rozdělení, exponenciální rozdělení, Chí-kvadrát test dobré shody, Chí-kvadrát test nezávislosti, regresní analýza.

Anotace: Publikace představuje studijní oporu základního vysokoškolského kurzu matematiky a statistiky pro bakalářské studium na vysoké škole ekonomického zaměření. Obsahově pokrývá základní témata: operace s maticemi, determinanty, posloupnosti, funkce, derivace funkce jedné reálné proměnné, kvalitativní a kvantitativní znaky, rozdělení pravděpodobnosti, testování hypotéz, regresní analýza. Součástí textu jsou řešené a neřešené příklady.

Autor: **Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**

Obsah

ÚVODEM

Tento text představuje studijní oporu pro studium kvantitativních metod studijních programů: Cestovní ruch a turismus, Finance a účetnictví v bakalářském studiu na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné. Tato studijní opora obsahuje vybrané kapitoly ze studijních opor Kvantitativní metody (Stoklasová, 2013) a Statistika (Ramík a Stoklasová, 2014).

Studijní opora je rozdělena do 8 kapitol. První polovina studijní opory je věnována základům matematiky, druhá část se zabývá základy statistiky. V první části se seznámíte s maticovým počtem, determinanty, zopakujete si pojem číselná posloupnost a naučíte se počítat její limitu. Znalosti o elementárních funkcích jistě máte ze střední školy a rozšíříte si je o znalosti transcendentních funkcí. Budete umět určit definiční obor funkce, znát grafy funkcí, vypočítat limitu funkce. Matematická část je ukončena diferenciálním počtem funkce jedné reálné proměnné, kde je důraz kladen na vyšetřování průběhu funkce (určení extrémů, inflexních bodů).

Druhá část studijní opory je věnována základům statistiky a statistických metod. Zde se požaduje znalost kombinatoriky a základů pravděpodobnosti. Postupně se seznámíte s rozdělením statistických znaků na kvalitativní a kvantitativní a s jejich charakteristikami polohy a variability. Další kapitola je věnována rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny. Jedná se o diskrétní rozdělení (stejnoměrné, binomické a Poissonovo) a spojité rozdělení (stejnoměrné, normální a exponenciální). Normální rozdělení je jedno nejdůležitější ve statistice. V předposlední kapitole jsou uvedeny testy hypotéz, jak parametrické, tak neparametrické. Z neparametrikých se zaměříme na mediánový test, test dobré shody a test nezávislosti. Poslední kapitola se zabývá studiem regresní analýzy. Zaměříme se na jednoduchou lineární regresní analýzu.

Každá kapitola začíná distančními prvky: rychlý náhle kapitoly, cíle kapitoly, čas potřebný ke studiu a klíčová slova kapitoly. Doporučuji tyto prvky bedlivě pročíst, hlavně cíle kapitoly, aby bylo zřejmé, co musíte znát a umět. Součástí každé kapitoly jsou řešené příklady, které doporučuji prostudovat. V závěru pak najdete shrnutí kapitoly a otázky, kde jsou příklady k procvičení.

Pokud zvládnete každou kapitolu aspoň v rozsahu řešených příkladů, tak získáte náhled, který vám umožní pochopit a osvojit si praktické zásady analýzy informací.

RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY

Tato studijní opora obsahuje vybrané kapitoly ze studijních opor Kvantitativní metody a Statistika.

První část studijní opory je věnována matematické oblasti. První kapitola je věnována lineární algebře. Jsou zde uvedeny základní vlastnosti matic a determinantů. Kapitola druhá rozšíří Vaše znalosti o číselných posloupnostech a jejich limitách. Důležitá je třetí kapitola, která je věnována funkcím jedné reálné proměnné. Jsou zde uvedeny grafy elementárních funkcí a jejich vlastnosti. Mezi jednu z nejdůležitějších patří 4. kapitola, která je věnována diferenciálnímu počtu funkce jedné reálné proměnné.

Další kapitoly pokrývají oblast statistiky. V 5. kapitole se seznámíte se statistickými znaky, jejich rozdělením, charakteristikami polohy a variability. Následující 6. kapitola je věnována náhodné veličině (diskrétní a spojité) a pravděpodobnostním modelům. Z diskrétních modelů jsou uvedeny: stejnoměrné rozdělení, binomické a Poissonovo rozdělení. Ze spojitých pravděpodobnostních modelů jsou uvedeny: stejnoměrné, normální a exponenciální rozdělení. Testováním hypotéz (parametrických i neparametrických) se zabývá kapitola 7. Z neparametrických testů se seznámíte s mediánovým testem, testem dobré shody a s testem nezávislosti. Poslední kapitola je věnována problematice regresní analýzy, kde důraz je kladen na lineární regresní model.

Jednotlivé poznatky jsou podrobně vysvětleny a dále aplikovány na řešených příkladech. Na konci každé kapitoly je sada několika úloh i s jejich výsledky.

1 MATICOVÝ POČET A DETERMINANTY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole zavedeme pojem matice reálných čísel a příslušné operace, které s maticemi běžně vykonáváme. Všechny tyto operace mají své přímé opodstatnění v reálné praxi. Pojem matice nám umožňuje výhodně zapsat komplikované systémy lineárních rovnic do tabulkové podoby. Druhá část této kapitoly se zabývá zavedením pojmu determinant matice, který je její základní číselnou charakteristikou. Existuje několik důvodů, které nás vedou k pojmu determinantu. Mezi nejdůležitější můžeme zařadit tyto: nalezení inverzní matice, charakteristika řešitelnosti systémů lineárních rovnic, některé aplikace využívající pojem vlastních čísel.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- základní operace s maticemi (sčítání, násobení)
- vypočítat transponovanou matici,
- řešit maticové rovnice,
- vypočítat determinant matice,
- použít Cramerovo pravidlo pro výpočet soustavy lineárních rovnic.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Matice, operace s maticemi, inverzní matice, determinant, Sarussovo pravidlo, Cramerovo pravidlo.

1.1 Operace s maticemi

Začněme příkladem matice typu (3,4). Takto zapíšeme typ matice, která má 3 řádky a 4 sloupce. Konkrétním příkladem může být například tato matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINICE 1

Df

Maticí typu (*m,n*) nazýváme množinu prvků a_{ik} uspořádaných do m řádků a n sloupců, tj. schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Stručněji zapisujeme: $A = (a_{ik})$, $i = 1, 2,...,m$, $k = 1, 2,...,n$.

Pro zápis matic se někdy používají ještě další 2 typy závorek:

$$A = \left\| a_{ik} \right\|, \qquad A = \left[a_{ik} \right].$$

První index „i“ se nazývá **řádkový index,** druhý index „k“ se nazývá **sloupcový index.** Prvky matice mohou být reálná čísla, komplexní čísla, funkce, operátory, vektory a také matice.

Hlavní diagonálu matice A tvoří prvky $a_{11}, a_{22},..., a_{pp}$,kde $p = \min \{m,n\}$, **vedlejší diagonálu** prvky a_{1n} , $a_{2\,n-1}$, $a_{3\,n-2}$,...

Matice lze podle tvaru rozdělit na **čtvercové** ($m = n$) a **obdélníkové** ($m \neq n$).

Matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice **stupně (řádu) *n***.

Bodová matice je matice typu (1,1).

Typy matic:

a. nulová matice *0*, jejíž prvky jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0, \forall i, \forall k$,

b. diagonální matice je čtvercová matice, jejíž prvky neležící v hlavní diagonále jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,

c. jednotková matice E je diagonální matice, jejíž prvky v hlavní diagonále jsou jedničky, tj. $a_{ik} = 1$ pro $i = k$, $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,

d. trojúhelníková matice je matice, která má pod (resp. nad. hlavní diagonálou samé nuly, tj. pro :

horní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i > k$,

dolní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i < k$,

e. symetrická matice je čtvercová matice , pro kterou platí $a_{ik} = a_{ki}$, $\forall i, \forall k$,

f. antisymetrická matice je čtvercová matice, pro kterou platí $a_{ik} = -a_{ki}$, $\forall i, \forall k$,

1.1.1 ROVNOST MATIC

Matice $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu (m, n) se sobě rovnají, mají-li na stejných místech stejné prvky: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ik} = b_{ik}\,,\ \forall i,\ \forall k.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Vypočtěte $a, b, c \in R$, jestliže platí:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & 3+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Z podmínek o rovnosti odpovídajících si prvků v obou maticích sestavíme soustavu 4 rovnic:

$$a = 2,$$

$$a + b = 5,$$

$$c = -2,$$

$$3 + b = 6.$$

Řešením dostaneme: $a = 2,\ b = 3,\ c = -2.$

1.1.2 SČÍTÁNÍ MATIC

Součtem matic $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu (m, n) rozumíme matici, jejíž prvky jsou součtem odpovídajících si prvků v maticích A a B, tj.

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}),\ \forall i,\ \forall k.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Vypočtěte $A + B$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$A+B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -8\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Vlastnosti sčítání matic:

$A + B = B + A$ (komutativní zákon)
$A + (B + C) = (A + B) + C$, (asociativní zákon)
$A + 0 = 0 + A = A$,
$A + (-A) = (-A) + A = 0$.

Všimněte si, že matice A, B musí být stejného typu, matice různých typů nelze sčítat! Dále 0 je nulová matice stejného typu jako matice A.

1.1.3 NÁSOBENÍ MATICE REÁLNÝM ČÍSLEM

Součinem čísla r a matice A typu (m,n) nazýváme matici $rA = (ra_{ik})$, $\forall i$, $\forall k$. Výsledná matice je téhož typu (m,n), přitom každý prvek původní matice vynásobíme číslem r.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Vypočtěte rA, je-li dáno $r = -2$, $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Řešení.

$$-2A=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Nechť $p, q \in R$ a A, B jsou matice téhož typu. Pro násobení matice číslem platí:

$$pA = Ap,$$
$$(-1)A = -A,$$
$$p(A + B) = pA + pB,$$
$$(p + q)A = pA + qA,$$
$$p(qA) = (pq)A,$$
$$1A = A.$$

1.1.4 NÁSOBENÍ MATICE MATICÍ

Součinem matice A typu (m,n) a matice B typu (n,p) v daném pořadí je matice $C = A.B$ typu (m,p), pro jejíž prvky c_{ik} platí: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$.

Uvědomte si, že podmínkou existence definovaného součinu AB je rovnost počtu sloupců matice A a počtu řádků matice B.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Vypočtěte AB, je-li dáno:

a. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$,

b. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$,

c. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix}$.

Řešení.

a. $$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.(-1)+1.2 & 2.3+1.(-4)\\ (-1).(-1)+3.2 & (-1).3+3.(-4)\\ 0.(-1)+(-2).2 & 0.3+(-2).(-4)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-2+2 & 6-4\\ 1+6 & -3-12\\ 0-4 & 0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & -15\\ -4 & 8\end{pmatrix}.$$

b. $$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\ -2+3\\ 0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Násobili jsme matice typu (3,2)(2,1) a výsledkem je matice typu (3,1).

c. Nelze násobit matice typu (3,2)(3,3), protože počet řádků první matice není roven počtu sloupců matice druhé. Součin BA je definován, neboť násobíme matice typu (3,3)(3,2) a výsledná matice bude typu (3,2).

Vlastnosti součinu matic:

$$EA = AE = A,$$
$$A\,(BC) = (AB)C,$$
$$A0 = 0A = 0,$$
$$p\,(AB) = (pA)\,B = A\,(pB),$$
$$A\,(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Komutativní zákon obecně pro součin matic neplatí! Pokud dvě matice tento zákon splňují, tj. platí pro ně rovnost $AB = BA$, pak se nazývají **záměnné**. Například každá diagonální matice řádu n je záměnná s každou diagonální maticí téhož řádu.

1.2 Transponovaná matice

Transponovaná matice z matice A typu (m,n) je matice A^T typu (n,m), která vznikne z matice A vzájemnou výměnou řádků a sloupců ve stejném pořadí (tj. překlopením prvků matice kolem hlavní diagonály). Označujeme ji A^T.

Pro operace s transponovanou maticí platí:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(pA)^T = pA^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

Řešení.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Vypočtěte matici $C = (-3)A^T + 2B^T$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Nejprve vypočítáme matice transponované a pak dosadíme do požadované rovnosti.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = (-3)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -10 & -11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Hodnost matice

Na řádky a sloupce matice se můžete dívat jako na řádkové a sloupcové vektory. Lineární závislost a nezávislost řádků (sloupců) matice se pak definuje analogicky jako u vektorů.

Df

DEFINICE 2

Hodnost $\boldsymbol{h(A)}$ matice A je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A. Hodnost nulové matice $\boldsymbol{0}$ je nula. Hodnost matice je také možné definovat jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice. Obě definice jsou ekvivalentní.

Hodnost matice se nezmění, jestliže v matici provedeme tzv. **řádkové elementární úpravy**:

1. vyměníme dva řádky matice,
2. násobíme řádek matice nenulovým číslem,
3. přičteme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků,
4. vynecháme -li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Aniž by se změnila hodnost matice lze stejné úpravy provádět i se sloupci matice, neboť platí: $h(A) = h(A^T)$.

Určování hodnosti matice

Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici A na horní (resp. dolní) trojúhelníkovou matici B, která má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové. Hodnost $h(A)$ matice A je pak rovna počtu řádků trojúhelníkové matice B.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení.

Hodnost matice zjišťujeme zpravidla tak, že danou matici převedeme řádkovými úpravami uvedenými výše na matici, která má v diagonále vesměs nenulové prvky a pod diagonálou samé nuly. Hodnost matice je pak rovna počtu řádků.

Postupujeme tedy takto: vzájemnou výměnou prvního a posledního sloupce a potom prvního a druhého řádku dostaneme nejprve matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ a potom matici } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

V další úpravě se snažíme pod prvkem $a_{11} \neq 0$ dostat samé nuly. Toho dosáhneme, když ke třetímu řádku přičteme první:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro snazší výpočet bude jednodušší, když budeme mít $a_{22} = 1$. Vyměníme druhý a třetí sloupec:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při dalších úpravách se opět snažíme, aby prvky pod a_{22} byly rovny nule, proto ke třetímu řádku přičteme druhý řádek vynásobený číslem (-3) a ke čtvrtému řádku druhý řádek vynásobený číslem (-4). Dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Prvek $a_{33} \neq 0$. Snažíme se, aby prvek pod prvkem a_{33} byl roven nule. Toho dosáhneme tak, že ke čtvrtému řádku přičteme třetí řádek násobený číslem (-2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Upravili jsme původní matici na matici horní trojúhelníkovou. Hodnost matice trojúhelníkové i hodnost původní matice je $h = 4$ (počet nenulových řádků).

DEFINICE 3

Čtvercová matice A typu n se nazývá **regulární,** jestliže její hodnost je rovna počtu řádků (sloupců), tj. $h(A) = n$. Čtvercová matice, která není regulární se nazývá **singulární**. O regulárnosti či singulárnosti hovoříme pouze u čtvercových matic.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Zjistěte, zda vektory $\boldsymbol{u} = (1,-2,5)$, $\boldsymbol{v} = (3,-1,2)$, $\boldsymbol{w} = (2,-9,23)$ jsou lineárně závislé.

Řešení.
Dané vektory napíšeme jako řádky matice a vypočítáme její hodnost. Bude-li rovna počtu daných vektorů, jsou vektory lineárně nezávislé, bude-li tomu naopak jsou vektory lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$

$h = 2 \quad \Rightarrow \quad$ vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou lineárně závislé.

1.4 Inverzní matice

V této kapitole začneme jednoduchým příkladem, na kterém budeme definovat pojem inverzní matice. Najděte matici, která bude vyhovovat následující rovnosti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobíme matice na levé straně rovnosti a dostáváme:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a+2c &= 1 \\ b+2d &= 0 \\ 3a+4c &= 0 \\ 3b+4d &= 1 \end{aligned}$$

Řešením je soustavy je $a = -2$, $b = 1$, $c = 1{,}5$, $d = -0{,}5$.

Hledaná matice je tvaru $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Tuto matici pak nazveme inverzní maticí k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

DEFINICE 4

Inverzní maticí k regulární matici A řádu n nazveme matici A^{-1}, pro kterou platí:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

kde E je jednotková matice řádu n.
Ke každé regulární matici existuje právě jedna matice inverzní.

Vlastnosti inverzních matic:

$$E^{-1} = E,$$
$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Výpočet inverzní matice se provádí pomocí elementárních řádkových transformací.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Určete k dané matici A inverzní matici A^{-1}, je-li:

a. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$, **b.** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Řešení.

Každou matici A řádu n lze jen řádkovými (resp. jen sloupcovými) úpravami převést na jednotkovou matici E. Jestliže se stejných úprav použije na řádky (resp. sloupce) jednotkové matice E téhož řádu, pak z této jednotkové matice obdržíme inverzní matici A^{-1}. Výchozí matice je tvaru (A, E).

a. V následujícím schématu upravujeme matici A tak, abychom na pozicích prvků a_{21}, a_{12} dostali nulové prvky a v hlavní diagonále jedničky.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Následující čtyři úpravy vedou k výpočtu matice A^{-1}:

1. k (-3)násobku 2. řádku přičteme (2)násobek 1. řádku,

2. k (-17)násobku 1.řádku přičteme 1.řádek,

3. 1.řádek dělíme číslem (-3),

4. oba řádky dělíme číslem 17.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right). \approx \left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}-51 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cc|cc}17 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & -\frac{3}{17}\end{array}\right)=\left(E,A^{-1}\right).$$

Inverzní matice: $A^{-1}=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$

b. Opět se budeme snažit získat nulové prvky na pozicích $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{23}, a_{13}, a_{12}$. Přesně v tomto pořadí. Postupujeme následovně:

1. k (2)násobku 2. řádku přičteme 1. řádek, k (2)násobku 3. ádku přičteme (-3)násobek 1. řádku,

2. k 3. řádku přičteme (-1)násobek 2. řádku,

3. k (-6)násobku 2. řádku přičteme 3. řádek, k (2)násobku 1. řádku přičteme 3. řádek,

4. k (3)násobku 1. řádku přičteme 2. řádek,

5. 1. řádek dělíme číslem (12), 2. řádek číslem (6), 3. řádek číslem (-6).

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -3 & 0 & 2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & -16 & -20 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{12} & -\frac{20}{12} & \frac{8}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{6} & -\frac{14}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{array}\right)=\left(E,A^{-1}\right)$$

Po zkrácení zlomků a vytknutí $\frac{1}{3}$ dostaneme $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -5 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Výsledek ověříme vypočtením součinu $AA^{-1} = E$.

1.5 Maticové rovnice

Maticová rovnice je rovnice, kde neznámá je matice. Při řešení maticových rovnic používáme maticové operace součtu a součinu a nesmíme zapomenout, že pro součin matic obecně neplatí komutativní zákon. To mimo jiné znamená, že při úpravách rovnic (pokud násobíme rovnici libovolnou maticí), je nutné obě strany rovnice násobit danou maticí současně buď zleva nebo zprava.

Připomínáme dva důležité vztahy, které budeme při řešení maticových rovnic používat:

1. pro regulární matici D platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E$,

2. pro matici X platí: $XE = EX = X$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Řešte maticové rovnice:

a) $AX = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XA = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení.

a) Z maticové rovnice vyjádříme matici X tak, že rovnici násobíme maticí A^{-1} zleva:

$$AX = B \quad /.A^{-1}$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Z maticové rovnice vyjádříme matici X tak, že rovnici násobíme maticí A^{-1} zprava:

$$XA = B \quad /.A^{-1}$$
$$X.A.A^{-1} = B.A^{-1}$$
$$X = B.A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Řešte maticové rovnice:

a. $AX + B^T X = 2D^T + CX$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b. $XA^T = 2C + XB^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Řešení.

a. Nejprve vyjádříme z maticové rovnice neznámou matici X:

$$AX + B^T X = 2D^T + CX,$$
$$AX + B^T X - CX = 2D^T,$$
$$(A + B^T - C)X = 2D^T.$$

Označme matici $A + B^T - C = F$ a dostáváme:

$FX = 2D^T$, (násobíme maticovou rovnici zleva maticí F^{-1})
$F^{-1}FX = 2F^{-1}D^T$,
$X = 2F^{-1}D^T$.

Vypočteme matici $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Vypočteme matici $F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Dosadíme do rovnosti $X = 2F^{-1}D^T$ a dostáváme:

$$X = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b. Řešíme stejným způsobem uvedeným výše:
$XA^T = 2C + XB^T$,
$XA^T - XB^T = 2C$,
$X\left(A^T - B^T\right) = 2C$.

Označme matici $A^T - B^T = F$ a dostáváme:

$XF = 2C$, (násobíme maticovu rovici zprava maticí F^{-1})
$XFF^{-1} = 2CF^{-1}$,
$X = 2CF^{-1}$.

Vypočteme matici $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Vypočteme matici $F^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Dosadíme do rovnosti $X = 2CF^{-1}$ a dostáváme:

$$X = 2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -50 & -14 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}.$$

1.6 Determinant matice

Každé čtvercové matici je přiřazeno číslo, které nazýváme determinantem matice. Pokud matice není čtvercová, tak determinant definován není. Pro determinant užíváme tato označení:

$$\det A = \det\left(a_{ij}\right) = |A| = \left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Df

DEFINICE 5

Čtvercovou matici A nazýváme regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
Čtvercovou matici B nazýváme singulární $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$.

Df

DEFINICE 6

Výpočet determinantu druhého řádu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinant se rovná rozdílu součinu prvků hlavní diagonály a součinu prvků vedlejší diagonály.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$.

***Řešení*.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3.(-2) - 1.(-5) = -1.$

DEFINICE 7

Výpočet determinantu třetího řádu (Sarussovo pravidlo):

det*A*=

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 13

Vypočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Řešení.

Řešíme Sarussovým pravidlem – připíšeme první dva sloupce:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix} =$$

$$= 1.1.(-3) + 2.1.(-2) + (-4).3.3 - [(-4).1.(-2) + 1.1.3 + 2.3.(-3)] = -36.$$

1.6.1 VLASTNOSTI DETERMINANTU

1. Determinant matice *A* se rovná determinantu transponované matice A^T.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 7 & 6 & 3 \\ 13 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva řádky (resp. dva sloupce), změní determinant matice znaménko.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 13 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

3. Společného nenulového činitele k všech prvků jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

Platí: $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Obráceně: $$5\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 35 & 13 \\ 4 & 30 & 9 \\ 16 & 15 & 8 \end{vmatrix}.$$

4. Determinant matice se rovná nule, jestliže:

a. všechny prvky aspoň jednoho řádku(resp.jednoho sloupce) jsou rovny nule,

b. jeden řádek (resp. sloupec. matice je lineární kombinací řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

Platí: $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 32 & 53 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí řádek je součtem dvojnásobku prvního řádku a trojnásobku druhého řádku.

5. Jestliže k některému řádku (resp. sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (resp. sloupců), potom determinant nové matice je stejný, jako determinant původní matice.

6. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, platí: det (AB) = det$A$. det B.

Platí: $$\begin{vmatrix} 14 & -9 & 7 \\ 10 & -1 & 2 \\ 12 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Df

DEFINICE 8

Doplněk prvku a_{ij}

Ve čtvercové matici A vypustíme i-tý řádek a j-tý sloupec. Obdržíme tak matici typu $(n-1, n-1)$. Její determinant označíme A_{ij}^* a nazveme **subdeterminantem** prvku a_{ij} v matici $\boldsymbol{A}$. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$ nazýváme **doplňkem** prvku a_{ij} v matici A.

Zapamatujte si, že doplněk (daného prvku) je subdeterminantem (tohoto prvku) opatřený vhodným znaménkem.

Ve schématu $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ je naznačena symbolem +, resp. symbolem $-$ „poloha“ prvků, jejichž subdeterminant a doplněk se sobě rovnají, resp. liší se znaménkem.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 14

Určete v matici $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ doplněk prvku a_{23} a prvku a_{31}.

Řešení.

Nejprve vypočteme příslušné subdeterminanty, které pak dosadíme do vztahu

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^* .$$

$$A_{23}^* = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \quad \Rightarrow \quad A_{23} = (-1)^{2+3}(-10) = 10,$$

$$A_{31}^* = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15 \quad \Rightarrow \quad A_{31} = (-1)^{3+1}15 = 15.$$

DEFINICE 9

Výpočet determinantu řádu $n \geq 3$ (rozvoj determinantu podle prvků určitého řádku resp. sloupce):

Vztah pro rozvoj determinantu podle prvků i-tého řádku :

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Vztah pro rozvoj determinantu podle j-tého sloupce:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Pomocí uvedených vztahů počítáme především determinanty řádu $n > 3$, protože pro výpočet determinantů řádu $n = 3$ používáme Sarrusovo pravidlo. V následujícím příkladě vypočteme determinant rozvojem.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 15

Vypočítejte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ rozvojem podle třetího řádku.

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 + 12 + 0 = 6.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 16

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix}$.

Řešení.

$$\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 17

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Řešení.

Řešíme Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2.(-2).(-1) + 1.5.1 + 3.2.2 - [3.(-2).1 + 2.5.2 + 1.2.(-1)] = 9.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 18

Určete parametr $k \in \boldsymbol{R}$ tak, aby:

a. matice A byla regulární,

b. matice B byla singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení.

a. Matice A je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Řešíme proto následující rovnici, kde determinant vypočteme Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

Matice A je regulární pro $k \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

b. Matice B je singulární $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$. Řešíme rovnici:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-4)(k+5) = 0.$$

Matice B je singulární pro $k \in \{-5, 4\}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 19

Řešte nerovnici: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} \geq 0.$

Řešení.

Sarrusovým pravidle vypočteme daný determinant:

$$\begin{aligned} (2-x)(3+x)+1+1-[(2-x)+1+(3+x)] &\geq 0 \\ -x^2 - x + 2 &\geq 0 \\ x^2 + x - 2 &\leq 0 \\ (x+2)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

\+ – +

-2 1

Řešení nerovnice je $x \in \langle -2, 1 \rangle$.

1.6.2 CRAMEROVO PRAVIDLO

Pomocí Cramerova pravidla můžeme řešit soustavu lineárních rovnic, je-li matice soustavy regulární. Pro numerické výpočty není Cramerovo pravidlo výhodné, protože výpočet determinantů je pracný. Výhodou Cramerova pravidla je explicitní vyjádření řešení, což v mnoha úvahách v matematice i v aplikacích je důležité.

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}
$$

Nechť matice A této soustavy je regulární (tj. $\det A \neq 0$). Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{pro všechna} \quad i \in \{1,2,\ldots,n\},$$

kde B_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i-tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny. Tento postup ilustrují následující příklady.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 20

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= 5\\
-x + 2y &= -3
\end{aligned}.
$$

Řešení.

Nejprve vypočteme příslušné determinanty a pak jejich hodnoty dosadíme do příslušných vztahů.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1, \qquad \det B_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1.$$

Na základě Cramerova pravidla dostáváme:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{1}{1} = 1, \qquad y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-1}{1} = -1.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 21

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12. \end{aligned}$$

Řešení.

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6, \qquad \det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12, \qquad \det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{18}{6} = 3, \qquad y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-12}{6} = -2, \qquad z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{6}{6} = 1.$$

SHRNUTÍ KAPITOLY

Tato kapitola byla věnována základům lineární algebry. Konkrétně maticovému počtu a determinantu matice. V této kapitole jste se naučili základní operace s maticemi jako je sčítání matic, násobení matice reálným číslem, násobení matice maticí. Byl zde také zaveden pojem transponovaná a inverzní matice. Pomocí inverzní matice se počítají maticové rovnice a dá se tím také definovat regularita matice. V této kapitola byla regularita matice definována pomocí determinantu matice. V závěru kapitoly bylo představeno Cramerovo pravidlo, pomocí kterého se dají řešit určité typy soustav lineárních rovnic.

OTÁZKY

1.1 Řešte příklady k maticovému počtu.

1) Jsou dány matice:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&0\\1&4\\-7&5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1\\4&6\\-7&3\end{pmatrix}.$$

Určete matice:

a. $3A$, **b.** $A+B$, **c.** $A-C$, **d.** $2C-5A$,

2) Jsou dány matice:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}.$$

Určete matice:

a. $A-2B$ **b.** $3A-C$ **c.** $A+B+C$

3) Najděte matici D třetího řádu tak, aby platilo $A+B+C+D=0$. Matice A, B, C jsou matice z příkladu 2.

4) Vypočtěte součiny AB a BA, kde A a B jsou následující matice:

a. $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-2\\5&6\end{pmatrix}$,

b. $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&-1&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&-2\\0&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\0&5\end{pmatrix}$.

5) Vypočtěte následující součiny matic:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

c. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, **d.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

6) Jsou dány matice A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete matice D, F, G, jestliže platí:

$$D = (A+B)C, \qquad F = A^T - B, \qquad G = A^T B.$$

7) Zjistěte, pro která $x, y \in R$ platí:

a. $\begin{pmatrix} 3x+2y & 5 \\ -1 & 4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+11 & 5 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2y & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y-1 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & y+8 \end{pmatrix}$.

8) Určete $x, y \in R$ tak, aby matice B byla transponovanou maticí k matici A :

a. $A = \begin{pmatrix} 2x+y & 3 \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & x-3y \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.

9) Určete hodnost matic:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 5 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

10) Určete inverzní matici A^{-1} k matici A:

a. $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -5 & 2\end{pmatrix}$, **b.** $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, **c.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$,

d. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$, **e.** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

11) Z následující maticové rovnice vyjádřete neznámou matici X (A, B, C jsou dané matice vhodného typu, tj. takové, aby následující operace byly definovány) a uveďte, pro které matice A, B, C se dá matice X z této rovnice osamostatnit:

a. $AX-C=2X+BA$,

b. $C+XA=BA$,

c. $BX=BXA+3C$,

d. $XA-3X=XC+B$.

12) Řešte maticové rovnice:

a. $X\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, **b.** $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}$,

1.2 Vypočtěte úlohy k procvičení výpočtu determinantů.

1) Vypočtěte determinanty druhého řádu.

a. $\begin{vmatrix}3 & -8\\ 2 & 4\end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix}-5 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\sqrt{2}\\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2}\end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix}3 & -8\\ -6 & 16\end{vmatrix}$.

2) Vypočtěte Sarussovým pravidlem determinanty třetího řádu.

a. $\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & -5 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -2\\ 14 & 6 & 2\end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 0\\ 4 & 3 & 8\end{vmatrix}$.

3) Vypočtěte determinanty rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce.

a. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix}$,

c. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

e. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, **f.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4) Řešte následující rovnice a nerovnice.

a. $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0$, **b.** $\begin{vmatrix} a+x & x \\ -x & x-a \end{vmatrix} = a^2$,

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} > 0$, **d.** $\begin{vmatrix} x & 3 & 2x \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} < 0$,

e. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & x+2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} > 0$, **f.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

5) Upravte a vypočtěte determinanty.

a. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

6) Pro která $a \in R$ je determinant D roven nule?

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -a^2 \\ 2 & \frac{a}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

7) Pro která $a \in R$ je determinant D záporný ?

$$D = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

8) Určete parametry v daných maticích tak, aby matice A, C byly singulární a matice B, D byly regulární. Matice jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+b & 6 \\ 6-b & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ d^2 & 2d & 1 \\ 2d & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9) Cramerovým pravidlem řešte soustavy lineárních rovnic:

a. $$\begin{aligned} 4x+y-z&=2 \\ -y+z&=-10 \\ 2x+3y-2z&=24, \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} -2x+2y-z&=-3 \\ y+3z&=-4 \\ 4x-y+2z&=3, \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} -2x+y+3z&=1 \\ 3x+2y+3z&=-2 \\ -x+3y-z&=8. \end{aligned}$$

ODPOVĚDI

1.1 Řešení příkladů (matice)

1) **a.** $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -2 & -13 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$

2) **a.** $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \\ 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -9 & -5 & -10 \\ -7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

4) **a.** $AB = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$

b. $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -12 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

c. AB nedefinováno, $BA = \begin{pmatrix} 9 & 19 \\ 2 & 6 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$

5) **a.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & 14 & 11 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -30 \\ 17 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7) **a.** $x = 1,\ y = 2$ **b.** $x = 2,\ y = 3$

8) **a.** $x = 1,\ y = -2$ **b.** $x = 3,\ y = -2$

9) $h(A) = 3,\quad h(B) = 2,\quad h(C) = 2$

10) **a.** $A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ **d.** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

e. A^{-1} neexistuje (A je singulární)

11) **a.** $X = (A-2E)^{-1}(BA+C)$, je-li matice $A-2E$ regulární

b. $X = (BA-C)A^{-1}$, je-li matice A regulární

c. $X = 3B^{-1}C(E-A)^{-1}$, jsou-li matice B, $E-A$ regulární

d. $X = B(A-3E-C)^{-1}$, je-li matice $A-3E-C$ regulární

12) **a.** $X = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

1.2 Řešení příkladů (determinanty)

1) **a.** 28 **b.** –7 **c.** 2 **d.** 0

2) **a.** – 43 **b**. 0 **c.** 16 **d.** 40

3) **a.** – 42 **b.** $-2x^2$ **c.** – 24 **d.** 0 **e.** 5 **f.** – 60

4) **a.** $x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$ **b.** $x = \pm a$ **c.** $x \in (-2,1)$ **d.** $x \in (3,\infty)$
e. $x \in (-4,\infty)$ **f.** $x \in \{-1,3\}$

5) **a.** $a^4 - 2a^3$ **b.** 10

6) $a \in \{-2,0,2\}$

7) $a \in (2, 17)$

8) $a \in \{-13, 2\}$, $b \in R - \{-12,3\}$, $c = 0$, $d \in R - \left\{-\frac{1}{3},1\right\}$

9) **a.** $(-2,8,-2)$ **b.** $(1,-1,-1)$ **c.** $(-1,2,-1)$

2 POSLOUPNOST A LIMITA POSLOUPNOSTI

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole se budeme zabývat posloupnostmi. Jedná se o speciální případ funkcí, jejichž definičním oborem je množina přirozených čísel. Jsou zde uvedeny vlastnosti posloupností, jako je monotonie a omezenost. Dále se tato kapitola věnuje pojmu limita posloupnosti a hlavně výpočtu limity posloupnosti. V ekonomických aplikacích se vyskytují zejména dvě posloupnosti, a to posloupnost aritmetická a geometrická. Tyto posloupnosti jsou známy již ze střední školy.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojmy posloupnost a limita posloupnosti,
- vypsat prvky posloupnosti,
- sestrojit graf posloupnosti,
- vypočítat limitu posloupnosti.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Posloupnost, limita posloupnosti, monotónnost posloupnosti, omezenost posloupnosti, graf posloupnosti.

2.1 Posloupnost

Df

DEFINICE 1

Nekonečnou číselnou posloupností prvků číselné množiny je funkce, která každému přirozenému číslu *n* přiřazuje reálné číslo.

Jelikož je to funkce, má funkční předpis, definiční obor (je to množina přirozených čísel *N*), obor funkčních hodnot (je to množina reálných čísel), graf (je to množina izolovaných bodů v rovině).

V matematice se setkáváme také s posloupnostmi, jejichž prvky nejsou čísla, např. s posloupnostmi bodů, úseček, funkcí a podobně. V této kapitole se budeme zabývat pouze číselnými posloupnostmi, a proto přívlastek číselná u posloupnosti vynecháme.

Posloupnost můžeme zapsat například tak, že postupně za sebou píšeme prvky $a_1, a_2, a_3, ...$, které tato funkce přiřazuje číslům 1, 2, 3 ..., nebo použitím zápisu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme používat jednoduššího zápisu $\{a_n\}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Napište první čtyři členy a a_{n+1} člen posloupnosti $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
n &= 1 & &\Rightarrow & a_1 &= -1, \\
n &= 2 & &\Rightarrow & a_2 &= \frac{1}{2}, \\
n &= 3 & &\Rightarrow & a_3 &= -\frac{1}{3}, \\
n &= 4 & &\Rightarrow & a_4 &= \frac{1}{4}, \\
n &= n+1 & &\Rightarrow & a_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Zadání posloupnosti:

a. vzorcem vyjadřujícím *n*-tý člen posloupnosti a_n.

Například: Vzorcem $a_n = \dfrac{1}{n+2}$ je daná posloupnost, jejíž *n*-tý člen je a_n pro každé $n \in N$.

$$a_1 = \frac{1}{3},\quad a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{5},\quad \text{atd.}$$

b. rekurentně zadáním prvních *n* členů posloupnosti a rekurentního vzorce, který vyjadřuje (*n*+*k*)-tý člen posloupnosti pomocí předchozích *k* členů. To znamená, že při rekurentním zadání kromě vzorce musí být uvedeno i prvních *k* členů posloupnosti.

Vzorcem $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}, a_1 = 0, a_2 = 1$ je daná posloupnost

$$\begin{aligned}
&a_1 = 0,\\
&a_2 = 1,\\
&a_3 = a_{1+2} = a_1 + 2a_{1+1} = 0 + 2\cdot 1 = 2,\\
&a_4 = a_{2+2} = a_2 + 2a_{2+1} = 1 + 2\cdot 2 = 5,\\
&a_5 = a_{3+2} = a_3 + 2a_{3+1} = 2 + 2\cdot 5 = 12,\\
&a_6 = a_{4+2} = a_4 + 2a_{4+1} = 5 + 2\cdot 12 = 29,\\
&\text{atd.}
\end{aligned}$$

c. graficky, grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $\mathrm{A}_n(n, a_n)$.

DEFINICE 2

Df

Aritmetická posloupnost přiřazuje číslu *n* hodnotu a_n lineární funkcí. Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference** aritmetické posloupnosti a značíme ho *d*. Platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Součet prvních *n* členů je dán vzorcem: $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Je to **součet konečné** aritmetické posloupnosti.

Součet nekonečné aritmetické posloupnosti je vždy roven ∞, resp. $-\infty$, v závislosti na znaménku diference $d \neq 0$. Pro $d = 0$ v závislosti na znaménku a_1.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

Řešení.

Čísla 1, 2, 3, ..., 1000 tvoří konečnou aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 1$, prvním členem $a_1 = 1$, počet členů této posloupnosti je $n = 1000$.

Součet prvních 1000 členů je $s_{1000} = \dfrac{1000}{2}(1 + 1000) = 500500$.

Df

DEFINICE 3

Geometrická posloupnost přiřazuje číslu n hodnotu a_n exponenciální funkcí. U geometrické posloupnosti je konstantní poměr mezi libovolným členem a_n $(n \geq 2)$ a předcházejícím členem a_{n-1}. Tuto konstantu značíme q, číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti. Platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Jestliže kvocient $q \neq 1$, potom pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí: $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Jedná se o **součet konečné** geometrické posloupnosti.

Jestliže $|q| < 1$, lze **sečíst i nekonečnou** geometrickou posloupnost.

Pro součet s v tomto případě platí: $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

2.2 Limita posloupnosti

Df

DEFINICE 4 – VLASTNÍ LIMITA NEKONEČNÉ POSLOUPNOSTI

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu A, když k libovolnému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost

$$|a_n - A| < \varepsilon .$$

Píšeme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, užíváme při tom zkratky latinského slova *limes*.

Posloupnost, která má tu vlastnost, že se její členy, počínaje některým, libovolně málo liší od čísla A, má v tomto čísle svou mezní hodnotu.
Když je limita nekonečné posloupnosti vlastní, pak říkáme, že posloupnost je **konvergentní**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Na základě definice vlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$.

Řešení.
K libovolnému $\varepsilon > 0$ musíme určit číslo n_0 tak, aby pro každé $n > n_0$ platila nerovnost

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon .$$

Provedeme následující úpravy: $\left|\frac{n}{n+2}-1\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$

Číslo n_0 určíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí

$$\frac{2}{n+2} < \varepsilon \quad \text{neboli} \quad n \geq \frac{2}{\varepsilon} - 2 \quad .$$

Pro $\varepsilon = 0{,}01$ je hledané číslo $n_0 = 18$,

pro $\varepsilon = 0{,}0001$ je $n_0 = \frac{2}{0{,}0001} - 2 = 19999$ atd.

DEFINICE 5 – NEVLASTNÍ LIMITA NEKONEČNÉ POSLOUPNOSTI

Df

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ („plus" nekonečno, označuje se také $+\infty$), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost $a_n > M$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (mínus nekonečno), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé přirozené číslo $n > n_0$ je splněná nerovnost $a_n < -M$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud je limita nekonečné posloupnosti nevlastní nebo limita neexistuje, pak říkáme, že posloupnost je **divergentní**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Na základě definice nevlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Řešení.

K libovolnému reálnému číslu M musíme určit $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $n^2 > M$. Z této nerovnosti určíme číslo n_0 .

Dostáváme $n > \sqrt{M}$; n_0 stanovíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí $n_0 > M$. Např. Pro $M = 10^2$ hledané číslo n_0 je $n_0 = \sqrt{10^2} = 10$.

Df

DEFINICE 6

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **ohraničená** (též omezená), je-li ohraničená shora i zdola.
Shora je ohraničená tehdy, když existuje číslo *k* takové, že pro každé *n* platí $a_n \le k$.
Zdola je ohraničená tehdy, když existuje číslo *m* takové, že pro každé přirozené *n* platí $a_n \ge m$.

Df

DEFINICE 7

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, resp. rostoucí, jestliže

$a_m \le a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m < a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, resp. klesající, jestliže

$a_m \ge a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m > a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.

Jestliže je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buďto neklesající, rostoucí, nerostoucí nebo klesající, říkáme, že je **monotónní**.

Pro monotónní posloupnosti platí:

1. Monotónní posloupnost má vždy limitu (vlastní nebo nevlastní).
2. Limita neklesající nebo rostoucí posloupnosti je rovna supremu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = \sup\{a_n; n \in N\}$.
3. Limita nerostoucí nebo klesající posloupnosti je rovna infimu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = \inf\{a_n; n \in N\}$.

Výpočet limit posloupností

K výpočtu limit posloupností využijeme znalosti limit jednoduchých základních posloupností, základních vět o limitách a znalosti operací s prvky v *R**, zejména s ∞ a $-\infty$.

Následující soubor 12 pravidel představuje matematické věty, které lze odvodit přímo z definice limity. Pečlivě si je projděte a dobře si je zapamatujte! Budou se vám později hodit k výpočtům příkladů limit.

Pravidla pro výpočet vlastních limit

Pro vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ q > 0,\ n \in N,\ k \in R$ platí:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0,$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[l]{a_n} = \sqrt[l]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\ ,\ l \in N$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|,$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1,$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} q^{a_n} = q^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n},$

8. je-li $a_n > 0, c > 0, c \neq 1,$ pak $\lim\limits_{n\to\infty} \log_c a_n = \log_c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

10. existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k$,

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e,$

($e \cong 2,718$ je Eulerovo číslo, základ přirozených logaritmů),

12. je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, resp. $-\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$.

Pravidla pro výpočet nevlastních limit

Dále se budeme zabývat limitou součtu (součinu a podílu) dvou posloupností, přičemž alespoň jedna nebo obě mají nevlastní limitu.

Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $a \in R$. Platí tato tvrzení:

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$.
Symbolicky lze toto tvrzení zapsat takto: „$a \pm \infty = \pm\infty$“.

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Symbolicky: „$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$“.

3. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, pokud $a < 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

Symbolicky: „$a \cdot \infty = \infty$ pro $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ pro $a < 0$“.

4. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot \infty = \infty$“

5. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
Symbolicky: „$\infty + \infty = \infty$“

6. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$“

7. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.
Symbolicky: „$-\infty - \infty = -\infty$“

8. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$“

Neurčité výrazy

Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ 0 \cdot (\pm\infty), 0^0, (\pm\infty)^0, \ 1^{\pm\infty}$.

Jestliže při výpočtu limit po dosazení limitní meze zjistíme, že limita je neurčitý výraz musíme tento výraz vhodným matematickým obratem (dělením nebo rozšířením) převést na „určitý“ výraz, tj. výraz, jehož limitu známe.

V následujících dvou příkladech vysvětlíme výpočet limit posloupností, ve kterých a_n je podílem mnohočlenů (*racionálním lomeným výrazem*).

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{3 + 7n - 6n^2}$.

Řešení.

Limita je neurčitý výraz $\dfrac{\infty}{-\infty}$. Neboť $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2 - 3n + 5) = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 7n - 6n^2) = -\infty$. Výraz pro n-tý člen posloupnosti upravíme tak, že čitatele i jmenovatele dělíme největší mocninou n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+\frac{7n}{n^2}-\frac{6n^2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}.$$

Uvědomte si, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}=0.$

Uvedeným způsobem můžeme postupovat vždy v případě výpočtu limity posloupnosti, jejíž *n*-tý člen má tvar racionálního lomeného výrazu obsahujícího proměnnou *n*, tj. v čitateli i ve jmenovateli se nacházejí mnohočleny. Následující věta nám dává návod na velmi rychlé a elegantní řešení.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Jestliže $a_n=\frac{P_m(n)}{Q_r(n)}$, kde m je stupeň mnohočlenu v čitateli, r je stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, potom:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_r(n)}=\begin{cases}\infty & \text{pro } m>r\\ 0 & \text{pro } m<r\\ \text{podíl koeficientů} & \\ \text{při nejvyšších} & \text{pro } m=r\\ \text{mocninách } n & \end{cases}$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Vypočtěte

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2}{n^5+4n^3-2n^2}$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{n-3}$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n^2+4n-8}{5n^3+7n^2-2n+2}$.

Řešení.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_3(n)}{Q_5(n)}=0$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je menší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená $\text{st}\,P_3(n)<\text{st}\,Q_5(n)$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_2(n)}{Q_1(n)} = \infty$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je větší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená $\operatorname{st} P_2(n) > \operatorname{st} Q_1(n)$.

c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_3(n)}{Q_3(n)} = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{st} P_3(n) = \operatorname{st} Q_3(n)$, koeficient u n^3 v čitateli je 2, ve jmenovateli je 5.

Limity algebraických výrazů závisejí na členu, který nejrychleji roste pro rostoucí n a na operaci s tímto členem prováděné. Pamatujte si, že ze známých funkcí nejpomaleji roste funkce logaritmus $\log n$ (argument je n), potom následuje mocnina $n^a, (a>0)$, rychleji roste exponenciální funkce $a^n, (a>1)$, ještě rychlejší je faktoriál $n!$ a nejrychlejší je n^n. Seřazeny vzestupně podle rychlosti růstu (od nejmenšího k největšímu) mohou být takto:

$$\log n, \ldots, \sqrt[4]{n}, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, \ldots, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots, (n\text{-}1)!, n!, (n+1)!, \ldots, n^n.$$

V následujících příkladech vysvětlíme výpočet limit posloupností, ve kterých a_n je iracionálním výrazem a zároveň se jedna o limitní typ „$\infty - \infty$“ Výraz určující a_n vhodně rozšíříme. Použijeme identity známé z algebry: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. To znamená místo výrazu $a-b$ napíšeme výraz $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)$

Řešení.

Jedná se o limitní typ „$\infty - \infty$“ neboť $\lim \sqrt{4n^2+5n-7} = \infty$ a $\lim(-2n) = -\infty$.

Limitní výraz vhodně rozšíříme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+5n-7}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}+2} = \frac{5}{4}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n+1} - 7 - 7^{n-1}}{9^n + 8^{\frac{n}{2}} - 84}$.

Řešení.

Poznamenejme, že $3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3^1 = \left(3^2\right)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3$.
Limitní výraz nejdříve upravíme tak, aby obsahoval stejné exponenty:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 9^n - 7 - \frac{1}{7} \cdot 7^n}{9^n + \left(\sqrt{8}\right)^n - 84}.$$

Čitatele i jmenovatele dělíme exponenciálním výrazem s největším základem. V našem případě je to 9^n a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{9^n} - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n}{1 + \left(\sqrt{\frac{8}{81}}\right)^n - \frac{84}{9^n}} = 3.$$

Místo dělení exponenciálním výrazem s největším základem můžeme samozřejmě tento výraz vytknout z čitatele i jmenovatele a zkrátit.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot 2^{2n-2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3^n}$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 2^{2n-2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 0{,}25 \cdot 4^n - 10}{5 \cdot 0{,}25 \cdot 4^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \left(0{,}75 - \frac{10}{4^n}\right)}{4^n \left(1{,}25 - \frac{3^n}{4^n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jste se seznámili s posloupnostmi. Jedná se o speciální případ funkcí, jejichž definičním oborem je množina přirozených čísel. Byly zde uvedeny vlastnosti posloupností, jako je monotonie a omezenost. Dále se tato kapitola věnovala pojmu limita posloupnosti a hlavně výpočtu limity posloupnosti. Důraz je kladen na výpočet limity racionálně lomené funkce.

OTÁZKY

1) Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{6-5n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+3)}{3n^2-8}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-4)^2}{(3n-1)(4n+2)}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(3+\sqrt{n}\right)^2}{n+7}$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{n+4}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+5n}}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ **j)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ **l)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}\right)$ **n)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}+1}$ **p)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-8}{5\cdot 4^{n-1}+1}$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$ **r)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+2}-4^{2n}+2^{n-1}}{5^{n+1}-16^{n+\frac{1}{2}}}$ **t)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n}-7^{n-1}+2^{2n}}{5-9^n+2^n}$

ODPOVĚDI

1)	**a)** $-0{,}8$	**b)** $\frac{1}{3}$	**c)** $\frac{1}{3}$	**d)** 0	**e)** 1
	f) ∞	**g)** $\sqrt{2}-2$	**h)** $\sqrt{3}$	**i)** -1	**j)** $\frac{4}{7}$
	k) 0	**l)** $-2{,}5$	**m)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$	**n)** $\frac{1}{2}$	**o)** $\frac{1}{4}$
	p) $\frac{48}{5}$	**q)** $\frac{5}{4}$	**r)** -1	**s)** $\frac{1}{4}$	**t)** -1

3 FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ A JEJÍ LIMITA

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Funkce je základním objektem, který je zkoumán diferenciálním počtem. Obecně pod pojmem funkce chápeme jistý způsob přiřazení mezi dvěma množinami reálných čísel, které musí splňovat jisté předpoklady. S takovým přiřazením se setkáváme na každém kroku. Z ekonomické praxe můžeme uvést např. závislost množství vyrobeného zboží na počtu zaměstnanců, vstupních investicích či poptávce po tomto zboží. Druhá část kapitoly se pak věnuje limitě funkce a jejímu výpočtu.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojem funkce jedné reálné proměnné,
- uvést vlastnosti funkce,
- načrtnout grafy elementárních funkcí,
- vypočítat definiční obor funkce,
- vypočítat limitu funkce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, monotónnost funkce, omezenost funkce, sudá a lichá funkce, graf funkce, limita funkce.

3.1 Funkce jedné reálné proměnné

DEFINICE 1

Nechť $D(f)$ a $H(f)$ jsou dvě podmnožiny reálných čísel, tj. $D(f) \subseteq R$, $H(f) \subseteq R$ a nechť $x \in D(f)$, $y \in H(f)$. Předpis $y = f(x)$ se nazývá funkcí, jestliže ke každému $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

Proměnná *x* se obvykle nazývá **nezávisle proměnná** nebo **argument**, kdežto proměnná *y* se nazývá **závisle proměnná**.

Množina $D(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce *f*, množina $H(f)$ se nazývá **obor hodnot** (obor funkčních hodnot) funkce *f*.

Kromě uvedeného označení funkce se často používá také označení:

$$f : D(f) \rightarrow H(f),$$
$$f : y = f(x),$$
$$f : x \mapsto y.$$

Funkce $y = f(x)$ je definována (určena), když je dán její definiční obor $D(f)$ a pravidlo, dle kterého je ke každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena **právě jedna funkční hodnota** $f(x)$. Toto pravidlo může být vyjádřeno následujícími způsoby:

a) analyticky, tj. analytickým výrazem (vzorcem), resp. rovnicí nebo několika rovnicemi platnými v definičním oboru, které prvkům $x \in D(f)$ přiřazují funkční hodnotu $y \in H(f)$. Je-li závisle proměnná *y* vyjádřena pomocí nezávislé proměnné *x*, říkáme, že funkce je dána **explicitně**, například $y = 3x^2$.

Jinak mluvíme o **implicitním** zadání funkce, což obecně můžeme zapsat ve tvaru $F(x, y) = 0$, například $(y^2 + 3x)^3 = 0$.

Funkci danou explicitně můžeme vždy převést na implicitní tvar. Nechť například je funkce *f* zadaná explicitně rovnicí

$$y = 0{,}5 \cos x + \sin x .$$

Uvedenou funkci můžeme vyjádřit implicitně takto :

$$2y - \cos x - 2 \sin x = 0 .$$

Převod implicitního zápisu funkce na explicitní není vždy možný.

Například funkci f zadanou implicitně rovnicí

$$y + \ln x - e^{xy} = 0$$

není snadné vyjádřit explicitně.

Poznamenejme, že ne každou rovnicí $F(x, y) = 0$ je určena funkce. Například rovnicí $x^2 + y^2 - 4 = 0$ není ve smyslu definice určena funkce, neboť hodnotám $x \in (-2,2)$ dle uvedené rovnice odpovídají dvě různé hodnoty y_1 a y_2:

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2}, \qquad y_2 = -\sqrt{4 - x^2} .$$

b) tabulkou, která určuje hodnoty závislé proměnné pro jednotlivé hodnoty argumentu. Tento druh určení funkce můžeme použít jenom tehdy, je-li definičním oborem dané funkce konečná množina.

Tabulka může mít např. tvar:

x	2	5	8	9
y	5	8	1	3

c) grafem, což je množina všech bodů v rovině, jejichž souřadnice jsou $[x, f(x)]$.
Grafem funkce f rozumíme množinu všech bodů uvedené vlastnosti a nakreslená křivka je obrazem tohoto grafu.

3.1.1 VLASTNOSTI FUNKCÍ

Df

DEFINICE 2

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená shora**, existuje-li taková konstanta *h*, zvaná **horní závora** funkce *f* na oboru *M*, že pro všechna $x \in M$ platí:
$f(x) \leq h$.

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená zdola**, existuje-li taková konstanta *d*, konstantní pro všechna $x \in M$, zvaná **dolní závora** funkce *f* na oboru *M*, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \geq d$.

Funkce $y = f(x)$ je na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená**, právě když je současně ohraničená zdola i shora. Právě tehdy existuje taková konstanta $K \geq 0$, že pro všechna $x \in M$ platí $|f(x)| \leq K$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Rozhodněte, zda je kvadratická funkce $f(x) = x^2 + 5$ ohraničená v celém svém $D(f) = R$.

Řešení.
Protože $x^2 \geq 0$, je $f(x) \geq 5$ pro všechna $x \in R$. Funkce $f(x)$ je zdola ohraničená.
Grafem uvažované funkce $f(x) = x^2 + 5$ je parabola, která má větve směrem nahoru, proto funkce není shora ohraničená.

Na základě uvedeného můžeme již konstatovat, že $f(x)$ není ohraničená na množině *R*.

DEFINICE 3

Df

Funkce $f(x)$ je **sudá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$.
Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy *y*.
Funkce je **lichá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$.
Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku souřadnicového systému.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Sudé jsou například funkce:

$$f(x) = |x|, \text{ neboť } |-x| = |x|,$$

$$f(x) = x^{2k}, \text{ neboť } (-x)^{2k} = x^{2k},\ k \in N,$$

$$f(x) = \cos x, \text{ neboť } \cos(-x) = \cos x.$$

Liché jsou například funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ kde } x \neq 0, \text{ neboť } \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x},$$

$$f(x) = x^{2k+1}, \text{ neboť } (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1},\ k \in N,$$

$$f(x) = \sin x, \text{ neboť } \sin(-x) = -\sin x.$$

DEFINICE 4

Df

Funkce $f(x)$ se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je též $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo *p* se nazývá **perioda funkce.** Graf periodické funkce se posunutím podél osy *x* o hodnotu *p* nezmění. Typickým příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce.

DEFINICE 5

Df

Monotónní funkce jsou takové funkce, které splňují pro každou dvojici čísel $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in M \subset D(f))$ následující podmínky:

$$\text{jestliže } \left\{\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2), \\ f(x_1) > f(x_2), \\ f(x_1) \leq f(x_2), \\ f(x_1) \geq f(x_2), \end{array}\right\} \text{ pak funkce } f \text{ je v } M \left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array}\right.$$

Funkce klesající a rostoucí nazýváme **ryze monotónní**.

DEFINICE 6

Funkce $f(x)$ je na $D(f)$ **prostá** (jednoznačná), jestliže ke každým dvěma hodnotám $x_1, x_2 \in D(f)$, kde $x_1 \neq x_2$, přiřazuje hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Platí:

1. Jestliže je funkce prostá, pak každá přímka rovnoběžná s osou x protne její graf nejvýše v jednom bodě.
2. Každá ryze monotónní funkce je prostá, však ne každá prostá funkce je ryze monotónní.
3. Sudá funkce není nikdy prostá. Lichá funkce může, ale nemusí být prostá.

DEFINICE 7

Nechť $f(x)$ je prostá funkce definovaná na $D(f)$. Obor jejích funkčních hodnot je $H(f)$. Potom funkce, která přiřazuje každému $y \in H(f)$ hodnotu $x \in D(f)$, pro kterou platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkcí** k funkci $f(x)$ a značíme ji $f^{-1}(x)$. Platí $x = f^{-1}(y)$, nebo $x = g(y)$.

Funkce $y = f(x),\ x \in D(f)$ a $x = f^{-1}(y),\ y \in H(f)$ se nazývají **vzájemně inverzní funkce**. Jejich grafy jsou křivky osově souměrné dle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. dle přímky $y = x$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = e^x$ (na celém $D(f)$, jelikož exponenciální funkce je prostá) je funkce logaritmická $f^{-1}(x) = \ln x$. Obor funkčních hodnot exponenciální funkce je množina všech kladných čísel, kterou označujeme R^+, proto definičním oborem logaritmické funkce je také R^+, takže argument logaritmické funkce musí být vždy kladný.

3.1.2 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Podle toho, jaké operace vytvářejí funkci $f(x)$ z argumentu x, rozlišujeme dvě hlavní skupiny funkcí: algebraické funkce a transcendentní funkce.

ALGEBRAICKÉ FUNKCE

Algebraickou funkcí rozumíme funkci, kterou lze vytvořit z konstant a z proměnné x konečným počtem algebraických operací (tj.sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a umocňováním racionálním exponentem).

Algebraické funkce dělíme na **racionální** a **iracionální** (např. $y = \sqrt[3]{x^2}$).

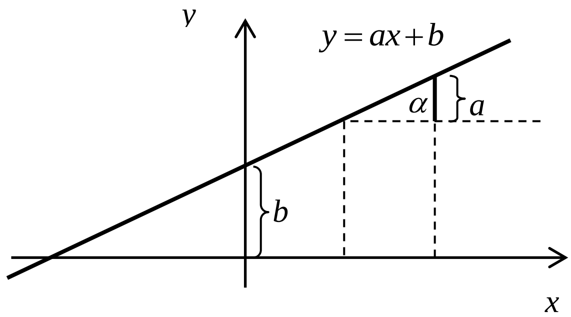
Racionální funkce dělíme na **polynomické funkce**, též polynomy neboli mnohočleny (např. $y = 2x^3 - 2x + 8$) a **racionální lomené funkce** (např. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$), tj. funkce, které vznikají podílem dvou polynomů.

Uveďme nejprve dva příklady polynomických funkcí:

Lineární funkce je funkce ve tvaru:

$$y = ax + b, \quad a, b \in R, \quad \text{kde} \;\; D(f) = R.$$

Grafem této funkce je přímka. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$a = \operatorname{tg}\alpha$ - směrnice přímky, která je grafem lineární funkce,
b - úsek (vyťatý přímkou) na ose y, viz Obr. 1.



Obrázek 1: Graf lineární funkce $y = ax + b$

Jestliže $a = 0$, potom hovoříme o **funkci konstantní.**

Kvadratická funkce je funkce ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R, \, a \neq 0, \quad \text{kde} \;\; D(f) = R.$$

Grafem je parabola. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$a > 0$, pak parabola je konvexní funkce na R,
$a < 0$, pak parabola je konkávní funkce na R.

Racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkcí nazýváme funkcí $R(x)$, která je podílem dvou polynomických funkcí, tj. má tvar

$$R(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Mocninné funkce

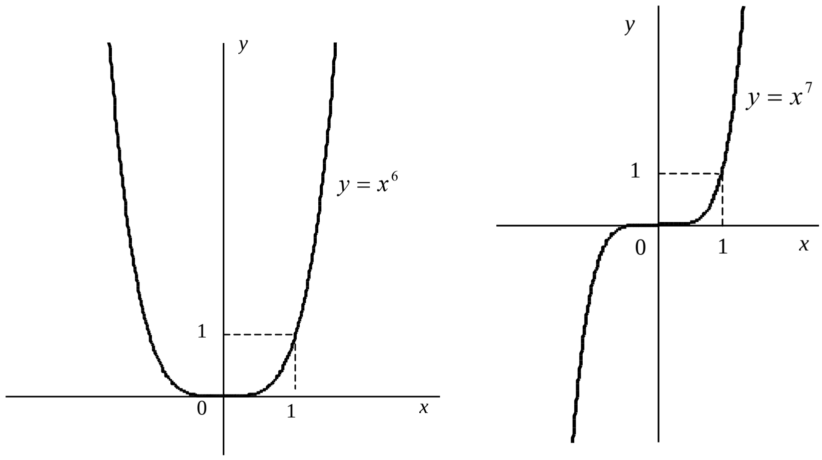
Mocninné (potenční) funkce jsou funkce ve tvaru $y = x^r$, kde $D(f) = (0,+\infty)$, tj: $x > 0$, r je libovolné reálné číslo. Pro některé r budeme mocninnou funkci definovat i mimo interval $(0,\infty)$.

Jestliže r je přirozené číslo, pak máme tyto případy:

a. Sudá mocninná funkce s kladným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n}, \quad n \in N, \quad \text{kde} \quad D(f) = R.$$

Grafem těchto funkcí je konvexní parabola (2n)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic
Konkávní parabola (2n)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic je grafem funkce $y = -x^{2n}$, kde $n \in N$. Viz. Obr. 2.



Obrázek 2: Graf paraboly šestého a sedmého stupně

b. Lichá mocninná funkce s kladným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n+1}, \quad n \in N, \quad \text{kde}\, D(f) = R.$$

Grafem funkce je parabola (2n+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek souřadnicového systému.

V případě $y = -x^{2n+1}$ je grafem křivka osově souměrná podle osy x ke grafu funkce $y = x^{2n+1}$. Tato parabola (2n+1)-ního stupně leží ve 2. a 4. kvadrantu.

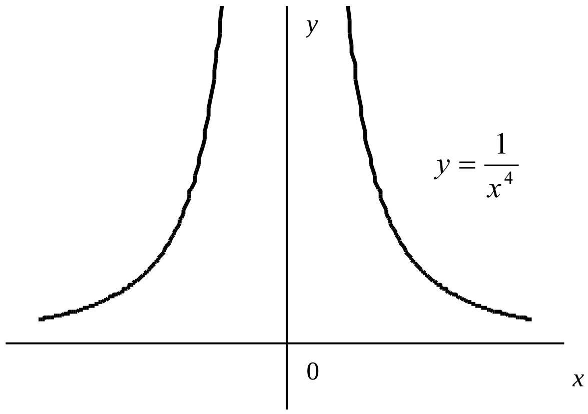
Když $r = -n$, $n \in N$, je $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Nastávají tyto případy:

c. Sudá mocninná funkce se záporným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n}, \quad n \in N, \quad \text{kde} \quad D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ není definována pro $x = 0$!

Grafem funkce je hyperbola ($2n$)-tého stupně, která leží v 1. a 2. Kvadrantu. V případě funkce $y = -x^{-2n}$ je grafem hyperbola ($2n$)-tého stupně, která leží ve 3. a 4. kvadrantu.



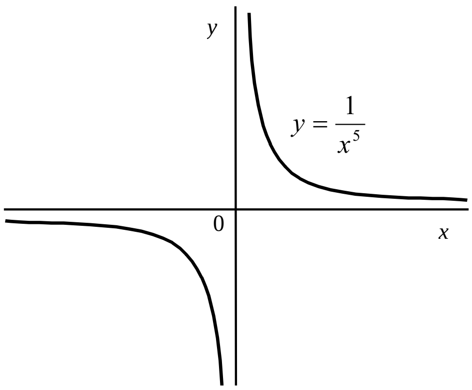
Obrázek 3: Graf hyperboly čtvrtého stupně

d. Lichá mocninná funkce se záporným exponentem je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n-1}, \quad n \in N, \quad \text{kde } D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ opět není definována pro $x = 0$!

Grafem funkce je hyperbola ($2n$+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu. Zvláštním případem je funkce $y = \dfrac{1}{x}$ (tj. $n = 0$), jejímž grafem je vám dobře známá rovnoosá hyperbola.



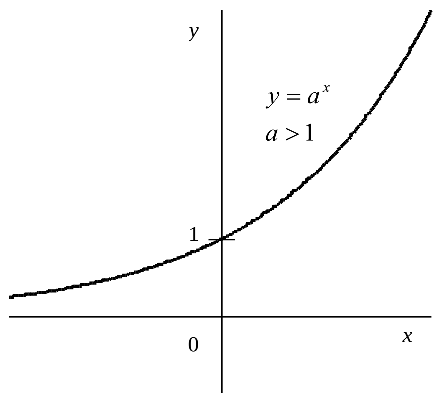
Obrázek 4: Graf hyperboly pátého stupně

TRANSCENDENTNÍ FUNKCE
Připomeňme, že funkce, která není algebraická, se nazývá transcendentní (nealgebraická). Především nás budou zajímat exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

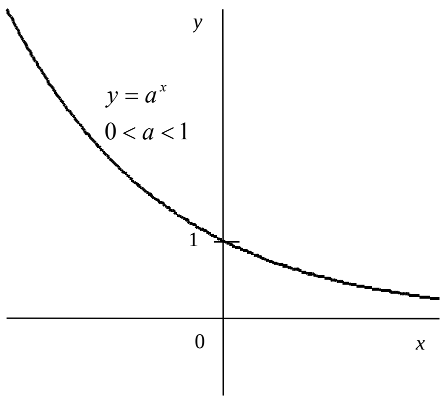
Exponenciální funkce má (na rozdíl od mocninné funkce) proměnnou *x* v exponentu. Je to funkce ve tvaru

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad \text{kde } D(f) = R, \quad H(f) = (0, \infty).$$

Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, tzn. ryze monotónní.
Pro $a = 1$ je to funkce konstantní $y = 1^x = 1$.
Pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající, tzn. taktéž ryze monotónní. Velmi důležitá je funkce $y = e^x$ se základem $e = 2{,}1782...$, což je tzv. Eulerovo číslo. Toto číslo je iracionální, podobně jako $\pi = 3{,}14159...$, nelze jej vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Někde se setkáte s názvem exponenciální funkce pouze pro funkci $y = e^x$. Funkci $y = a^x$ se pak říká **obecná mocnina**.



Obrázek 5: Graf rostoucí exponenciální funkce

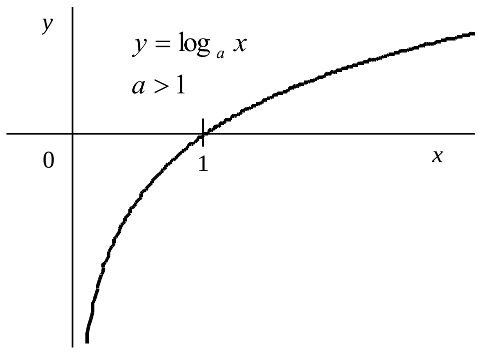


Obrázek 6: Graf klesající exponenciální funkce

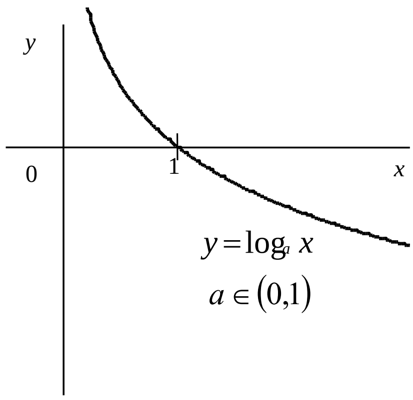
Logaritmická funkce je funkce ve tvaru

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \qquad \text{kde } D(f) = (0, \infty), \;\; H(f) = R.$$

Logaritmická funkce je inverzní k exponenciální funkci o tomtéž základu a. Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající. Všimněte si, že jsme v definici vynechali základ $a = 1$. Je to proto, že příslušná exponenciální funkce $y = 1^x = 1$ je konstantní, a proto k ní inverzní funkce neexistuje.



Obrázek 7: Graf rostoucí logaritmické funkce



Obrázek 8: Graf klesající logaritmické funkce

Poznámka. Při numerických výpočtech užíváme logaritmické funkce se základem $a = 10$, píšeme zjednodušeně $y = \log x$. Tento **logaritmus** se nazývá **dekadický**. Jak bylo již řečeno dříve, často užíváme logaritmické funkce o základu $a = e$. Kvůli rozlišení ho píšeme $y = \ln x$ a tento logaritmus nazýváme **přirozeným logaritmem**.

Z vlastností exponenciální funkce plynou následující vlastnosti pro všechna přípustná a:

$$a^0 = 1, \qquad \log_a 1 = 0,$$

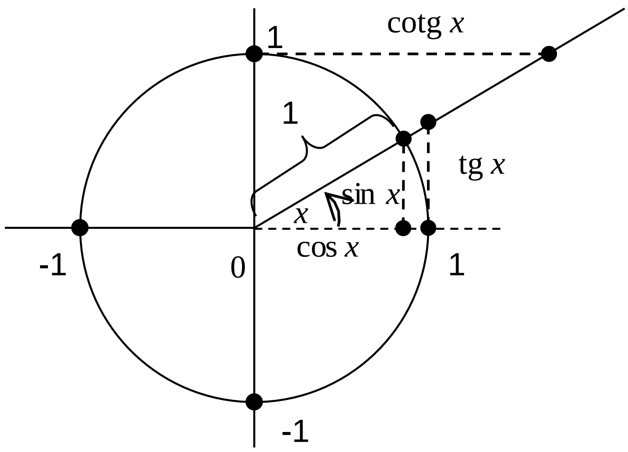
$$\log_a a = 1, \;\; \ln e = 1.$$

Velice často je využíván vztah $f^{g} = e^{g \ln f}$, kde f je kladná funkce .

Goniometrické funkce

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{cotg} x.$$

Definice těchto funkcí je založena na vztazích mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka v kružnici o poloměru 1, která je znázorněna na Obr. 9.



Obrázek 9: Goniometrické funkce v jednotkové kružnici

Při měření úhlů v rovině používáme dvě míry, stupňovou a obloukovou. Oblouková míra má větší využití při teoretických výpočtech.
Při stupňové míře je kružnice rozdělena na 360 **stupňů**, každý stupeň má 60 minut, každá minuta má 60 vteřin. Pokud měříme úhel v obloukové míře, pod velikostí úhlu rozumíme délku oblouku, který odpovídá úhlu v kruhové výseči v jednotkové kružnici. Jednotkou obloukové míry je **radián**. Budeme používat pouze obloukové míry úhlů.

Vztah pro přepočet stupňů na radiány: $1^{\circ}\,[\text{stupeň}] = \dfrac{\pi}{180}$ rad [radiánů].

Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

2. $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$,

3. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$,

5. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

6. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcím v intervalech, kde goniometrické funkce jsou ryze monotónní. Grafy těchto funkcí jsou znázorněny na Obr. 10.

Funkce $y = \sin x$ je rostoucí v intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesající v intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, k je celé číslo. Zúžíme definiční obor funkce $y = \sin x$ na některý z těchto intervalů, konkrétně vybereme interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Na tomto intervalu je $y = \sin x$ ryze monotónní (rostoucí) funkcí a proto k ní existuje funkce inverzní, která se nazývá arkussinus.

a) Cyklometrická funkce arkussinus je funkce ve tvaru

$$y = \arcsin x, \quad \text{kde } D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \ H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce získáme překlopením funkce $y = \sin x$ v uvažovaném intervalu podle přímky $y = x$. Hodnota $y = \arcsin x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je číslo $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, jehož sinus je roven *x*, tj. $\sin y = x$. Platí:

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 0,5 = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

b) Cyklometrická funkce arkuskosinus je funkce ve tvaru

$$y = \arccos x, \quad \text{kde } D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \ H(f) = \langle 0, \pi \rangle.$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Hodnoty $y = \arccos x$ jsou čísla z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, jejichž kosinus je roven *x*. Platí:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 0,5 = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos 1 = 0.$$

c) Cyklometrická funkce arkustangens je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{kde } D(f) = R, \ H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y = -\frac{\pi}{2}$ a $y = \frac{\pi}{2}$. Hodnoty $y = \operatorname{arctg} x$ jsou čísla z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, jejichž tangens je roven *x*. Platí:

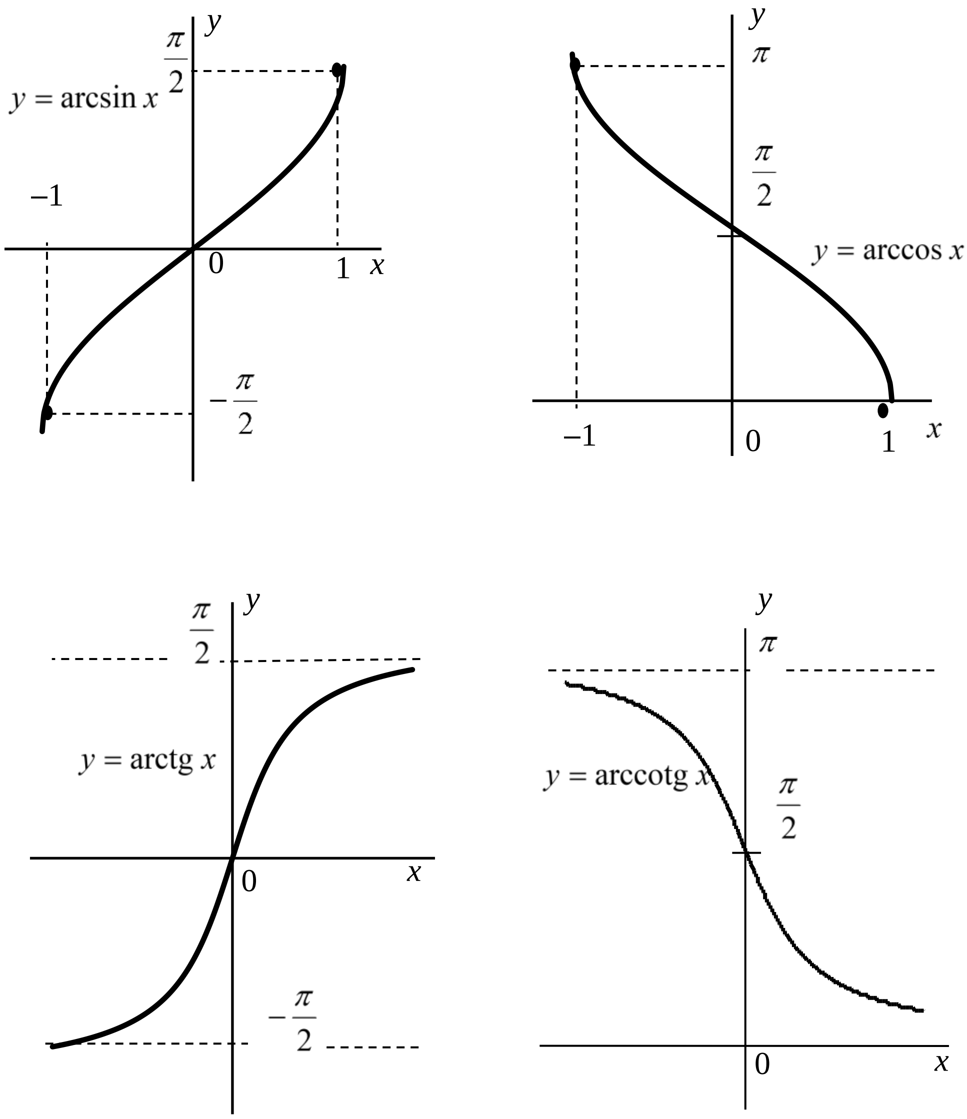
$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Cyklometrická funkce arkuskotangens je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad \text{kde } D(f) = R, \ H(f) = (0, \pi).$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y=0$, $y=\pi$. Hodnoty y = arccotg x jsou čísla z intervalu $(0,\pi)$, jejichž kotangens je roven x. Platí:

$$\operatorname{arccotg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6},\qquad \operatorname{arccotg}1=\frac{\pi}{4}.$$



Obrázek 10: Cyklometrické funkce

3.1.3 DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Určete definiční obor funkce $f(x) = ln(9 - x^2) + 4\sqrt{x-1}$

Řešení.

$9 - x^2 > 0$ $\quad\quad$ $x - 1 \geq 0$

$(3 - x)(3 + x) > 0$ $\quad\quad$ $x \geq 1$

$x \in (-3;\ 3)$

Výsledek: $x \in < 1;\ 3)$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x - 2) + \frac{\sqrt[3]{x+4}}{x-2}$

Řešení.

$|x - 2| \leq 1$ $\quad\quad$ $x - 2 \neq 0$

$-1 \leq x - 2 \leq 1$ $\quad\quad$ $x \neq 2$

$1 \leq x \leq 3$

$x \in \langle 1;\ 3\rangle$

Výsledek: $x \in < 1; 2) \cup\ (2; 3 >$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Určete definiční obor funkce $\quad f(x) = \frac{5+x}{\sqrt{x^2-x-12}} + log(x - 1)$

Řešení.

$x^2 - x - 12 > 0$ $\quad\quad$ $x - 1 > 0$

$(x - 4)(x + 3) > 0$ $\quad\quad$ $x > 1$

$x \in (-\infty;\ -3) \cup (4;\ \infty)$

Výsledek: $x \in\ (4;\ \infty)$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Pro funkci $f(x)=3x^2-4$ vypočítejte:

a. $f(0)$, **b.** $f(a)$, **c.** $f(a+1)$, **d.** $f\left(\frac{1}{a}\right)$, stanovte $D(f)$,

e. $f(2x)$, **f.** $2f(x)$, **g.** $f(x^2)$, **h.** $[f(x)]^2$.

Řešení.

a. $f(0)=3\cdot 0^2-4=-4$,

b. $f(a)=3\cdot a^2-4=3a^2-4$,

c. $f(a+1)=3(a+1)^2-4=3a^2+6a-1$,

d. $f\left(\frac{1}{a}\right)=3\left(\frac{1}{a}\right)^2-4=\frac{3}{a^2}-4=3a^{-2}-4=\frac{3-4a^2}{a^2}$, $D(f)=R-\{0\}$.

e. Je to funkční hodnota v bodě 2*x*. $f(2x)=3\cdot(2x)^2-4=12x^2-4$

f. Funkční hodnota v bodě *x* je násobena dvěma.
$2f(x)=2(3x^2-4)=6x^2-8$

g. Funkční hodnota v bodě x^2. $f(x^2)=3(x^2)^2-4=3x^4-4$

h. Funkce je umocněna dvěma. Uvědomme si, že tuto skutečnost můžeme zapsat buď $[f(x)]^2$ nebo $f^2(x)$. Pak $f^2(x)=(3x^2-4)^2=9x^4-24x^2+16$

3.2 Limita funkce

K hlubšímu studiu funkcí je účelné zavést pojem spojité funkce. Existuje řada reálných situací, ve kterých malým změnám jedné veličiny často odpovídají malé změny jiné veličiny. Pojem spojitosti funkce a pojem limita funkce lze definovat dvěma způsoby: buď pomocí okolí bodu (Cauchyova definice) nebo pomocí posloupností (Heineova definice). V této publikaci je uveden druhý z uvedených způsobů. Tato část pojednává o reálných funkcích jedné reálné proměnné $f(x)$. Zavedeme značení $f(x)\equiv f$, definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit $D(f)$, výraz $x_n\to C$ znamená $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=C$.

DEFINICE 8

O funkci *f* řekneme, že je v bodě $C\in D(f)$ spojitá, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in D(f)$ platí ekvivalence:

$$x_n\to C \quad\Leftrightarrow\quad f(x_n)\to f(C),\ \text{neboli}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=c \ \text{ právě když } \lim_{n\leftarrow\infty} f(x_n)=f(c).$$

Platí:

1) Nechť *f*, g jsou spojité funkce v bodě *C*. Potom rovněž funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ $(g(C) \neq 0)$ jsou spojité v bodě *C*.

2) Nechť funkce g je spojitá v bodě C a funkce f je spojitá v bodě $d = g(C)$. Potom složená funkce $f \circ g$, která je dána předpisem $y = f(g(x))$, je spojitá v bodě *C*.
3) Funkce f je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou opět spojité funkce.

VĚTA 1 – BOLZANOVA VĚTA

V

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ taková, že $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje reálné číslo $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = 0$.

VĚTA 2 – DŮSLEDEK BOLZANOVY VĚTY

V

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu (a,b) taková, že nemá v intervalu (a,b) žádný nulový bod. Potom funkce f je stále kladná nebo stále záporná v intervalu (a,b).

VĚTA 3 – WEISTRASSOVA VĚTA

V

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu. Potom funkce f nabývá v intervalu jak svého minima, tak i svého maxima.

DEFINICE 9

Df

Řekneme, že číslo $a \in R^*$ je **limitou funkce** $\boldsymbol{f}$ v bodě C, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(f) - \{C\}$ platí ekvivalence: $x_n \to C \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n) \to a$.

Zapisujeme $\lim_{x \to C} f(x) = a$.

Jestliže $a \in R$ jedná se o **vlastní limitu**, pro $a = \pm\infty$ jde o **nevlastní limitu**.

Existence a hodnota limity funkce f v bodě C nezávisí dokonce ani na tom, zda je či není funkce f v bodě C definovaná.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+8\right)$.

Řešení.

Označme funkci $f(x)=3x^2-2x+8$. Tato funkce je v bodě $x=1$ spojitá, proto limitu vypočteme jako funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x=1$.

Dostáváme: $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+8\right)=3.1^2-2.1+8=9.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Z grafu funkce určeme limitu funkce v krajních bodech definičního oboru funkce:

a. $y=log\,x$, **b.** $y=arctgx$, **c.** $y=arcsin\,x$,

d. $y=cos\,x$, **e.** $y=2^x$, **f.** $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Řešení.

a. Definiční obor funkce $y=log\,x$ je interval $(0,\infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to 0^+}\log x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log x=\infty$.
Protože limita $\lim\limits_{x\to 0^-}\log x$ neexistuje, neexistuje ani $\lim\limits_{x\to 0}\log x$.

b. Definiční obor funkce $y=arctgx$ jsou všechna reálná čísla $R=(-\infty,\infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} arctgx=\frac{\pi}{2}$.
Daná funkce má dvě vodorovné asymptoty o rovnicích $y=\pm\frac{\pi}{2}$.

c. Definiční obor funkce $y=arcsin\,x$ je interval $\langle -1,1\rangle$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to -1^+}\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.
Protože jednostranné limity $\lim\limits_{x\to -1^-}\arcsin x$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\arcsin x$ neexistují, neexistují ani příslušné oboustranné limity funkce $y=arcsin\,x$.

d. Definiční obor funkce $y=cos\,x$ jsou všechna reálná čísla $R=(-\infty,\infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ neexistují, protože funkce je periodická v celém svém definičním oboru.

e. Definiční obor funkce $y = 2^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty.$

Funkce $y = 2^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0.$

f. Definiční obor funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \infty, \quad \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = 0.$

Funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0.$

K ZAPAMATOVÁNÍ

Nyní uvedeme obecný vztah pro výpočet limit racionálních lomených funkcí, které již znáte z výpočtu limit posloupnosti. Tento vztah budeme používat v dalším řešeném příkladu.

Nechť $k, m \in N; \quad a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_m \in R; \quad a_0, b_0 \neq 0.$

Pak platí následující tvrzení:

$$\textbf{I.} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ je-li } k = m, \\ 0, \text{ je-li } k < m, \\ \infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} > 0\right), \\ -\infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} < 0\right). \end{cases}$$

II. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},\ \text{je-li}\ k=m,\\ 0,\quad \text{je-li}\ k<m,\\ \infty,\ \text{je-li}\ (k>m)\wedge\left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0}>0\right),\\ -\infty,\ \text{je li}\,(k>m)\wedge\left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0}<0\right).\end{cases}$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte následující limity funkcí (jsou uvedeny v řešení tohoto příkladu). Je zde zachyceno všech osm případů, které mohou nastat. Řešení nekomentujeme, neboť se zde jedná pouze o určení stupně polynomu v čitateli a ve jmenovateli a jednoduchou úvahu.

Řešení.

1. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x-3}{5+5x^4}=\dfrac{2}{5}$,

2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{5x^4-4x+2}=0$,

3. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^5}{5+x}=\infty$,

4. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-5x^4+2x}{x+8}=-\infty$,

5. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+3x-3}{2+5x^3}=\dfrac{4}{5}$,

6. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-3}{2+5x^7}=0$,

7. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{2+5x}=-\infty$,

8. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4-3}{2-5x}=\infty$.

Při výpočtu limity funkce typu $\frac{f(x)}{g(x)}$ dojdeme často k výrazu, kdy $\lim_{x\to a} f(x)=0 \ \wedge \ \lim_{x\to a} g(x)=0$, (výraz $\frac{0}{0}$) a hodnotu limity přímo nelze určit. Úpravu provádíme tak, že se snažíme zlomek krátit výrazem konvergujícím k nule. Vede k tomu například rozklad v součin mnohočlenů v čitateli i ve jmenovateli nebo použití identity $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, pokud se ve výrazu $a-b$ vyskytují druhé mocniny.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=2$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x-2)$ a nakonec dosadíme $x=2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+2x-1}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=-1$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x+1)$ a nakonec dosadíme $x=-1$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{4}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 13

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=2$, dostaneme výraz $\dfrac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x-2)$ a nakonec dosadíme $x=2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x+2)}=\frac{7}{20}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 14

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=0$, dostaneme výraz $\dfrac{0}{0}$. Rozšíříme zlomek výrazem $\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)$, potom krátíme výrazem x a nakonec dosadíme $x=0$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3}\right)}{x}\frac{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3+x-3}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 15

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Řešení.

Pokud do výrazu dosadíme $x=7$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozšíříme zlomek výrazem $\left(2+\sqrt{x-3}\right)$, potom krátíme výrazem $(x-7)$ a nakonec dosadíme $x=7$. Dostáváme:

$$\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)}{x^2-49} \frac{\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{4-(x-3)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = -\frac{1}{56}.$$

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jsme se seznámili se základním pojmem diferenciálního počtu a tím je pojem funkce jedné reálné proměnné. Obecně pod pojmem funkce chápeme jistý způsob přiřazení mezi dvěma množinami reálných čísel, které musí splňovat jisté předpoklady. V první části kapitoly jsou uvedeny vlastnosti funkcí, jako je monotónnost, omezenost funkce, sudost a lichost funkce. Součástí této kapitoly jsou také grafy elementárních funkcí. Důraz je kladen na výpočet definičního oboru funkce. Druhá část kapitoly se pak věnuje limitě funkce a jejímu výpočtu.

OTÁZKY

1) Odpovězte ano či ne?

a) Funkce $y=\ln x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.

b) Funkce $y=\sin x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.

c) Kvadratická funkce $y=x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty;0\rangle$.

d) Funkce $y=\sqrt{x}$ je inverzní funkcí ke kvadratické funkci $y=x^2$ v R.

e) Funkce $y=e^x$ je exponenciální funkcí.

f) Definičním oborem funkce $y = \arcsin\frac{x}{2}$ je interval $\langle -2,2\rangle$.

g) Funkce $y = \frac{1}{x^6}$ je sudá a funkce $y = \frac{1}{x^9}$ je lichá.

h) Funkce $y = x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln x$ je složenou funkcí.

i) Definiční obory funkcí $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x}}$ a $g(x) = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{x \cdot \log x}$ jsou identické.

2) Napište rovnici kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, je-li $f(-1) = 4, f(0) = 2, f(3) = 12$.

3) Je dána funkce $f(x) = x^2 + \frac{x}{2x^2+3}$. Vypočtěte $f(-1), f(5), f(a+1)$.

4) Určete definiční obor následujících funkcí:

a. $y = \arcsin(x-2)$ **b.** $y = \arccos\sqrt{2x}$ **c.** $y = \arcsin\frac{3x}{x+5}$

d. $y = (x-4)^{-1}\ln\left(x^2+4\right)^{-1}$ **e.** $y = 3\sqrt{2x - x^2}$

5) Vypočtěte limity funkce v daných bodech:

a. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ v bodech $-\infty, \ \infty$,

b. $f(x) = (x-1)^2(2-x)^3$ v bodech $-\infty, \ \infty$,

c. $f(x) = \frac{x^3 - x}{1 + 3x - 2x^3}$ v bodech $-1, \ 0, \ -\infty, \ \infty$,

d. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x - 6}$ v bodech $3, \ -\infty, \ \infty, \ -2$,

e. $f(x) = \frac{2x^3 + x + 18}{x^3 - 4x}$ v bodech $0, \ -2, \ -\infty, \ \infty$,

f. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3}$ v bodech $2, \ 0, \ -\infty, \ \infty$,

g. $f(x) = \frac{3x^3 - 10x - 4}{4 - x^2}$ v bodech $2, \ -2, \ -\infty, \ \infty$,

h. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ v bodech $3, \ -3, \ -\infty, \ \infty$,

i. $f(x) = \frac{7x^2 - 5x - 2}{3x^2 + 12x - 15}$ v bodech $1, \ -5, \ -\infty, \ \infty$,

ODPOVĚDI

1)
a) ano
b) ne
c) ano
d) ne; kvadratická funkce není prostá, a proto k ní neexistuje inverzní funkce v celém definičním oboru *R*.

e) ano

f) ano

g) ano

h) ne; je to součin čtyř základních funkcí.

i) ano, $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

2) $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$

3) 0,8 ; 25,094 ; $\dfrac{2(a+1)(a^3+3a^2+3a+3)}{2(a+1)^2+3}$

4) **a.** $x \in \langle 1,3 \rangle$ **b.** $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ **c.** $x \in \left\langle -\frac{5}{4}, \frac{5}{2} \right\rangle$ **d.** $x \in R - \{4\}$ **e.** $x \in \langle 0,2 \rangle$

5) **a.** $\infty, \quad \infty$ **b.** $\infty, \quad -\infty$ **c.** $-\frac{2}{3}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$

d. $\frac{9}{5}, \quad -\infty, \quad \infty,$ neexistuje **e.** neexistuje, $\frac{25}{8}, \quad 2, \quad 2$

f. $-\frac{1}{6}, \quad 0, \quad 0, \quad 0$ **g.** $-\frac{13}{2}$, neexistuje, $\infty, -\infty$

h. $-6, \quad 0, \quad -\infty, \quad \infty$ **i.** $\frac{1}{2}$, neexistuje, $\frac{7}{3}, \frac{7}{3}$

4 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Zkoumání mnoha přírodních i ekonomických jevů vede k závislostem vyjádřeným ve tvaru funkce jedné reálné proměnné. Derivace této funkce má zásadní význam pro popis příslušného jevu. Pojem derivace vznikl během druhé poloviny 17. století při řešení konkrétních geometrických a fyzikálních úloh. Tento pojem byl přesně definován v 19. století matematiky Cauchym a Bolzanem na základě jimi zpřesněného pojmu limity funkce.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- definovat pojem derivace funkce,
- pravidla derivování funkcí,
- používat vzorce pro derivace funkce,
- vypočítat extrémy funkce a inflexní body funkce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

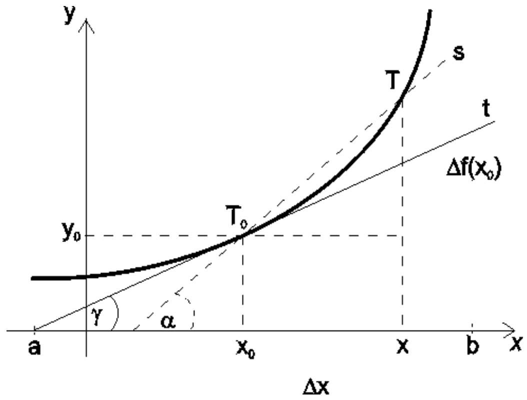
KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Derivace funkce, monotónnost funkce, extrémy funkce, inflexní body funkce, konvexnost a konkávnost funkce, stacionární bod.

4.1 Pojem derivace funkce

Uvažujme funkci $y = f(x)$ definovanou na otevřeném intervalu $M = (a,b)$. Zvolíme bod x_0 uvnitř intervalu M. Náš úkol bude určit směrnici tečny t ke křivce $y = f(x)$ v bodě

$T_0 = [x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$. Za tímto účelem vedeme bodem T_0 sečnu *s*, která protíná křivku v dalším bodě $T = [x, f(x)]$, $x \in M$. Označíme $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Vše graficky znázorníme (Obr.11).



Obrázek 11: Derivace funkce

Potom směrnice uvažované sečny je rovna

$$\operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

kde $\alpha(x)$ je velikost směrového úhlu přímky *s* v závislosti na *x*-ové souřadnici bodu *T*.

Přitom rozdíl $\quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \quad$ (2)

se nazývá **diference (přírůstek) funkce** *f* v bodě x_0,

kdežto rozdíl $\quad \Delta x = x - x_0 \quad$ (3)

se nazývá **diference (přírůstek) argumentu** *x* v bodě x_0.

Diferenční podíl $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ je funkcí proměnné Δx, nikoliv x_0, které je pevné. Připomeňme, že je to směrnice sečny. Význam diferenčního podílu spočívá v tom, že charakterizuje relativní změnu hodnot funkce $y = f(x)$ vzhledem k změně hodnot argumentu. Funkce (1) není definována pro $\Delta x = 0$. Může ovšem mít v tomto bodě limitu.

DEFINICE 1

Df

Nechť funkce $y = f(x)$ je definována na otevřeném intervalu M a nechť číslo $x_0 \in M$. **Derivací funkce *f* v bodě** x_0 nazýváme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Jinak řečeno: derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 nazýváme limitu diferenčního podílu $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ pro $\Delta x \to 0$.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Pravidla pro derivování funkcí

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace na intervalu $M \subset R$. Nechť k je libovolná konstanta. Potom pro $x \in M$ platí:

1. $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$,

2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$,

3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, pro $g(x) \neq 0$.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

V bodě *x*, který splňuje připojené podmínky, platí pro derivace uvedených funkcí tyto vzorce:

(1) $k' = 0$, k – libovolná konstanta, $k \in R$,

(2) $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, x > 0, a \in R$,

(3) $(\sin x)' = \cos x$,

(4) $(\cos x)' = -\sin x$,

(5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,\ \cos x \neq 0$,

(6) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x), \sin x \neq 0$,

(7) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, a > 0 \Rightarrow \left(e^x\right)' = e^x$,

(8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0 \ \Rightarrow\ \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$,

(9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1,\ 1)$,

(10) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1,\ 1)$,

(11) $(\text{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in R,$

(12) $(\text{arccotg}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2},\ x \in R.$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Derivujte funkci $y = x^6 + 3x^4 - 8x^2 + x + 23,\ x \in R$.

Řešení.

Kromě násobného užití vzorce **(2)** použijeme též pravidla **1.** a **2.**

$y' = 6x^5 + 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x \ + 1 = 6x^5 + 12x^3 - 16x + 1$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Derivujte funkci $y = \dfrac{8x^4 - 5}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\ x \in R.$

Řešení.

Konstantu $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ vytkneme před derivovaný výraz, dále použijeme postupně pravidlo **2.**, **1.** a vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(8x^4 - 5\right)' = \frac{32x^3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Derivujte funkci $y = \dfrac{2x^7 + 3x^6 - 2x^4 + 7x - 2}{2x^4},\quad x \neq 0$.

Řešení.

Čitatel dělíme jmenovatelem.

$$y = x^3 + 1{,}5x^2 - 1 + 3{,}5x^{-3} - x^{-4},$$

$$y' = 3x^2 + 3x - 10{,}5x^{-4} + 4x^{-5}.$$

Ověřte si, že stejný výsledek obdržíte použitím pravidla **4.** pro derivování podílu. Postup je ovšem zdlouhavější.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Derivujte funkci $y = 3x\sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.

Řešení.

Funkci nejprve upravíme jako mocninu proměnné x, potom použijeme **(2)**.

$$y = 3x^{1+\frac{1}{4}} = 3x^{1,25},$$
$$y' = 3,75x^{0,25} = 3,75\sqrt[4]{x}.$$

Derivovaný výraz, pokud lze, vždy nejprve upravíme.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Derivujte funkci $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}}$, $x \geq 0$.

Řešení.

Funkci y můžeme upravit takto: $y = x^{\frac{19}{12}}$. Pak použijeme vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{19}{12}x^{\frac{7}{12}} = \frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Derivujte funkci $y = x^2 \cos x, x \in R$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **3.** pro derivaci součinu.

$$y' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x\cos x - x^2 \sin x.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Derivujte funkci $y = \frac{\sin x}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu. Všimněte si správného pořadí funkcí z čitatele a jmenovatele derivovaného zlomku: čitatel výsledku začíná derivací čitatele.

$$y' = \frac{(\sin x)' \ln x - \sin x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x \ln x - \sin x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 8

Derivujte funkci $y = \operatorname{cotg} x, \quad x \neq k\pi$.

Řešení.

Použijeme základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi a pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Vzorec pro derivaci tg x ověřte teď sami!

ŘEŠENÁ ÚLOHA 9

Derivujte funkci $y = \frac{3x+8}{x^2+4}, x \in R$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y' = \frac{3\left(x^2+4\right) - (3x+8)2x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{-3x^2 - 16x + 12}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

K ZAPAMATOVÁNÍ

Má-li funkce $u = g(x)$ derivaci v bodě x_0 a má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, potom $y = f\left(g(x)\right)$ má derivaci v bodě x_0 a platí pravidlo derivování složené funkce:

5. $y'_{x_0} = \left\{f\left(g(x)\right)\right\}'_{x_0} = f'(u_0)g'(x_0)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 10

Derivujte funkci $y = \sin(x^4 + 5x^2 + 9),\ x \in R.$

Řešení.

Položíme $u = g(x) = x^4 + 5x^2 + 9,\quad f(u) = \sin u$, potom derivujeme

$$g'(x) = 4x^3 + 10x\,,$$
$$f'(u) = \cos u = \cos(x^4 + 5x^2 + 9)\,.$$

Použitím pravidla **5.** obdržíme postupně:

$$y' = f'(u)g'(x) = \cos u\ \cdot\left(4x^3 + 10x\right) = \left(4x^3 + 10x\right)\cdot\cos\left(x^4 + 5x^2 + 9\right).$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 11

Derivujte funkci y:

a. $y = \left(x^2 - 1\right)^5,\ x \in R.$

Označme $g(x) = x^2 - 1 = u$, potom $f(u) = u^5$, podle pravidla **5.** obdržíme:

$$y' = \left(u^5\right)'\left(x^2 - 1\right)' = 5u^4\,2x = 10x\left(x^2 - 1\right)^4.$$

b. $y = \sqrt{1 + x^2},\ x \in R\,.$

Označme $1 + x^2 = u$, potom

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'\left(1 + x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

c. $y = \sin(ax + b),\ x \in R\,.$

Označme $ax + b = u$, potom

$$y' = (\sin u)'\cdot\left(ax + b\right)' = a\cos u = a\cos(ax + b).$$

d. $y = \ln\cos x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$

Označme $\cos x = u$, potom

$$y' = (\ln u)'(\cos x)' = \frac{1}{u}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\ x.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 12

Vypočtěte šestou derivaci funkce $y = x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 16x + 15$.

Řešení.
Podle definice derivace vyšších řádů postupně vypočítáme:
$y' = 5x^4 - 8x^3 + 8x - 16$,

$$y'' = 20x^3 - 24x^2 + 8,$$
$$y''' = 60x^2 - 48x,$$
$$y^{(4)} = 120x - 48,$$
$$y^{(5)} = 120,$$
$$y^{(6)} = 0.$$

4.2 Užití diferenciálního počtu – průběh funkce

Vyšetření průběhu funkce vyžaduje znalost všech předchozích kapitol matematické analýzy. Výklad v této kapitole je omezen na vyšetřování průběhů algebraických funkcí.

4.2.1 Monotónnost funkce

V teorii funkcí jsme definovali monotónnost funkce. Zjišťování monotónnosti funkce na daném intervalu pomocí dříve uvedených definicí je často neefektivní, proto tuto vlastnost funkce $f(x)$ v intervalu $J = (a,b)$ vyšetřujeme pomocí derivace funkce. Platí následující věta.

VĚTA 1

Jestliže pro všechna x z intervalu $J = (a,b)$ je splněna nerovnost

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \\ f'(x) < 0, \\ f'(x) \geq 0, \\ f'(x) \leq 0, \end{array}\right\} \quad \text{potom funkce } f \text{ je v tomto intervalu} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array}\right.$$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 13

Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x,\ x \in R$.

Řešení.

Zjistíme nejprve intervaly, v nichž platí $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty),$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-5, 1).$$

Podle věty 4 je funkce rostoucí v intervalu $(-\infty,-5) \cup (1,\infty)$ a klesající v intervalu $(-5,1)$. Funkce je spojitá v R, takže v bodě $x = -5$ musí mít lokální maximum, tzn., že v nějakém okolí bodu $x = -5$, tj. intervalu obsahující bod $x = -5$, je hodnota $f(-5)$ maximální ze všech hodnot, jež funkce nabývá na tomto intervalu. Analogicky v bodě $x = 1$ musí funkce mít lokální minimum. V případě této kubické funkce, na základě znalosti průběhu elementárních funkcí, stanovíme charakter grafu. Obecně výpočet extrému nemusí být tak jednoduchý. Proto pro jejich určení používáme postup uvedený v následujícím odstavci.

4.2.2 LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ

DEFINICE 2

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou v bodě x_0 a jeho jistém okolí. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální minimum**, právě když existuje takové okolí $J \subset D(f)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.
Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální maximum**, právě když existuje takové okolí $J \subset D(f)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in J$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.
Souhrnně se lokální minima a lokální maxima nazývají **lokální extrémy funkce.**

Dále budeme vyšetřovat, za jakých podmínek nastává v určitém bodě x_0 lokální extrém.

DEFINICE 3

Bod x_0, ve kterém je $f'(x_0) = 0$, se nazývá **stacionární bod funkce** $f(x)$.

VĚTA 2

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 obě derivace $f'(x_0), f''(x_0)$ a nechť x_0 je stacionární bod, tj. $f'(x_0)=0$. Pak funkce $f(x)$ v bodě x_0:

a. má lokální maximum, je-li $f''(x_0)<0$,

b. má lokální minimum, je-li $f''(x_0)>0$.

Jestliže však $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, pak funkce $f(x)$ může mít (ale i nemusí) v bodě x_0 lokální extrém.

Např. u funkcí $f(x)=x^3, g(x)= x^4$ platí pro $x_0=0$ v obou případech $f'(0)=g'(0)=f''(0)=g''(0)=0$ a přitom funkce $g(x)=x^4$ má v bodě $x_0=0$ lokální minimum, kdežto funkce $f(x)=x^3$ v tomto bodě nemá extrém, neboť je rostoucí v celém definičním oboru. Nakreslete si tyto funkce!

Nyní nás zajímá, jak postupovat, když ve stacionárním bodě x_0 druhá derivace je nulová.

VĚTA 3

Nechť funkce $f(x)$ má na okolí bodu x_0 spojitou derivaci řádu $n\geq 3$, přičemž platí

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)=B\neq 0.$$

Je-li číslo *n* liché, nemá $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém. Je-li však číslo *n* sudé, má $f(x)$ v bodě x_0:

a. lokální maximum při $B<0$,

b. lokální minimum při $B>0$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 14

Určete lokální extrémy funkce $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-5$.

Řešení.

Vypočteme derivace

$$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3),$$

$$f''(x)=20x^3-60x^2+30x.$$

Protože daná funkce $f(x)$ má všude v *R* derivaci, může mít $f(x)$ lokální extrém jen ve stacionárních bodech, pro něž je $f'(x)=0$.

Proto řešíme rovnici

$$5x^2(x^2-4x+3)=0\,.$$

Dostaneme stacionární body $x_{1,2}=0, x_3=1, x_4=3$.

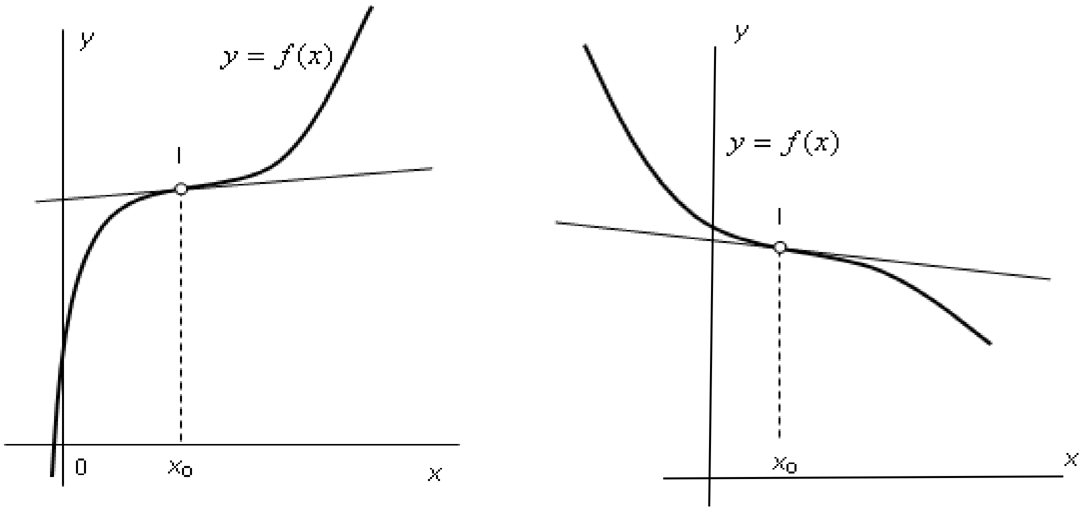
Dále platí $f''(0)=0, f''(1)=-10, f''(3)=90$.

Podle věty 4. má $f(x)$ v bodě $x_3=1$ lokální maximum a v bodě $x_4=3$ lokální minimum. Zbývá rozhodnout pomocí věty 5. o situaci v bodě $x_1=0$.

Protože $f'''(x)=60x^2-120x+30$, $f'''(0)=30=B$, nemá $f(x)$ extrém ve stacionárním bodě $x_1=0$.

4.2.3 INFLEXNÍ BODY FUNKCE

Inflexní bod funkce je bod v němž - znázorněno geometricky - graf funkce přechází z jedné strany své tečny na druhou. Je to na Obr. 12 bod I, v němž se funkce $f(x)$ mění z funkce konvexní na konkávní nebo obráceně. Říkáme také, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **inflexi**.



Obrázek 12: Inflexní bod funkce

Nyní nás bude zajímat, za jakých podmínek je bod x_0 **inflexním bodem**.

V

VĚTA 4

Je-li x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$ a existuje-li druhá derivace $f''(x_0)$, potom platí: $f''(x_0)=0$.

VĚTA 5

Je-li $f''(x_0) = 0$ a mění-li $f''(x)$ při přechodu přes bod x_0 znaménko, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexi.

VĚTA 6

Je-li $f''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = A \neq 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexi.

Je-li $f''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = A \neq 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexi.

Tzn. má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 nulové všechny derivace počínaje druhou až do určité derivace sudého řádů (včetně), potom x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$, pokud bezprostředně následující derivace lichého řádu je nenulová.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 15

Určete inflexní body a intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ konvexní nebo konkávní.

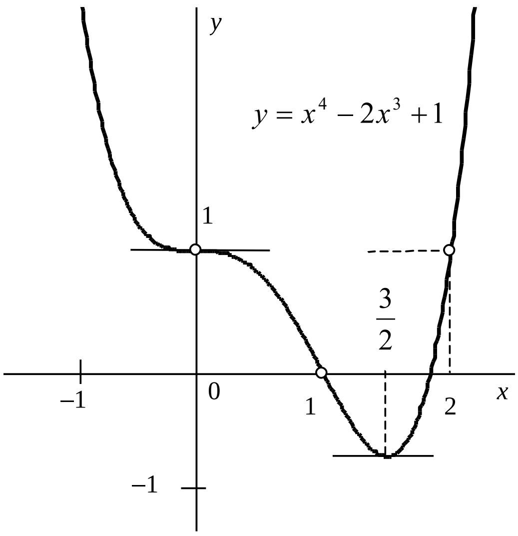
Řešení.

1. Určení inflexních bodů:
Nejprve vypočteme derivace

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1),$$
$$f'''(x) = 24x - 12.$$

Dále řešíme rovnici $f''(x) = 12x(x-1) = 0$.
Řešením dostaneme x-ové souřadnice bodů, ve kterých může existovat inflexe: $x_1 = 0, x_2 = 1$.
V těchto bodech určíme hodnotu třetí derivace: $f'''(0) = -12,\ f'''(1) = 12$.

V obou případech jsou třetí derivace nenulové, proto body $I_1[0,1]$, $I_2[1,0]$ jsou inflexními body (Obr. 13).



Obrázek 13: Inflexní body funkce

2. Určení intervalů, na nichž je daná křivka konvexní nebo konkávní:
Nejprve řešíme nerovnice $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$.
a. $f''(x) = 12x(x-1) > 0.$
Funkce je konvexní v intervalu $(-\infty,0)$ a také v intervalu $(1,\infty)$.
b. $f''(x) = 12x(x-1) < 0$.
Funkce je konkávní pro $(0,1)$.

4.2.4 KONVEXNOST A KONKÁVNOST FUNKCE

Obdobně jako monotónnost funkce, tak i konvexnost a konkávnost jsme definovali v kapitole věnované funkcím. Prakticky ji ovšem budeme vyšetřovat v závislosti na znaménku druhé derivace funkce podle níže uvedené věty.

V

VĚTA 7

Jestliže v intervalu $J = (a,b)$ platí nerovnost:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, \\ f''(x) < 0, \end{array}\right\} \text{ pak funkce } f \text{ je v tomto intervalu } \left\{\begin{array}{l} \text{konvexní,} \\ \text{konkávní.} \end{array}\right.$$

Řešením uvedených nerovnic určíme intervaly, na kterých funkce je konvexní nebo konkávní.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 16

Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ konvexní nebo konkávní.

Řešení.
Vypočteme nejprve druhou derivaci funkce a pak vyřešíme příslušné nerovnice:

$$f''(x) = 6x + 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2,$$
$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalu $(-2, \infty)$ a konkávní v intervalu $(-\infty, -2)$.

SHRNUTÍ KAPITOLY

Tato kapitola studijní opory uzavírá část věnující se matematické oblasti. V této kapitole jste se seznámili s derivací funkce jedné reálné proměnné. Byly zde uvedeny základní vztahy pro derivování a vzorce pro derivaci elementárních funkcí. Vyšetřování průběhu funkce patří k základním znalostem. V tomto předmětu je důraz kladen na výpočet extrémů funkce, určení intervalů monotónnosti, výpočet inflexních bodů a určení intervalů konvexnosti a konkávnosti.

OTÁZKY

1) Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

a. $y = \sqrt[5]{x^2}$

b. $y = \dfrac{1}{x} - x + \ln 5$

c. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}$

d. $y = x^3\sqrt{x}$

e. $y = (3\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2)$

f. $y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$

g. $y = \dfrac{3}{(3x-2)}$

h. $y = \dfrac{3x^2}{7x^5 - x + 2}$

i. $y = 2\dfrac{x+1}{x-1}$

j. $y = \left(\dfrac{1}{x} + 4\right)^4$

k. $y = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{\frac{13}{4}} + \dfrac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}} + 7^{\frac{3}{2}}$

2) Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

a. $y = \sqrt{x} - \dfrac{5}{6\sqrt[5]{x^3}} - 2\sqrt{x^3}$

b. $y = \dfrac{2}{x^3\sqrt{x}}$

c. $y = \dfrac{5}{2x^2 - 5x + 1}$

d. $y = \dfrac{8x^3}{x^3 + x - 1}$

e. $y = \dfrac{5x^2 + x - 2}{x^2 + 7}$ **f.** $y = \dfrac{3}{(1 - x^2)}$

g. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$ **h.** $y = (7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6)^6$

i. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ **j.** $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

3) Určete lokální extrémy funkcí. Symbolem $\overline{\mathrm{V}}$, resp. $\underline{\mathrm{V}}$ označujeme ve výsledcích lokální maximum, resp. lokální minimum funkce.

a. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 4$
b. $f(x) = x^3 + x + 1$
c. $f(x) = -x^3 + x^2$
d. $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3$

4) Určete inflexní body funkce $f(x)$ a intervaly, v nichž je tato funkce konvexní nebo konkávní.
a. $f(x) = x^5 - 10x^2 + x + 3$
b. $f(x) = e^x + x^2 + x^4$
c. $f(x) = 2x^2 + \ln x, \quad x > 0$
d. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}, \quad x \neq \pm 1$

ODPOVĚDI

1)

a. $x \neq 0;\ y' = \dfrac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$ **b.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{-1}{x^2} - 1$

c. $x \neq 0;\ y' = -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **d.** $x \geq 0;\ y' = \dfrac{7}{2}\sqrt{x^5}$

e. $y' = -3x^2 + 24 + \dfrac{14}{3}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{3}}$ **f.** $x \geq 0;\ y' = 24x^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

g. $x \neq \dfrac{2}{3};\ y' = -\dfrac{9}{(3x-2)^2}$

h. $7x^5 - x + 2 \neq 0;\ y' = \dfrac{-3x(21x^5 + x - 4)}{(7x^5 - x + 2)^2}$ **i.** $x \neq 1;\ y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

j. $x \neq 0;\ y' = \dfrac{-4}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + 4\right)^3$ **k.** $x > 0;\ y' = 7x^{\frac{4}{3}} - 13x^{\frac{9}{4}} - \dfrac{2}{7}x^{-\frac{3}{2}}$

2)

a. $x > 0;\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt[5]{x^8}} - 3\sqrt{x}$

b. $x \neq 0;\ y' = \frac{-7}{\sqrt{x^9}}$

c. $2x^2 - 5x + 1 \neq 0;\ y' = \frac{-20x + 25}{(2x^2 - 5x + 1)^2}$

d. $x^3 + x - 1 \neq 0;\ y' = \frac{8x^2(2x-3)}{(x^3 + x - 1)^2}$

e. $y' = \frac{-x^2 + 74x + 7}{(x^2 + 7)^2}$

f. $x \neq \pm 1;\ y' = \frac{6x}{(1 - x^2)^2}$

g. $x > 0;\ y' = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2}$

h. $x \neq 0;\ y' = 6(14x + \frac{4}{x^2})(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^5$

i. $x > 1;\ y' = -\frac{3}{4}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^7}$

j. $x > 0;\ y' = \frac{3\left(1 - 3x^2\right)}{2\sqrt{x}\left(x^2 + 1\right)^2}$

3)

a. $\overline{\mathrm{V}} = (-6,-50),\ \underline{\mathrm{V}} = (-2,-82)$

b. lokální extrémy neexistují

c. $\overline{\mathrm{V}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right), \underline{\mathrm{V}} = (0,0)$

d. $\underline{\mathrm{V}}\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$

4)

a. inflexní bod $x = 1$; konvexní v $(1, \infty)$; konkávní v $(-\infty, 1)$

b. inflexní bod neexistuje, konvexní v R

c. inflexní bod $x = \frac{1}{2}$; konvexní v $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; konkávní v $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

d. inflexní bod neexistuje; konvexní v $(-1, 1)$; konkávní v $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

5 POPISNÁ STATISTIKA – KVALITATIVNÍ A KVANTITATIVNÍ ZNAKY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Cílem statistiky je odhalit zákonitosti a analyzovat informace, které jsou obsaženy ve velkém množství dat v číselné i nečíselné podobě. Prvním krokem k tomuto cíli je zpřehlednění dat. Obvyklé jsou dva přístupy: popisná statistika a induktivní statistika. Do popisné statistiky patří grafické znázornění dat, které zpravidla využívá už provedeného třídění a vypočtených charakteristik. Mezi základní charakteristiky polohy patří: průměr, modus a medián. Mezi charakteristiky polohy patří: rozptyl, směrodatná odchylka, rozpětí, variační koeficient.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- rozdělit statistické znaky,
- uvést příklady kvalitativních a kvantitativních znaků,
- vypočítat charakteristiky polohy: průměr, modus, medián,
- vypočítat charakteristiky variability: rozptyl, směrodatnou odchylku, rozpětí, variační koeficient.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Statistické znaky, kvalitativní statistický znak, kvantitativní statistický znak, průměr, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku, rozpětí, variační koeficient.

5.1 Statistické znaky

Jednotlivé objekty statistického zkoumání nazýváme **statistické jednotky**. Statistickými jednotkami mohou být například zákazníci, zaměstnaci firmy, samotné firmy nebo organizace určitého typu, jako jsou prodejny potravin, supermarkety učitého řetězce (např. Hypernova), ale i studenti SU OPF, voliči v ČR, též výrobky (např. televizory, počítače aj.), nebo také události (uzávěrky, úrazy, vrhy hrací kostkou apod.).

Souhrn statistických jednotek stejného vymezení tvoří **statistický soubor**. Soubor, který obsahuje všechny statistické jednotky daného vymezení, se nazývá **základní soubor** (též **populační soubor** nebo krátce **populace**). Vybraná část základního souboru se nazývá **výběrový soubor**, též *vzorek*. V praxi se setkáváme především s výběrovými soubory, neboť populační soubory jsou jen zřídka dostupné.

Předmětem analýzy statistických souborů jsou vlastnosti jejich statistických jednotek. Těmto vlastnostem říkáme **statistické znaky** a z důvodu jejich dalšího sledování je podrobněji členíme na:

- **znaky kvalitativní** (někdy též slovní, textové nebo alfanumerické),
- **znaky kvantitativní** (též číselné, metrické, měřitelné).

Příkladem kvalitativních znaků mohou být pohlaví zákazníka, typ podniku, bydliště voliče, barva výrobku, chuť nápoje, spokojenost zákazníka apod.

Jako příklady kvantitativních znaků mohou sloužit tržby firmy za měsíc, cena výrobku, počet zákazníků za den, HDP státu v USD, výsledky vrhu hrací kostkou apod.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme namísto „statistický znak" používat pouze „znak".

Z hlediska použitých metod je vhodné ještě podrobnější členění statistických znaků. Konkrétně kvalitativní znaky členíme na dvě skupiny:

- **nominální znaky** (též jmenovité),
- **ordinální znaky** (též pořadové).

Hodnotám, kterých nabývají kvalitativní znaky, říkáme **kategorie**. Tak například kategoriemi znaku „pohlaví zákazníka" jsou „Muž" a „Žena" (nebo M a Ž, popřípadě z angličtiny M – „Male" a F – „Female"), kategoriemi znaku „spokojenost zákazníka" mohou být 3 výrazy „nízká", „průměrná" a „vysoká", nebo též 3 kódy „1", „2" a „3". Přestože se v tomto případě vyjadřuje znak spokojenost zákazníka čísly 1, 2 a 3, nejedná se o kvantitativní znak, neboť čísla zde pouze nahrazují příslušné slovní výrazy.

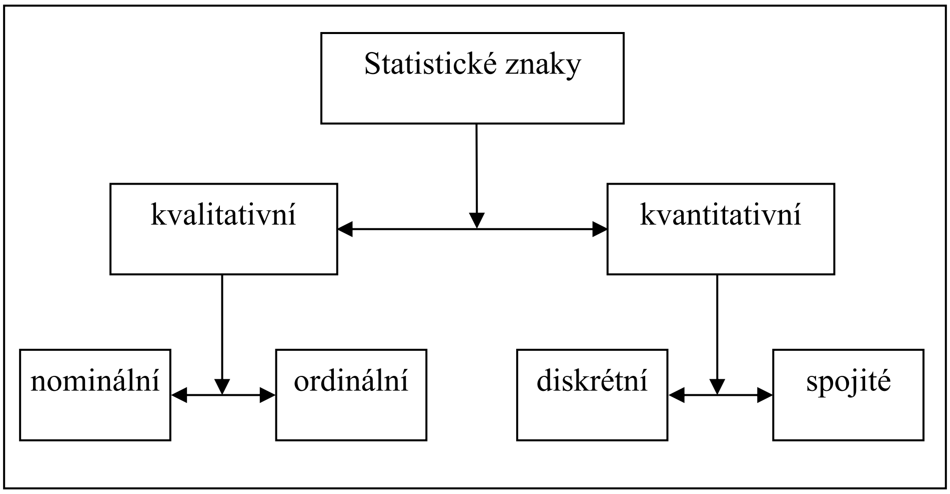
Kategorie nominálních znaků jsou navzájem rovnocenné, a tudíž je nelze vzájemně porovnávat a uspořádat do hodnotové stupnice. Na druhou stranu kategorie ordinálních znaků nejsou rovnocenné, a tudíž je lze vzájemně porovnávat a uspořádat do hodnotové stupnice, např. od nejméně hodnotného k nejvíce hodnotnému.

Kvantitativní znaky rovněž členíme do dvou skupin na:

- **diskrétní znaky** (konečné nebo nekonečné),
- **spojité znaky**.

Diskrétní znaky nabývají izolovaných číselných hodnot. Například počet zákazníků v prodejně za den může nabývat hodnot 0, 1, 2, 3,… atd., není shora omezen (alespoň teoreticky) a jedná se tudíž o nekonečný diskrétní znak. Počet ok na hrací kostce je naproti tomu omezený, konkrétně nabývá hodnot 1, 2,…, 6, jedná se proto o konečný diskrétní znak. Naopak spojité znaky nabývají všech možných číselných hodnot z určitého číselné-ho intervalu. Přesněji říkáme, že nabývají hodnot všech reálných čísel z daného intervalu, který ovšem může být i neomezený, (-∞; +∞).

Přehledně je struktura statistických znaků znázorněna na Obr. 14.



Obrázek 14: Struktura statistických znaků

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Doplňte hodnoty v tabulce. Data představují počet dětí v 33 rodinách.

počet dětí	četnosti	relativní četnosti	kumulativní četnosti	relativní kumulativní četnosti
0	6			
1	7			
2	14			
3	5			
4				

Na základě informací z prvního příkladu odpovězte na následující otázky:

a) V kolika rodinách mají 4 děti?
b) Kolik procent z dotazovaných rodin má 2 děti?
c) Kolik rodin má méně než 2 děti?
d) Kolik procent z dotazovaných rodin má nejvýše 2 děti?

Řešení.

počet dětí	četnosti	relativní četnosti	kumulativní četnosti	relativní kumulativní četnosti
0	6	0,18	6	0,18
1	7	0,21	13	0,39
2	14	0,42	27	0,82
3	5	0,15	32	0,97
4	1	0,03	33	1,00

a) 1; b) 42%; c) 13; d) 82%

5.2 Kvalitativní znaky

Nejčetnější hodnota (kategorie) statistického znaku x v daném statistickém souboru se nazývá **modus** a označuje se „stříškou“, tedy $\hat{x}$.

Nejčetnější hodnota nemusí existovat jediná, statistický soubor, v němž existují dvě nejčetnější hodnoty (samozřejmě se stejnou četností), se nazývá **bimodální**, existuje-li takových hodnot v souboru více, pak se statistický soubor nazývá **multimodální**.

U ordinálního znaku můžeme kromě modu v daném souboru využít ještě další charakteristiku polohy – prostřední hodnotu v souboru statistických jednotek uspořádaných podle hodnoty znaku.
Medián představuje hodnotu odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle ordinálního ukazatele x, to je takovou hodnotu, kdy existuje stejný počet jednotek v souboru s menší nebo stejnou hodnotou znaku a stejný počet jednotek s větší nebo stejnou hodnotou (kategorií). Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje pochopitelně žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou (sousední) dvě a medián se pak definuje jako hodnota menší z nich.

5.3 Kvantitativní znaky

5.3.1 Četnosti

Základní metodou zpracování číselných dat velkého rozsahu je **rozdělení četnosti**. Příkladem je náš soubor Firma (viz Příloha), který obsahuje kvantitativní znak Věk s údaji o 200 pracovnících Firmy.

Rozdělení četnosti představuje počet údajů, které přináleží každému ze zadaných nepřekrývajících se intervalů nazývaných **třídami**. Třída je v našem příkladu definována jako interval těch hodnot znaku Věk, které jsou větší, případně se rovnají 18 a současně jsou menší než 23. U každé třídy rozeznáváme **dolní hranici, horní hranici a šířku třídy**. Z Tabulky 3.1. vyplývá, že se ve zmíněné třídě nachází 7 hodnot, dolní hranice této třídy je 18, horní hranice je 23 a šířka třídy je 5. Třídy v rozdělení četnosti musejí splňovat následující podmínku: každý údaj z analyzovaného souboru leží právě v jediné třídě. Z této podmínky vyplývají 2 důležité vlastnosti tříd:

- třídy se vzájemně nepřekrývají,
- všechny třídy pokrývají celou oblast hodnot dat.

Navíc požadujeme 3. vlastnost:

- šířka všech tříd je stejná.

Četnost třídy je definována jako počet hodnot, které přísluší do této třídy. V našem příkladě je četnost třídy rovna 7. V této souvislosti definujeme ještě další používané pojmy:

Rozpětí *R* představuje rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou dat, tedy:

$$R = \max x_i - \min x_i ,$$

kde x_i jsou jednotlivá data. V našem příkladu je

$$R = 62 - 18 = 44.$$

V metodě rozdělení četnosti se nejprve stanoví počet tříd, který zřejmě závisí na množství analyzovaných dat, tj. počtu statistických jednotek. Počet tříd nesmí být příliš velký. Čím menší je počet jednotek, tím menší musí být zároveň počet tříd, jinak by některé třídy neobsahovaly žádná data, byly by tak „zbytečné“. Na druhou stranu nesmí být počet tříd ani příliš malý, pak by totiž výsledné rozdělení četnosti poskytovalo jen malou informací o analyzovaném souboru. Představte si například krajní situaci s jedinou třídou, kde se nachází všechna data. Takové extrémní „rozdělení četnosti“ nedává o rozdělení hodnot v souboru prakticky žádnou informaci. Počet tříd je někdy přirozeně určen věcnou podstatou dat, kdy šířka třídy je např. dána předpisy, tradicí nebo zkušenostmi. Pokud tomu tak není, pak pro stanovení počtu tříd (intervalů) k se často používá tzv. **Sturgersovo pravidlo**: $$k = Round\left(3{,}3\log_{10}(n)\right)+1,$$

kde k je počet tříd, n je počet hodnot kvantitativního znaku, jež jsou k dispozici, výraz $Round(a)$ označuje zaokrouhlení čísla a na celé číslo. Pro náš příklad je

$$k = Round\left(3{,}3\log_{10}(200)\right)+1 = Round\left(3{,}3\cdot 2{,}3\right)+1 = Round\,(7{,}59) + 1 = 8 + 1 = 9.$$

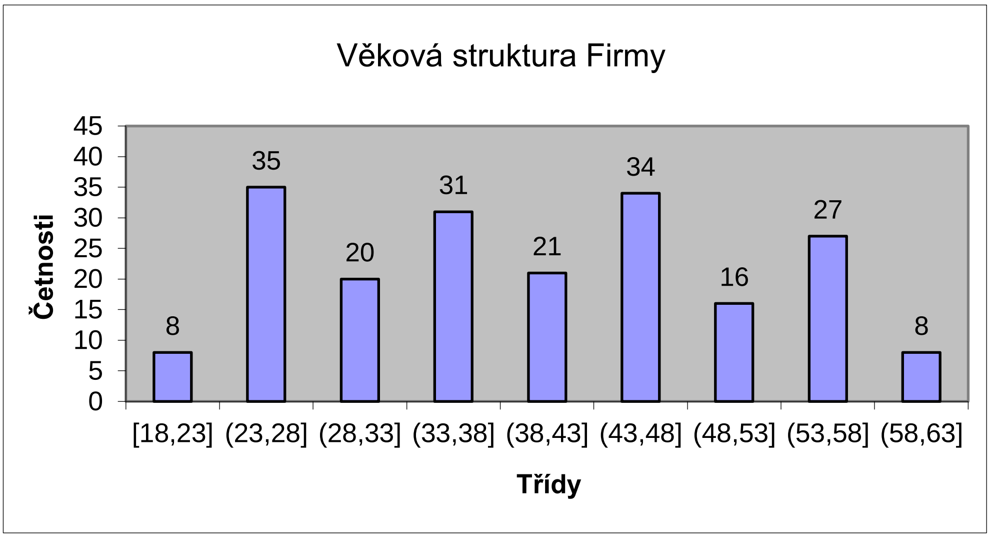
Počet tříd v našem příkladu je podle Sturgersova pravidla roven 9. Konkrétní třídy stanovíme tak, aby levá hranice 1. třídy, označíme ji L, byla menší (nebo rovna) než minimální hodnota v souboru označená $\min x_i$ a pravá hranice 9. třídy, označíme ji P, byla větší (nebo rovna) než maximální hodnota v souboru $\max x_i$. V našem příkladu jsme konkrétně zvolili $L = 18$ a $P = 63$. Šířku třídy dostaneme tak, že rozdělíme celou oblast pokrytou třídami na k stejných intervalů, přičemž k je předem stanovený počet tříd. Šířka třídy z tedy je $z = (P - L)/k$,

konkrétně v našem příkladu obdržíme $z = (63 - 18)/9 = 5$.

Kumulativní četnost v dané třídě je součet četností všech předchozích tříd a četnosti dané třídy. **Relativní četnost** dané třídy je podíl její četnosti a celkového počtu dat. V našem příkladu je relativní četnost třídy "větší rovno 18 a zároveň menší než 23" rovna 7/200 = 0,035. **Kumulativní relativní četnost** dané třídy je součet relativních četností všech předchozích tříd a dané třídy.

Histogram četnosti představuje sloupcový graf znázorňující rozdělení četnosti pro kvantitativní znak. Spojením středů horních základen jednotlivých sloupců v histogramu lomenou čarou získáme **polygon četnosti**.

Třídy	Četnost	Kumulativní četnost	Relativní četnost	Kumulat. relat. četnost
[18,23]	8	8	0,040	0,040
(23,28]	35	43	0,175	0,215
(28,33]	20	63	0,100	0,315
(33,38]	31	94	0,155	0,470
(38,43]	21	115	0,105	0,575
(43,48]	34	149	0,170	0,745
(48,53]	16	165	0,080	0,825
(53,58]	27	192	0,135	0,960
(58,63]	8	200	0,040	1,000



Obrázek 15: Histogram

Jak je vidět z našeho příkladu, rozdělení četnosti jako statistická metoda poskytuje komplexní pohled na sledovanou problematiku věkové struktury zaměstnanců Firmy.

5.3.2 MODUS A MEDIÁN

Nejčetnější hodnota statistického znaku *x* v daném statistickém souboru se nazývá *modus* a označuje se $\hat{x}$. Avšak u kvantitativních dat, zejména pak spojitých, ztrácí modus na významu, neboť s tím, jak mohou hodnoty nabývat libovolných čísel, stává se zřídka, že se stejné hodnoty vícekrát opakují. Nastává situace, kdy módem je každá hodnota s počtem opakování 1. Proto v případě kvantitativních dat pojem modus modifikujeme a používáme pojem **modální třída**, což je nejčetnější třída v daném rozdělení četnosti. Modální třída pak ovšem není jediné číslo, jako v případě modu, ale celý interval čísel, jehož velikost závisí na zvolené metodě rozdělení četnosti. Může se tedy stát (možná pro někoho poněkud paradoxně), že modus neleží v modální třídě.

Medián představuje hodnotu odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle kvantitativního znaku *x*, to je takovou hodnotu, kdy existuje stejný počet jednotek v souboru s menší nebo stejnou hodnotou znaku a jednotek s větší nebo stejnou hodnotou. Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje pochopitelně žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou (sousední) dvě a medián se pak definuje jako hodnota menší z nich. V případě kvantitativního znaku se v literatuře můžete setkat s tím, že se medián definuje jako aritmetický průměr těchto dvou sousedních hodnot.

5.3.3 KVANTILY

Mezi charakteristiky polohy patří také tzv. kvantily. **Kvantil** je taková hodnota, která rozděluje (uspořádaný) soubor hodnot určitého znaku na dvě specifikované části. Jedna obsahuje statistické jednotky s hodnotami, které jsou menší nebo rovny kvantilu, druhá obsahuje hodnoty, které jsou větší, nebo se rovnají kvantilu.

Přesněji, **p-procentní kvantit** x_p je nejmenší hodnota znaku, pro kterou platí:

1. alespoň *p* procent všech jednotek má hodnotu menší nebo rovnu x_p,

2. alespoň (100 – *p*) procent všech jednotek má hodnotu větší (eventuálně rovnu) x_p.

Podle této definice je medián 50-procentním kvantilem. Je obvyklé, že 25 % a 75 % kvantily nazýváme **kvartily** (dolní a horní). Dále 10 %, 20 %, 30 %,...,90 % kvantily nazýváme **decily**, 1 %, 2 %, 3 %,..., 99 % kvantily se nazývají **percentily**

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Uvažujme následující soubor 21 nákupů v supermarketu uspořádaných podle velikosti:
102, 121, 123, 123, 123, 123, 215, 215, 233, 289, 320, 320, 320, 435, 450, 450, 500, 550, 580, 876, 1236.
Stanovte 20 a 25 % kvantily: x_{20}, x_{25}.

Řešení.
Víme, že 20 % z 21 jednotek je 4,2. Ukážeme, že pro 20 % kvantil platí: $x_{20} = 123$. Je tedy splněna druhá podmínka z definice kvantilu, totiž, že více než 80 % jednotek má hodnotu větší nebo rovnu 123.

Ze stejného důvodu je číslo 123 *p*-procentním kvantilem pro každé *p* z intervalu (9,52; 28,57], tedy speciálně platí $x_{25} = 123$. Jak je vidět, pro různé hodnoty *p* dostáváme stejný *p* % kvantil. Pro konkrétní hodnotu *p* však v souboru existuje pouze jediný kvantil! Z tohoto důvodu je v definici kvantilu podmínka, že jde o nejmenší hodnotu splňující podmínky 1 a 2.

5.3.4 PRŮMĚRY

Aritmetický průměr stanovíme tak, že sečteme jednotlivé výsledky měření nebo zjišťování a dělíme celkový součet počtem jednotek. Rozlišujeme přitom průměr z celého souboru údajů (např. všech obyvatel republiky), nebo jen z určitého vzorku – výběru (např. náhodně dotazovaných chodců na Univerzitním náměstí v Karviné). Ten první nazýváme **populačním průměrem** a označujeme jej řeckým písmenem μ (mí), pro ten druhý používáme označení x s horním pruhem, tedy $\bar{x}$ a nazýváme jej **výběrovým průměrem**. Zda se jedná o výběrový nebo populační průměr, závisí na konkrétní situaci. Vybereme-li z populace všechny prvky, pak výběrový a populační soubor budou totožné. Matematické vyjádření je následující:

populační průměr: $$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ , \tag{5.1}$$

výběrový průměr: $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{5.2}$$

Přitom N představuje počet statistických jednotek v populačního souboru, n představuje počet jednotek v příslušného výběru. Pro aritmetický průměr platí:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = 0 \text{, resp. } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \, .$$

5.3.5 VARIAČNÍ ROZPĚTÍ, ROZPTYL, SMĚRODATNÁ ODCHYLKA

Variační rozpětí je dáno vztahem: $R = MAX - MIN$.

Rozptyl je aritmetickým průměrem kvadrátů odchylek od aritmetického průměru. Podle toho, zda se jedná o rozptyl z celého souboru – celé populace, nebo jen rozptyl z jistého vzorku – výběru z této populace, rozlišujeme populační rozptyl, kterému říkáme jednoduše **rozptyl**, označujeme jej σ^2 ("sigma na druhou"), a **výběrový rozptyl**, označujeme jej s^2 ("es na druhou"). Jedná se o analogii s průměrem a výběrovým průměrem. Vzorce pro výpočet průměru a výběrového průměru se formálně nelišily, u rozptylů však dochází k drobné odlišnosti obou vzorců. Zatímco u rozptylu (populačního) se součet kvadrátů dělí počtem všech sčítanců, u výběrového rozptylu se součet čtverců dělí počtem sčítanců zmenšeným o jeden.

Vzorce vypadají následovně:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \mu^2 , \tag{5.3}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} . \tag{5.4}$$

.

Směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu. Ve shodě s předchozí terminologií rozlišujeme **populační směrodatnou odchylku**, označujeme ji σ, a říkáme jí **směrodatná odchylka**, a **výběrovou směrodatnou odchylku**, která je odmocninou z výběrového rozptylu, označujeme s.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Z osobních záznamů vybraných pěti zaměstnanců jisté firmy o počtu dnů nepřítomnosti v minulem roce dostáváme tato data:

Osobní číslo zaměstnance	Počet dnů nemoci
10786	3
10954	3
21334	4
23156	7
36511	8

Řešení.
Jaký je průměrný počet dnů nepřítomnosti, rozptyl a směrodatná odchylka?

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3+3+4+7+8}{5} = 5$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{3^2 + \ldots + 8^2 - 5 \cdot 5^2}{4} = \frac{22}{4} = 5{,}5$$

$$s = \sqrt{5{,}5} = 2{,}35$$

Průměrný počet dnů nepřítomnosti je 5, rozptyl je 5,5 a směrodatná odchylka je 2,35 dne.

5.3.6 Variační koeficient

Variační koeficient je nástroj nezávislý na měrných jednotkách. Používá se často jako míra rizika cenných papírů při investování. Definujeme jej jako podíl průměru a směrodatné odchylky a vyjadřujeme jej často v procentech:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \text{resp.} \quad v = \frac{s}{\bar{x}}, \tag{5.5}$$

podle toho, jedná-li se o populační, resp. výběrový variační koeficient. Pro vyjádření variačního koeficientu v procentech (z průměru) násobíme výraz ve (5.5) číslem 100.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Aritmetický průměr denních cen akcie A za uplynulý rok je 580 Kč, přičemž směrodatná odchylka je 150 Kč. Stejně tak pro akcie B byl průměr 270 Kč a směrodatná odchylka je 90 Kč. U kterých akcií kolísala cena více?

Řešení.
Kolísání ceny akcií vyjádříme pomocí variačního koeficientu (5.5):

25,8 %, resp. 33,3 %.

Z výpočtu je zřejmé, že cena akcií B kolísala více než A. Při finančních analýzách slouží jak směrodatná odchylka, tak zejména variační koeficient, jako **míra rizika**. Proto můžeme konstatovat, že akcie A jsou méně rizikové, než akcie B.

5.3.7 KOEFICIENT ŠIKMOSTI

Koeficient šikmosti vyjadřuje tvar rozdělení četnosti pomocí jediného čísla. Koeficient šikmosti definujeme následovně:

$$S_k = \frac{3(\mu - \tilde{x})}{\sigma}\ , \tag{5.6}$$

kde μ je populační aritmetický průměr a je medián. Koeficient *výběrové šikmosti* má analogický tvar, populační charakteristiky μ, resp. σ jsou nahrazeny výběrovými charakteristikami , resp. s, tedy

$$s_k = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s}\ .$$

Pokud je tato šikmost rovna nule, potom je histogram četnosti symetrický v tom smyslu, že medián a aritmetický průměr (případně i modus) jsou stejné. Koeficient šikmosti je tím menší (záporný), čím je graf polygonu četnosti více zešikmen doleva, naopak, šikmost je tím větší (kladná), čím je graf zešikmen více doprava.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Kreditní kancelář obchodního domu TREFA zasílá pravidelně svým zákazníkům výkaz o dlužných částkách. Ty jsou zaznamenány v tabulce:

337,00	563,20	109,70	450,90
570,50	398,90	501,20	594,90
99,70	625,40	201,50	421,60
759,30	214,70	99,60	344,20
486,70	360,50	637,50	185,60
352,60	177,60	327,60	681,00
214,90	827,00	539,10	397,30
59,70	300,60	150,00	790,10
212,50	501,00	417,20	271,80
948,60	199,20	250,10	514,50

a. Analyzujte soubor metodou rozdělení četnosti.
b. Nalezněte aritmetický průměr, medián a modální třídu dlužných částek.
c. Nalezněte rozpětí, směrodatnou odchylku, variační koeficient a šikmost dlužných částek.

Řešení.

a. Podle Sturgersova pravidla stanovte počet tříd $k = 6$. Protože minimální hodnota uvedeného souboru dat je $\min = 59{,}70$ a maximální hodnota $\max = 948{,}60$, je vhodné volit

dolní hranici první třídy $L = 50$ a horní hranici poslední třídy $P = 950$. Šířka každé třídy je (950-50)/6 = 150.
Znáte-li četnosti jednotlivých tříd, sestrojíte histogram četnosti. Jedná se o sloupcový graf, jehož každý sloupec má výšku přímo úměrnou četnosti příslušné třídy.

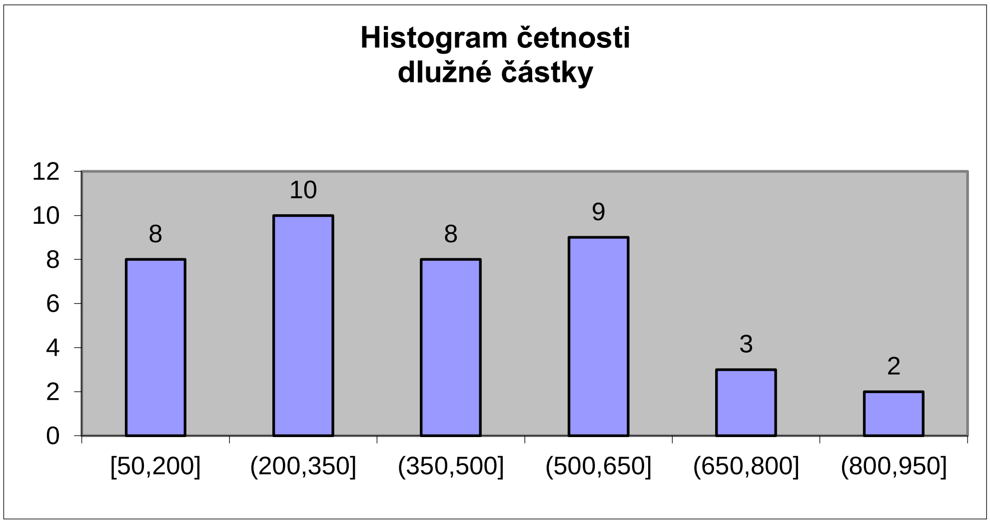
Třída	Četnost
[50,200]	8
(200,350]	10
(350,500]	8
(500,650]	9
(650,800]	3
(800,950]	2

b. Aritmetický průměr souboru Dlužné částky stanovíte podle (5.1):

$$\mu = 402{,}375 \ .$$

Medián Dlužné částky je hodnota odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle znaku Dlužné částky. Protože však je počet jednotek v souboru sudý, je to hodnota odpovídající 20. hodnotě v uspořádaní od nejnižší do nejvyšší, tedy 360,50.

Z Obr. 16 vyplývá, že modální třída příslušná k výše uvedenému rozdělení četnosti je interval (200; 350].



Obrázek 16: Histogram četnosti dlužné částky

c. Rozpětí R vypočítáme jako R = 948,6 – 59,7 = 888,9.
Směrodatná odchylka

$$\sigma = 217{,}65 \ .$$

Variační koeficient: V = 54,09 % .
Šikmost: S_k = 0,577, tedy histogram četnosti je nesymetrický, mírně vychýlený směrem doprava.

SHRNUTÍ KAPITOLY

Nejpoužívanějšími charakteristikami polohy jsou modus, medián a průměry. Nejběžnější z průměrů je aritmetický průměr.
Medián je jednoduchou a srozumitelnou mírou, na rozdíl od průměru není ovlivněn extrémními hodnotami. Hodí se pro charakterizaci nesymetricky rozdělených dat.
Modus může být poněkud zkreslující charakteristikou polohy zejména v případech nesymetrického rozdělení dat. Často jej například používají prodejci při objednávání zboží k maloobchodnímu prodeji. U spojitého kvantitativního znaku je vhodnější používat modální třídy, což je nejčetnější třída v daném rozdělení četnosti.
Mezi charakteristiky polohy patří také kvantily. *P*-% kvantil je taková hodnota, která rozděluje (uspořádaný) soubor hodnot určitého znaku na dvě specifikované části.
Kromě charakteristiky polohy je často zapotřebí charakterizovat také proměnlivost – variabilitu hodnot statistického znaku. Při hodnocení variability poskytuje rozpětí R jednoduchou charakteristiku, jeho nevýhodou je, že uvažuje jen dvě krajní hodnoty, a proto může být nereprezentativní.
Rozptyl σ^2, resp. s^2 a směrodatná odchylka σ, resp. s, využívají všech hodnot, i když vyžadují náročnější výpočet i interpretaci. Ke srovnávání variability dvou či více souborů dat je nejvhodnější variační koeficient V, resp. v. Koeficient šikmosti je mírou symetrie dat.

OTÁZKY

Ano či ne?...

1) Souhrn statistických jednotek stejného vymezení tvoří statistický soubor.
2) Diskrétní statistický znak nabývá izolovaných nečíselných kategorií.
3) Modus lze použít pouze pro kvalitativní data.
4) Medián je hodnota odpovídající prostřední jednotce v souboru jednotek uspořádaných podle ordinálního ukazatele.
5) Rozdělení četnosti představuje základní metodu analýzy statistických dat.

Doplňte...

6) Jsou-li kategorie statistického znaku uspořádány podle nějakého hlediska, jde o ________________.
7) Mají-li v souboru dvě kategorie jistého znaku stejnou četnost, jedná se o znak ________________.
8) Výchozím zdrojem dat pro statistickou analýzu je statistický soubor ve tvaru ________________.

9) Při sudém počtu statistických jednotek neexistuje žádná prostřední jednotka, prostřední jednotky jsou dvě sousední a medián se pak definuje jako hodnota ________________.

10) Modus lze stanovit pro každý kvalitativní znak, zatímco medián pouze pro znak __________________.

11) Následující soubor dat dokumentuje počet dní opoždění odhadovaného termínu ukončení 30 konstrukčních projektů stavební firmy (záporné hodnoty znamenají ukončení projektu v předstihu):

4	31	-9	14	8	36
23	16	15	7	-3	12
-6	23	-2	6	5	-8
12	6	0	21	11	6
-20	11	4	-1	7	-2

Nalezněte aritmetický průměr, medián, modus, rozpětí a směrodatnou odchylku.

12) Tabulka uvádí průměrné měsíční příjmy v některých průmyslových odvětvích, dosahované v roce 2000.

Průmysl	Příjem (Kč)
Hutnický	16 400
Elektrotechnický	14 200
Strojírenský	15 600
Chemický	14 200
Oděvní	13 400
Dřevařský	16 400
Potravinářský	13 900
Polygrafický	14 200

a. Vypočtěte výběrový průměr, medián a modus.
b. Vypočtěte výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, variační koeficient a šikmost.

13) Pro jistý výběrový soubor dat platí:

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 18 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 82$$

a. Vypočtěte výběrový průměr.
b. Vypočtěte výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku.

14) Následující tabulka obsahuje údaje o věku skupiny čtyř osob. Určete věk osoby C.

Osoba	Věk	Odchylka od $\bar{x}$
A	17	-8
B	-	+7
C	-	-
D	-	-4

15) Během 50 týdnů dosáhla firma prodávající počítače těchto výsledků:

Počet prodaných počítačů za 1 týden	Počet týdnů
0	28
1	15
2	6
3	1
více než 3	0

Vypočtěte charakteristiky polohy a variability týdenního odbytu firmy.

ODPOVĚDI

Ano či ne?...

1) Ano
2) Ne
3) Ne
4) Ano
5) Ano

Doplňte ...

6) Ordinální znak
7) Bimodální
8) Datové matice
9) Menší z nich
10) Ordinální

11) $\mu = 7{,}57$; $\tilde{x} = 6$; $\hat{x} = 6$; $R = 56$; $\sigma = 11{,}79$

12) **a.** $\bar{x} = 14788$; $\hat{x} = \tilde{x} = 14200$

b. $s^2 = 1372678{,}6$; $s = 1171{,}6$; $v = 7{,}92\%$; $s_k = 1{,}5$

13) **a.** $\bar{x} = 3$

b. $s^2 = 5{,}6$; $s = 2{,}37$

14) věk C = 30

15) $\mu = 0{,}6$; $\tilde{x} = 0$; $\hat{x} = 0$; $\sigma^2 = 0{,}6$; $\sigma = 0{,}77$

6 DISKRÉTNÍ A SPOJITÉ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

V této kapitole se nejprve seznámíme se spojitou a diskrétní náhodnou veličinou. V dalším textu se pak budeme věnovat diskrétnímu rozdělení pravděpodobnosti (stejnoměrné, binomické, Poissonovo). V ekonomické oblasti je to především tam, kde hledáme odpověď na otázky spojené s množstvím, resp. kvalitou výroby a služeb, nabídkou a poptávkou, počtem zákazníků (klientů, pacientů) aj. O který typ se v určité situaci jedná, víme obvykle ze zkušenosti, v konkrétním případě je však obvykle zapotřebí stanovit předem neznámé parametry těchto rozdělení. Dále se seznámíme se spojitým rozdělením pravděpodobnosti (stejnoměrným, normálním, exponenciálním).

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- určit, zda se jedná o předpis diskrétní náhodné veličiny,
- vypočítat pravděpodobnost pro diskrétní pravděpodobnostní modely,
- vypočítat pravděpodobnost pro spojité pravděpodobnostní modely,
- uvést konkrétní příklady pravděpodobnostních modelů.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, Binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení, spojité rozdělení pravděpodobnosti, exponenciální rozdělení, normální rozdělení.

6.1 Diskrétní a spojitá náhodná veličina

Diskrétní náhodnou veličinou nazýváme takovou veličinu, jež může nabývat omezeně nebo neomezeně mnoha hodnot, jimž lze přidělit celočíselné kódy. **Spojitou náhodnou veličinou** nazveme pak takovou náhodnou veličinu, jejímiž možnými hodnotami jsou všechna reálná čísla z daného intervalu (omezeného nebo neomezeného). I zde je zřejmá analogie s diskrétními a spojitými statistickými znaky. Náhodná veličina je tedy matematickým modelem (matematickým zobecněním) statistického znaku.

Pravidlo (předpis), které každé číselné hodnotě nebo intervalu hodnot přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu, se nazývá **rozdělením náhodné veličiny**. Rozdělení náhodné veličiny budeme vyjadřovat dvěma způsoby, z nichž každý má své přednosti a nedostatky.

Prvním z prostředků popisu rozdělení náhodné veličiny je **distribuční funkce,** která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty ne větší, než toto číslo. Distribuční funkci náhodné veličiny X označíme F, je to tedy funkce definovaná pro všechna reálná čísla s hodnotami v intervalu $[0,1]$, což zapisujeme takto: $F : \mathbf{R} \to [0,1]$. Podle výše uvedené definice platí:

$$F(x) = P(X \leq x), \tag{6.1}$$

kde výraz na pravé straně (5.1) označuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x.

Distribuční funkce má tyto vlastnosti:

1. Hodnoty distribuční funkce leží mezi 0 a 1, neboť jsou to jisté pravděpodobnosti a pro ty platí stejné omezení.

2. Distribuční funkce je funkcí neklesající, tj. pro všechna $x_1 > x_2$ platí:

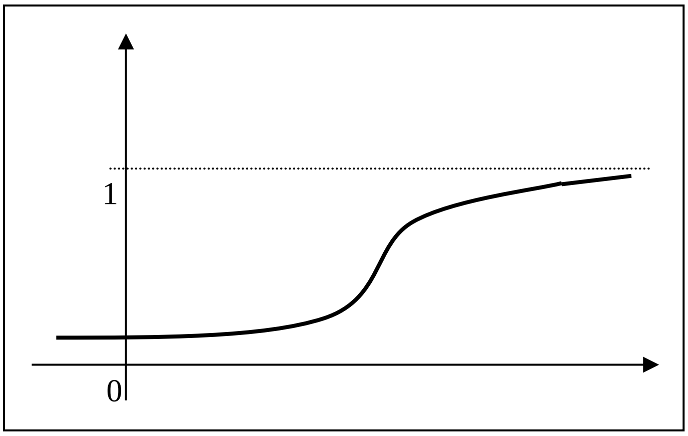
$$F(x_2) \geq F(x_1) \ .$$

Tato vlastnost vyplývá z definice (6.1), neboť pravděpodobnost, že hodnota padne do větší množiny, musí být rovněž větší.

3. Pro krajní hodnoty distribuční funkce platí:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Uvedené vlastnosti jsou znázorněny na Obr.17, kde je uveden typický tvar distribuční funkce spojité náhodné veličiny.



Obrázek 17: Distribuční funkce

Pomocí distribuční funkce můžeme udávat jak rozdělení diskrétní, tak i rozdělení spojitých náhodných veličin. Rozdělení diskrétní náhodné veličiny *X* lze specifikovat také tzv. **pravděpodobnostní funkcí** $p(x)$, která každému *x* přiřazuje odpovídající pravděpodobnost: $p(x) = P(X = x)$. (6.2)

Pravděpodobnostní funkce $f(x)$ splňuje vztah:

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1 , \tag{6.3}$$

neboť náhodná veličina nabude jistě některé z hodnot *x*, dále platí:

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} p(x) , \tag{6.4}$$

tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu [a,b], je rovna součtu pravděpodobností hodnot z tohoto intervalu.

Pravděpodobnostní funkci $f(x)$ vyjadřujeme nejčastěji v matematické formě, tabulkou hodnot, nebo sloupcovým grafem, kde na vodorovné ose jsou hodnoty náhodné veličiny *X* a na svislé ose pravděpodobnosti $f(x)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Zákazník potřebuje nakoupit zboží ve 4 odděleních obchodního domu. V každém z oddělení je pravděpodobnost toho, že bude ihned obsloužen bez čekání, rovna 0,5. Náhodná veličina *X* bude označovat počet oddělení, v nichž bude zákazník ihned obsloužen až do prvního oddělení, kde se bude muset postavit do fronty. Stanovte pravděpodobnostní funkci $p(x)$ a vyjádřete ji tabulkou.

Řešení.

Náhodná veličina *X* může nabývat hodnoty 0,1,2,3,4.

Pro $x = 0$ (žádné oddělení s obsluhou bez čekání, již v prvním oddělení bude zákazník čekat ve frontě) je příslušná pravděpodobnost $p(0) = 0{,}5$.

Pro $x = 1$ (jedno oddělené absolvuje zákazník bez čekání, ve druhém musí čekat) je pravděpodobnost rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů, neboť se jedná o jevy nezávislé, tedy $p(1) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Pro $x = 2,3,4$ vypočteme pravděpodobnosti analogicky:

$$p(2) = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0.125,$$

$$p(3) = 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625,$$

$$p(4) = 0{,}5^4 = 0{,}0625.$$

Matematickým předpisem můžeme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X zapsat takto:

$$p(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^x \text{ pro } x = 0,1,2,3,$$

$$p(x) = 0{,}5^4 \text{ pro } x = 4.$$

Tabulkou lze hodnoty pravděpodobnostní funkce zadat takto:

x	0	1	2	3	4
***p*(*x*)**	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

Obraťme se nyní ke spojité náhodné veličině. Vedle dříve uvedeného způsobu pomocí distribuční funkce může být rozdělení spojité náhodné veličiny dáno tzv. **hustotou pravděpodobnosti** $f(x)$, což je nezáporná funkce splňující podmínku:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 .$$

Mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí platí následující vzájemné vztahy: hustota je derivací distribuční funkce:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} . \tag{6.5}$$

Tato rovnost platí pro všechna x, kde má distribuční funkce derivaci. Naopak, ze vztahu (6.5) plyne, že distribuční funkce náhodné veličiny je neurčitým integrálem (primitivní funkcí) k funkci hustoty, tj.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$

6.2 Diskrétní pravděpodobnostní modely

Diskrétní náhodná veličina je taková množina, kde jednotlivé prvky lze očíslovat přirozenými čísly, přičemž každému prvku je navíc přiřazena určitá pravděpodobnost. Klasickým příkladem diskrétní náhodné veličiny je známá hrací kostka.

6.2.1 Stejnoměrné rozdělení

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X, která nabývá právě k různých hodnot: 1, 2, ..., k

se stejnou pravděpodobností $P(x) = \frac{1}{k}$ pro $x = 1,...,k$.

Říkáme, že náhodná veličina X má **stejnoměrné rozdělení pravděpodobnosti**.

Snadno lze odvodit, že střední hodnota je $E(X) = \frac{k+1}{2}$,

a pro rozptyl dostáváme $Var(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Hod kostkou se šesti oky je populárním modelem náhodné veličiny X která nabývá 6 různých hodnot 1,...,6 se stejnou pravděpodobností 1/6 . Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny.

Řešení.

Střední hodnota $E(X) = (6+1)/2 = 3{,}5$, rozptyl $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2{,}92$.
Stejnoměrné rozdělení pravděpodobnosti má samo o sobě malý praktický význam, slouží jako model stejně pravděpodobných jevů. Svojí jednoduchostí se hodí dobře jako východisko ke složitějším modelům.

6.2.2 BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

Mnoho procesů poskytuje výstupy, které můžeme zařadit do dvou kategorií. Například výrobky procházející výstupní kontrolou se klasifikují jako "dobré" a "zmetky", pracovníky firmy jistého dne klasifikujeme jako "přítomen" a "nepřítomen", uchazeče v konkurzu označíme "přijat", "nepřijat", apod. Náhodný pokus tohoto typu, tj. se dvěma alternativními navzájem se vylučujícími výsledky, nazýváme **Bernoulliův proces**, někdy také **alternativní rozdělení**.

Binomické rozdělení pravděpodobnosti $P(x|n,p)$ vyjadřuje pravdě-podobnost, že při n-krát opakovaném Bernoulliově procesu nastane x krát úspěch a n-x krát neúspěch:

$$P(x \mid n, p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x (1-p)^{n-x} ,$$

kde n a p jsou parametry binomického rozdělení.
Střední hodnotu náhodné veličiny X, která má binomické rozdělení s parametry n a p, lze vypočíst podle vztahu: $E(X) = n \cdot p$.

Rozptyl náhodné veličiny X, která má binomické rozdělení s parametry n a p, je dán vztahem: $Var(X) = np(1 - p)$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Jistá mezinárodní marketingová laboratoř odhaduje, že pouze 50 procent výrobků daného podniku je schopno konkurovat zahraniční produkci. Jaká je pravděpodobnost, že právě 4 ze 6 výrobků této firmy jsou úspěšné.

Řešení.

Ze zadání dostáváme n = 6, p = 0,5, x = 4, podle (6.3) $P(4|\ 6,\ 0{,}5) = 0{,}234$. Vypočítáme $E(X) = 6\cdot 0{,}5 = 3$, $Var(X) = 3\cdot 0{,}5 = 1{,}5$.

6.2.3 POISSONOVO ROZDĚLENÍ

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu,
- zákazníci přicházející do prodejny,
- automobily zastavující u benzínového čerpadla.

Označme X náhodnou veličinu, která představuje počet výskytu takového jevu v daném časovém intervalu délky t, např. za jednu minutu, jednu hodinu apod.

U výše jmenovaných jevů můžeme předpokládat splnění následujících 3 vlastností:

1. Počet výskytu jevu v daném intervalu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu.
2. Střední hodnota počtu výskytů jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu.
3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu.

Náhodný pokus splňující tyto tři podmínky nazýváme **Poissonův proces**. Náhodná veličina X představující počet výskytů jevu Poissonova procesu má **Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti** definované předpisem pro pravděpodobnostní funkci:

$$P(x|\lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!},$$

pro x = 0,1,2,... . Ve vzorci představují λ, t *parametry* Poissonova rozdělení, λ (lambda) má význam *intenzity* Poissonova procesu, t představuje délku časového intervalu.

Střední hodnota náhodné veličiny X mající Poissonovo rozdělení s parametry λ, t má tvar $E(X) = \lambda t$, a pro rozptyl platí $Var(X) = \lambda t$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení.

Podle vzorce dostáváme $P(2\,|\,4{,}1)=\dfrac{(4)^2e^{-4}}{2!}=0{,}146$.

Střední hodnota $E(X)=4$, rozptyl $Var(X)=4$, směrodatná odchylka $\sigma=\sqrt{4}=2$.

6.3 Spojité pravděpodobnostní modely

Spojitou náhodnou veličinou nazveme takovou náhodnou veličinu, jejímiž možnými hodnotami jsou všechna reálná čísla z daného intervalu (omezeného nebo neomezeného). Jsou to například výsledky různých testů, rozměry součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, čekací doby ve frontách, chyby měření a jiné.

6.3.1 Stejnoměrné rozdělení

Mějme spojitou náhodnou veličinu X, která nabývá libovolných reálných číselných hodnot z intervalu $[a,b]$. Funkce $f(x)$, které říkáme hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny, je dána předpisem:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{b-a} \quad \text{pro } x\in[a,b],\\
&= 0 \quad \text{jinde.}
\end{aligned}
$$

Střední hodnotu, resp. rozptyl dává vzorec: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, resp. $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Mějme nyní interval $[c,d]$, který je částí intervalu $[a,b]$, tj. $a\le c<d\le b$. U náhodné veličiny X se stejnoměrným rozdělením pravděpodobnosti je pravděpodobnost jevu spočívajícího v tom, že X nabývá hodnoty z intervalu $[c,d]$, dána vztahem $P(c\le X\le d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Autobusy odjíždějí z určité zastávky během dne pravidelně každých 15 minut. V náhodnou dobu přijdete na zastávku.
a) Jaká je pravděpodobnost, že budete na autobus čekat dobu mezi 5 až 10 minutami?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat alespoň 12 minut?
c) Stanovte střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání.

Řešení.
Nechť X je spojitá náhodná veličina s následující hustotou:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{15} \quad \text{pro} \quad 0\le x\le 15,\\
&= 0 \quad \text{jinde}.
\end{aligned}
$$

a) S využitím vzorce vypočítáme snadno $P(5 \le X \le 10) = \dfrac{10-5}{15-0} = \dfrac{1}{3}$.

b) Analogicky obdržíme $P(X \ge 12) = P(12 \le X \le 15) = \dfrac{15-12}{15-0} = \dfrac{1}{5}$.

c)

$$E(X) = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$$

$$Var(X) = \frac{(15-0)^2}{12} = 18{,}75$$

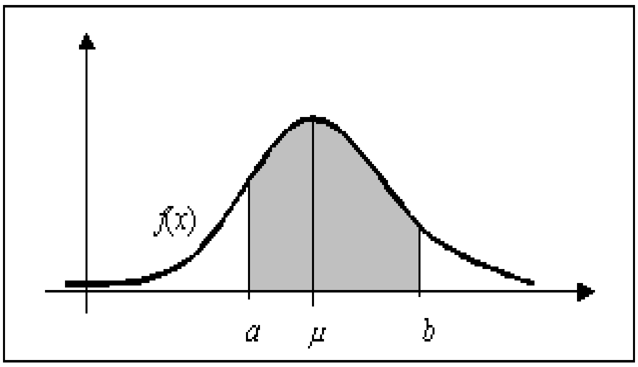
$$\sigma(X) = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33.$$

Střední čekací doba je 7,5 minut, směrodatná odchylka je 4,33 minut.

6.3.2 NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Zcela výjimečnou pozici mezi pravděpodobnostními rozděleními spojité náhodné veličiny má **normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti**. Mnoho reálných skutečností v běžném životě se řídí tímto pravděpodobnostním rozdělením. Jsou to například výsledky různých testů, rozměry a hmotnosti součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, tělesné rozměry lidských jedinců, ostatních živočichů, chyby měření a jiné. Dají se jím aproximovat i některá rozdělení diskrétní. Obecně lze říci, že toto rozdělení je použitelné, způsobuje-li kolísání hodnot náhodné veličiny velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je dána funkcí:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$



Obrázek 18: Pravděpodobnost a hustota normálního rozdělení

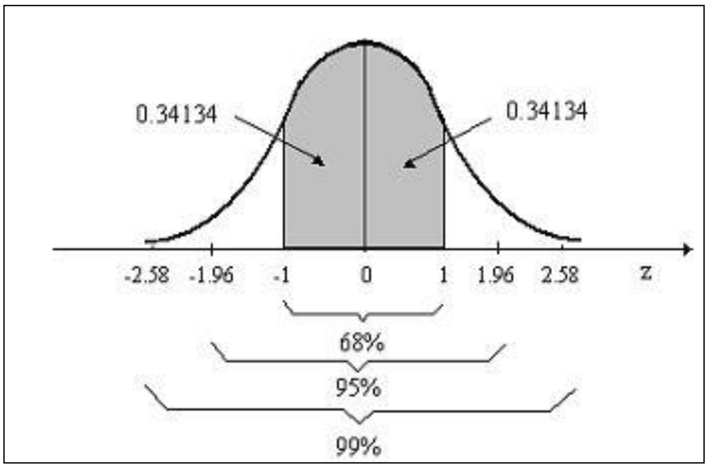
Z praktického hlediska je výhodné vyšetřovat tzv. **normované normální rozdělení**, což je speciální případ normálního rozdělení s hodnotami parametrů $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Tuto náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením označujeme symbolem $N(0,1)$.

Hustota normovaného rozdělení $N(0,1)$ pak má tvar: $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Budeme-li uvažovat namísto náhodné veličiny X, mající normální rozdělení s parametry μ a σ, transformovanou veličinu Z takto $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,

Transformaci nazýváme **standardizace**.

Ještě předtím, než se začnete věnovat výpočtu pravděpodobností u normálně rozdělených veličin, si všimnete významných pravděpodobnostních charakteristik normovaného normálního rozdělení charakterizovaného hustotou, viz Obr. 19.



Obrázek 19: Pravděpodobnosti v normovaném normálním rozdělení

Jak je z obrázku vidět, plocha pod grafem hustoty mezi hodnotami -1 a 1 je rovna 0,683, tedy zaujímá více než 68 % z celkové plochy. Jinak řečeno, v intervalu od mínus do plus jedné směrodatné odchylky od průměru leží 68% procent všech hodnot. V řeči pravděpodobnosti to znamená, že pravděpodobnost, že náhodná veličina Z nabude nějakou konkrétní hodnotu z intervalu [-1,1], je 0,68. Analogicky z obrázku vyplývá, že v intervalu [-1,96 , 1,96] leží 95% všech hodnot, neboli, pravděpodobnost, že veličina Z nabude některou hodnotu z tohoto intervalu, je 0,95. Taktéž lze říci, že v intervalu plus-mínus dvě směrodatné odchylky od průměru leží více než 95% hodnot. Konečně v intervalu [-2,58 , 2,58] leží 99% všech hodnot.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 6

Výrobce limonády v plechovkách zjistil, že průměrná hmotnost plechovky limonády je 330 g se směrodatnou odchylkou 10 g.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná plechovka bude mít hmotnost mezi 325 až 340 gramy?

b) Jaká je pravděpodobnost že hmotnost bude větší než 338 g?

Řešení.

Nejprve budeme počítat pravděpodobnost $P(325 \leq X \leq 340)$. Užijeme transformaci a vypočítáme nové integrační meze

$$z_1 = \frac{325 \quad 330}{10} = \quad 0{,}5\,, \quad z_2 = \frac{340 \quad 330}{10} = 1.$$

Z Tabulky 1 (v Příloze) hodnot normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$, naleznete plochu pod grafem hustoty mezi 0 a 0,5, tj. F(0,5) = 0,191 a protože F(1,0) = 0,341. ze symetrie grafu hustoty N(0,1) platí F(0,5) = F(-0,5). Celkovou pravděpodobnost zjistíme jako součet nalezených pravděpodobností, tedy $P(325 \leq X \leq 340)$ = 0,532. Odpověď na uvedený problém můžete z řeči pravděpodobnosti převést do popisné statistiky takto: V dostatečně velkém souboru plechovek bude mít 53,2 % z nich hmotnost v rozmezí 325 až 340 gramů.

Dále vypočítáte počítat pravděpodobnost $P(X>338)$, opět užitím známé transformace obdržíte

$$z_1 = \frac{338-330}{10} = 0{,}8\,,\ z_2 = +\infty\ .$$

Z Tabulky 1 zjistíte, že hodnotě Z = 0,8 odpovídá hodnota v tabulce 0,288, takže pro hledanou pravděpodobnost bude platit $P(X \geq 338)$ = 0,5 - 0,288 = 0,212 .

6.3.3 EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{\delta}x}$ pro $x \geq 0$,

nazýváme **exponenciálním rozdělením**. Náhodnou veličinou bývá obvykle čas, v němž nastane sledovaný jev.

Distribuční funkce je dána vztahem $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\delta}x}$ pro $x \geq 0$.
Charakteristiky tohoto rozdělení jsou

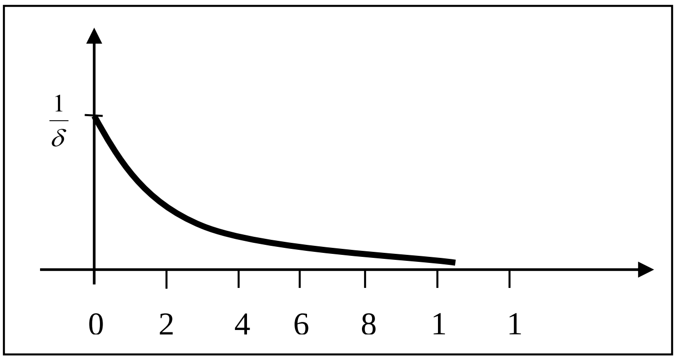
$$E(X) = \delta,$$
$$Var(X) = \delta^2.$$

Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti životnosti výrobků, čekacích dob ve frontách na obsluhu apod.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 7

Střední doba obsluhy zákazníka v určité prodejně je 50 sekund, doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen v době kratší než 30 sekund?

Řešení.
Hledaná pravděpodobnost je $P(X \leq 30) = F(30)$, kde $F(\mathrm{x})$ je distribuční funkce. Přitom je $F(30) = 1 - e^{-\frac{1}{50}30} = 1 - e^{0,6} = 0,451$.



Obrázek 20: Hustota exponenciálního rozdělení

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této kapitole jsme se zabývali některými nejznámějšími pravděpodobnostními modely diskrétní náhodné veličiny. S těmito modely se je možné setkat v běžném životě i při práci v ekonomické, sociální a technické oblasti.

Mezi nejjednodušší modely patří model stejnoměrného rozdělení pravděpodobnosti a alternativní rozdělení pravděpodobnosti, neboli Bernoulliův proces. U prvního z nich se všechny diskrétní veličiny nabývají se stejnou pravděpodobností, u druhého vystupují pouze dvě veličiny (alternativní), každá z nich se nabývá obecně s jinou pravděpodobností, jejich součet však je roven jedné.

Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti modelujeme počty výskytů určitého jevu za určitý časový interval, např. počet příchozích zákazníků do prodejny za hodinu, počet požadavků na spojení v telefonní ústředně za minutu, počet projíždějících automobilů určitým místem na dálnici během dopravní špičky apod. Veličiny s Poissonovým rozdělením patří mezi nejčastější modely diskrétní náhodné veličiny. Od binomického rozdělení se zásadně odlišuje tím, že počet výskytu jevu za časovou jednotku není apriori omezen.

Spojitá náhodná veličina nabývá libovolných reálných číselných hodnot z intervalu $[a,b]$. Jestliže hustota takové náhodné veličiny je konstantní funkcí, hovoříme o stejnoměrném rozdělení pravděpodobnosti.

Zcela výjimečnou pozici mezi pravděpodobnostními rozděleními spojité náhodné veličiny má normální rozdělení. Mnoho reálných skutečností v běžném životě se řídí tímto pravděpodobnostním rozdělením. Jsou to například výsledky různých testů, rozměry součástí vyráběných v hromadném výrobním procesu, tělesné rozměry, chyby měření a jiné. Další v praxi se často vyskytující rozdělení je exponenciální rozdělení. Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti životnosti výrobků, čekacích dob ve frontách na obsluhu apod.

OTÁZKY

1) Rozhodněte, které z následujících předpisů představují diskrétní rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny *X*.

a.

X	*p*(*x*)
0	0,2
1	0,9
2	-0,1

b.

X	*p*(*x*)
-2	0,3
-1	0,3
1	0,3
2	0,3

c.

X	*p*(*x*)
-1	0,25
0	0,65
1	0,10

2) Majitel restaurace zjistil dlouhodobým pozorováním, že 30% účtů je placeno kreditní kartou. Náhodně byly vybrány tři účty. Označme *X* počet z nich placených kreditní kartou. S jakou pravděpodobností jsou alespoň dva účty placeny kreditní kartou?

3)Pozorováním trvajícím mnoho desetiletí se zjistilo, že na každých 1 000 novorozenců připadá průměrně 515 chlapců a 485 děvčat. Uvažujme rodinu se čtyřmi dětmi.

a. S jakou pravděpodobností jsou alespoň dvě z nich děvčata?

b. Jaká je pravděpodobnost, že má rodina čtyři chlapce?

4) Počet nákladních automobilů zastavujících u čerpací stanice za hodinu se řídí ________________ rozdělením pravděpodobnosti.

a. Doplňte chybějící termín.

b. Vypočtěte pravděpodobnost pro $x = 12$ nákladních automobilů.

c. S jakou pravděpodobností zastaví u čerpací stanice během jedné hodiny alespoň 10 nákladních automobilů?

5) Pojišťovací společnost zjistila, že za půl hodiny obdrží v průměru tři oznámení o nehodě pojištěného motorového vozidla.

a. Jaká je pravděpodobnost, že během následujících 20 minut obdrží 4 až 5 oznámení?

b. S jakou pravděpodobností obdrží během následující hodiny alespoň 1 oznámení?

6) Náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 5. Vypočtěte:

a. $P(X < 92)$.
b. $P(X \le 108)$.
c. $P(X \ge 100)$.
d. $P(X < 120)$.
e. $P(90 \le X \le 110)$.
f. $P(99 \le X \le 101)$.
g. $P(99 < X < 101)$.
h. $P(X = 105)$.

7) Testy nového typu radiálních pneumatik ukazují, že jejich průměrná životnost je 40 000 km, směrodatná odchylka životnosti 3 000 km. Předpokládejme, že životnost pneumatik má přibližně normální rozdělení pravděpodobnosti. Jakou délku záruční doby musí výrobce volit, aby podíl reklamovaných výrobků nepřekročil 1% celkové produkce?

8) Výrobce televizních obrazovek uvádí délku průměrné životnosti jednoho typu 15 let. Za předpokladu, že se životnost obrazovky řídí exponenciálním rozdělením, stanovte:
a. dobu t tak, aby obrazovka pracovala bezchybně dobu delší než t s pravděpodobností 0,2.
b. maximální životnost, kterou obrazovka dosáhne se stejnou pravděpodobností jako v **a.**
c. pravděpodobnost, že životnost obrazovky překročí délku 20 let.

ODPOVĚDI

1) a. NE, b. NE, c. ANO
2) 0,216
3) **a**. 0,66 **b**. 0,07
4) **a**. Poissonovým **b**. 0,11 **c**. 0,76
5) **a**. 0,13 **b**. 0,99
6) **a**. 0,055 **b**. 0,95 **c**. 0,5 **d**. 1 **e**. 0,95 **f**. 0,16 **g**. 0,16 **h**. 0
7) $\le$ 33 tis. km
8) **a**. 24,15 let **b**. 3,35 let **c**. 0,26

7 TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ – PARAMETRICKÉ A NEPARAMETRICKÉ TESTY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Parametrické hypotézy se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny (neboli znaku populace). Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (příklad: normální rozdělení). V každém testu hypotézy vystupují proti sobě dvě hypotézy: testovaná hypotéza, kterou nazýváme nulová hypotéza a tzv. alternativní hypotéza. Při testování parametrické hypotézy máme k dispozici výsledky náhodného výběru a na jejich základě se rozhodujeme testovanou hypotézu buď přijmout, nebo zamítnout. Za tím účelem rozdělíme výběrový prostor na dvě části: kritický obor a obor přijetí. Padne-li hodnota statistiky pro získaný vzorek do kritického oboru, potom ji zamítáme. Naopak, padne-li hodnota statistiky pro získaný vzorek do oboru přijetí, pak nulovou hypotézu nezamítáme (neboli přijímáme).

Testem hypotézy (neparametrickým) lze pak přijmout nebo zamítnout neparametrické nulové hypotézy. Nulová hypotéza se zde odlišuje od nulové parametrické hypotézy v tom, že se zde nejedná ani o střední hodnotu, ani rozptyl. Zajímáme se o medián, typ rozdělení pravděpodobnosti, nebo nezávislost statistických znaků v kontingenční tabulce.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- základní pojmy z testování hypotéz,
- testovat parametrické hypotézy (test střední hodnoty),
- mediánový test,
- test dobré shody (Chi-kvadrát test),
- test nezávislosti v kontingenční tabulce.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 120 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Testování hypotéz, kritický obor, obor přijetí, hladina významnosti, mediánový test, test dobré shody, test nezávislosti.

7.1 Základní pojmy z testování hypotéz

Statistika se zabývá ověřováním pouze tzv. statistických hypotéz, které tvoří jen určitou podtřídu vědeckých hypotéz. **Statistické hypotézy** jsou tvrzení o hodnotách parametrů náhodných veličin, tj. znaků populačních souborů nebo tvrzení o tvaru pravděpodobnostních rozdělení náhodných veličin.

Obvykle se předpokládá normální nebo alternativní pravděpodobnostní rozdělení hodnot zkoumaného znaku, s nimiž jsou spojeny parametry střední hodnoty μ, rozptylu σ^2 nebo podílu p. Tomu pak odpovídají testy hypotéz

- o střední hodnotě μ,
- o rozptylu σ^2, nebo
- o podílu p.

Úlohy, které se v té souvislosti řeší, jsou úlohy o testování parametru znaku jednoho populačního souboru (tj. náhodné veličiny), nebo úlohy o parametrech znaků dvou a více souborů. Úlohy o parametrech dvou (a více) souborech lze obvykle převést na úlohy o parametrech jednoho souboru. Proto se budeme v následujících odstavcích věnovat pouze této úloze.

Statistické hypotézy rozdělujeme do dvou velkých tříd na parametrické hypotézy a neparametrické hypotézy. **Parametrické hypotézy**, kterými se budeme zabývat nejdříve, se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného rozdělení náhodné veličiny. **Neparametrické hypotézy** se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (normální, exponenciální, apod.).

Z jiného pohledu dělíme hypotézy na jednoduché a složené. **Jednoduchá hypotéza** o parametru rozdělení specifikuje tento parametr jednoznačně jako jedinou hodnotu. **Složená hypotéza** vymezuje interval nebo jinou množinu hodnot, v němž má hodnota parametru ležet.

V praktických úlohách vystupují proti sobě dvě hypotézy: testovaná hypotéza, kterou nazýváme **nulová hypotéza** a označujeme ji obvykle H_0 a **alternativní hypotéza**, která se označuje H_1. Formulace alternativní hypotézy je naprosto nezbytná, jinak by ověřování nulové hypotézy nemělo smysl.

V následujícím výkladu se budeme zabývat testováním jednoduché parametrické hypotézy. Půjde o případ, kdy se kromě parametru, kterého se týká hypotéza, neuvažuje žádný jiný parametr. Testovanou hypotézu pak můžeme stručně zapsat:

$$H_0 : \Theta = \Theta_0 \,, \tag{7.1}$$

kde Θ_0 je konkrétní hodnota parametru. Jako konkrétní parametr Θ si představte například střední hodnotu μ.

Alternativní hypotézu volíme podle toho, jaký závěr učiníme, jestliže nulovou hypotézu zamítneme. Uvažujeme tyto možnosti:

$$H_1 : \Theta = \Theta_1, \tag{7.2}$$

jedná se o **jednoduchou alternativní hypotézu**, jestliže se rozhodujeme mezi dvěma hodnotami parametru Θ_0 a Θ_1;

$$H_1 : \Theta < \Theta_0 , \tag{7.3}$$

jde o **levostrannou složenou alternativní hypotézu**, učiníme-li závěr pouze tehdy, ukáže-li se hodnota parametru Θ menší, než předpokládá nulová hypotéza;

$$H_1 : \Theta > \Theta_0 , \tag{7.4}$$

jedná se o **pravostrannou složenou alternativní hypotézu**, učiníme-li závěr pouze tehdy, prokáže-li se hodnota parametru Θ větší, než předpokládá H_0;

$$H_1 : \Theta \neq \Theta_0 , \tag{7.5}$$

jedná se o **dvoustrannou složenou alternativní hypotézu**, jde-li o prokázání různosti parametru od hodnoty předpokládané v H_0.

Při testování parametrických hypotéz máme k dispozici výsledky náhodného výběru zobrazené **testovacím kritériem** označovaným symbolem T, (například hodnotu aritmetického průměru $\bar{x}$ pro test hypotézy o střední hodnotě μ). Chceme se rozhodnout: testovanou hypotézu buď **přijmout**, nebo ji **zamítnout**. Za tím účelem rozdělíme výběrový prostor na dvě části: **kritický obor** C a **obor přijetí** A. Tedy pozor, testem statistické hypotézy nemůžeme dokázat její pravdivost nebo nepravdivost, čí správnost nebo nesprávnost! Jestliže hypotézu zamítneme, neznamená to ještě, že není správná.

Hodnoty náhodného výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ představují souřadnice bodu v prostoru, který nazýváme **výběrový prostor**. Hodnotu testového kritéria T v tomto bodě označíme $T(\boldsymbol{x})$, například opět pro test hypotézy o střední hodnotě μ je to hodnota aritmetického průměru, tedy $T(\boldsymbol{x}) = \bar{x}$.

Platí-li $T(\boldsymbol{x}) \in C$, potom H_0 zamítáme. Naopak, platí-li $T(\boldsymbol{x}) \in A$, pak H_0 přijímáme, přesněji H_0 nezamítáme. Vhodnou volbou testovacího kritéria, kterým je obvykle odpovídající statistika, jejíž rozdělení pravděpodobnosti při platnosti testované hypotézy známe, určíme kritický obor C takovým způsobem, že platí

$$P(T(\mathbf{x}) \in C \mid H_0) = \alpha , \tag{7.6}$$

kde α je předem zvolené číslo, které nazýváme **hladina významnosti**. Jinými slovy, za podmínky platnosti nulové hypotézy je pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria pro získaný vzorek (například aritmetický průměr) padne do kritického oboru, je rovna hladině významnosti α.

7.2 Postup při testování hypotézy – parametrický test

Při praktickém testování parametrických hypotéz se doporučuje postupovat v následujících čtyřech krocích:

I. Vybrat vhodný test, přitom se řídíme zásadou, že nulovou hypotézu chceme zamítnout a hypotézu, u které chceme mít pod kontrolou riziko mylného přijetí, formulujeme jako alternativní. Zvolit hladinu významnosti α, obvykle se volí $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$, nebo $\alpha = 0{,}10$.

Existuje tu přirozená paralela testování hypotéz se soudním řízením: nulovou hypotézu představuje hypotéza o nevině obžalovaného (známá jako „presumpce neviny“) a soudní řízení, konkrétně žalující strana, má přinést důkazy pro její zamítnutí, tedy dokázání viny obžalovaného. Všimněte si, že pokud se v soudním řízení (testu hypotézy) nepodaří předložit dostatečné důkazy o vině, obžalovaný je osvobozen, tj. přijímá se nulová hypotéza. To však vůbec nemusí znamenat, že je obžalovaný nevinen! Jinak řečeno, neznamená to, že nulová hypotéza platí! Pouze ji nelze za stávajících důkazů (tj. na základě vzorku) zamítnout.

II. Vymezit kritický obor, tj. obor hodnot testové statistiky, kterým může zejména být:

a) interval všech čísel menších než 100α%-ní kvantil uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení – tzv. levostranný kritický obor.
b) interval všech čísel větších než $100(1-\alpha)$%-ní kvantil uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení – tzv. pravostranný kritický obor.
c) Sjednocení levého a pravého intervalu, přesněji řečeno, intervalu všech čísel menších než $100\frac{\alpha}{2}$ %-ní kvantil a intervalu všech čísel větších než od $100\frac{1-\alpha}{2}$%-ní kvantil. Číslo α - hladina významnosti, se zde rozdělí na dvě poloviny $\frac{\alpha}{2}$, aby celková pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria pro získaný vzorek padne do kritického oboru, byla stejně jako v předchozích případech rovna α.

III. Vypočítat hodnotu testového kritéria, stanovit hodnoty příslušných statistik a dosadit do „vzorce“ testového kritéria. Testovým kritériem je obvykle statistika – funkce náhodného výběru v závislosti na druhu testu.

IV. Učinit příslušný závěr. Patří-li zjištěná hodnota testového kritéria do kritického oboru, hypotézu H_0 zamítáme a alternativní hypotézu H_1 přijímáme na hladině významnosti α. Patří-li zjištěná hodnota do oboru přijetí, hypotézu H_0 přijímáme, o H_1 se zdržíme úsudku.

Provádíte-li test hypotézy pomocí počítače vybaveného statistickým softwarem, případně v MS Excelu na PC, potom nemusíte předem zadávat hladinu významnosti α, počítač jako řešení testu hypotézy nabídne číslo z intervalu [0,1], které se nazývá *p*-hodnota (anglicky *p*-value). Toto číslo představuje vlastně nejmenší možnou hladinu významnosti, na níž by se mohla nulová hypotéza ještě zamítnout. Jestliže je potom například *p*-hodnota menší než 0,01, pak byste mohli příslušnou nulovou hypotézu zamítnout na každé obvyklé (tj. výše uvedené) hladině významnosti. V takovém případě se hypotéza nazývá *statistický významnou*. Na druhou stranu pokud je *p*-hodnota blízká k číslu 1, například větší než 0,1, potom se hypotéza nemůže zamítnout na běžných hladinách významnosti (0,1 , 0,05 nebo 0,01) a říkáme, že hypotéza je *statisticky nevýznamná*.

V následující tabulce uvádíme přehled jednoduchých standardních parametrických testů pro ověření dvoustranné hypotézy $H_0 : \Theta = \Theta_0$. Za **velké vzorky** přitom obvykle považujeme ty, jež mají více než 30 jednotek.

Číslo testu	Předpokládané rozdělení znaku *X*	Podmínky použití testu	Dvoustr. nulová hypotéza	Testové kritérium	Obor přijetí
(1)	normální rozdělení parametry μ, σ^2	σ^2 známo	$\mu = \mu_0$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$[-u_{\alpha/2} \,;\, u_{\alpha/2}]$
(2)	normální rozdělení parametry μ, σ^2	σ^2 neznámo	$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	$[-t_{\alpha/2}^{n-1} \,;\, t_{\alpha/2}^{n-1}]$
(3)	libovolné rozdělení	*n* velké, σ^2 známo	$\mu = \mu_0$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$[-u_{\alpha/2} \,;\, u_{\alpha/2}]$
(4)	libovolné rozdělení	*n* velké σ^2 neznámo	$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	$[-t_{\alpha/2}^{n-1} \,;\, t_{\alpha/2}^{n-1}]$
(5)	normální rozdělení parametry μ, σ^2		$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$w = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$[\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \,;\, \chi_{\alpha/2}^2(n-1)]$
(6)	exponenciální rozdělení, par. δ		$\delta = \delta_0$	$y = \dfrac{2n\overline{x}}{\delta_0}$	$[\chi_{1-\alpha/2}^2(2n) \,;\, \chi_{\alpha/2}^2(2n)]$
(7)	binomické		$p = p_0$	$p = \dfrac{\dfrac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$[-u_{\alpha/2} \,;\, u_{\alpha/2}]$

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Hamburgery se připravují z masových karbanátků, které mají mít hmotnost 100 gramů se směrodatnou odchylkou 5 g. K ověření této kvality bylo náhodně vybráno 25 kusů, které byly převáženy a vypočítána průměrná hmotnost jednoho karbanátku $\overline{x} = 97{,}5$ g. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ ověřte hypotézu, že střední hodnota hmotnosti je 100 g (a že tedy uvedená odchylka je "v normě" a nejde o šizení zákazníků).

Řešení.

Budeme ověřovat nulovou hypotézu H_0: μ = 100 proti složené oboustranné hypotéze H_1: $\mu \neq$ 100. Použijeme test č. 1, z předcházejícího seznamu, neboť znáte σ = $\sqrt{Var(X)} = 5$, n = 25.

Nejprve stanovíme kritický obor, resp. obor přijetí hypotézy pro hladinu významnosti α = 0,05. Stanovíme obor přijetí nulové hypotézy A jako interval:

$$A = [-u_{\alpha/2}\,; u_{\alpha/2}]. \tag{7.7}$$

Nalezením příslušné kritické hodnoty z Tabulky 1 v Příloze: $u_{0,025} = 1{,}96$, pak snadno vypočítáme: A = [-1,96 ; 1,96].

Kritický obor je potom doplňkem k oboru přijetí, tedy $C = (-\infty\,, -1{,}96\,) \cup (1{,}96\,, +\infty)$.

Nyní podle řádku (1) tabulce vypočítáme hodnotu testového kritéria $u = \dfrac{97{,}5-100}{\dfrac{5}{\sqrt{25}}} = -2{,}5$. Tato hodnota padne do kritického oboru C, tj. $u \in C$, proto se nulová hypotéza *zamítá*. Jinými slovy na zvolené hladině významnosti nelze hypotézu H_0 na základě výběrového vzorku přijmout. Prakticky lze tento výsledek interpretovat jako fakt, že dochází k nenáhodné (systematické) odchylce v hmotnosti karbanátků směrem dolů (tedy k poškozování zákazníků).

7.2.1 CHYBY PŘI TESTOVÁNÍ

Při testování hypotéz se vyskytují tyto chyby:

- chyba z nevhodně zvolené dvojice nulové a alternativní hypotézy,
- chybně stanovený obor přijetí, resp. kritický obor,
- chybně stanované testové kritérium,
- chybné zamítnutí, resp. přijetí nulové hypotézy.

První tři uvedené chyby je možné redukovat správnou přípravou testu hypotézy. Rozhodnutí o zamítnutí nebo přijetí hypotézy nemusí vždy vést ke správným rozhodnutím, neboť jde o náhodný proces využívající omezené informace náhodného výběru. Statistikové se snaží najít takové testy, které by minimalizovaly výskyt chybných rozhodnutí.

Prakticky vzato, nulovou hypotézu buď přijímáme, nebo zamítáme. Zamítnutí správné hypotézy nazýváme **chybou I. druhu** a její pravděpodobnost označujeme podle (7.6) totožná s hladinou významnosti α. Přijetí nesprávné hypotézy definujeme jako **chybu II. druhu** a její pravděpodobnost označujeme jako β. Číslo 1-β vyjadřující pravděpodobnost zamítnutí nesprávné hypotézy nazýváme **síla testu**.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Uvažujte populaci zákazníků, přičemž X je náhodná veličina představující velikosti prodejů jednotlivým zákazníkům v jistém typu prodejen, viz též příklad v úvodu kapitoly. Náhodná veličina má normální rozdělení se střední hodnotou μ = 120 a rozptylem σ^2 = 100. Bylo náhodně vybráno 50 zákazníků, z jejichž nákupů byl vypočítán výběrový průměr $\bar{x} = 115$. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu $H_0 : \mu = 120$ proti alternativní hypotéze $H_1 : \mu \neq 120$.

Řešení.

Protože n = 50 > 30, testové kritérium u z (3) v tabulce má přibližně normální rozdělení, přičemž $E(\overline{X})$ = 120, $Var(\overline{X})$ = 100/25 = 4. Za obor přijetí A vezměte interval (7.7), tj. $[-u_{\alpha/2}; u_{\alpha/2}]$, což po dosazení a nalezení příslušné kritické hodnoty v Tabulce 1, tj. $u_{0,05} = 1{,}96$, dává kritický obor $C = (-\infty\,; -1{,}96) \cup (1{,}96\,; +\infty)$, jakožto doplněk oboru přijetí (7.7). Vzhledem k tomu, že pro testové kritérium $u = \dfrac{115-120}{\dfrac{4}{\sqrt{50}}} = -\,8{,}84$, což znamená $u \in C$, zamítá se nulová hypotéza.

Na základě statistického testu jste zamítli hypotézu, která byla správná ($E(\overline{X}) = 120$), dopustili jste se tedy chyby I. druhu, pravděpodobnost této chyby je α = 0,05.

7.3 Neparametrické testy hypotéz

Neparametrické testy hypotéz, podobně jako parametrické testy hypotéz, jsou testy statistických hypotéz, které se však netýkají parametrů rozdělení pravděpodobnosti. Budeme se zabývat dvěma skupinami testů:

U jednoduchých neparametrických testů vycházíme z jednoho náhodného výběru (vzorku) a klademe si tyto otázky (hypotézy):

- má medián populace s neznámým rozdělením pravděpodobnosti předpokládanou hodnotu?
- pochází výběr z populace s předpokládaným (eventuálně předem známým) rozdělením pravděpodobnosti?

Obě otázky jsou typem neparametrické hypotézy a odpovídáme na ně pomocí neparametrických testů. V prvním případě se jedná o mediánový test, ve druhém o chi-kvadrát test (také známý pod jménem test dobré shody). Prvním z nich se budeme zabývat v následující subkapitole, ostatními testy pak v dalších subkapitolách.

7.3.1 MEDIÁNOVÝ TEST

Mediánový test odpovídá na otázku, zda má medián populace předpokládanou hodnotu. Medián není typickým parametrem, jako například μ v normálním rozdělení, proto se test hypotézy o hodnotě mediánu v populaci s neznámým rozdělením pravděpodobnosti považuje za neparametrický test.

Mediánový test najde uplatnění u populací, u nichž nemáme důvod předpokládat, že mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Jinak totiž je lepší použít parametrický test o středí hodnotě μ, s nímž jste se seznámili v předešlé kapitole.

Předpokládáme hodnotu mediánu $\tilde{\mu}_0$ populace X a testujeme dvoustrannou nulovou hypotézu: H_0: $Med(X) = \tilde{\mu}_0$,

proti alternativní hypotéze: H_1: $Med(X) \neq \tilde{\mu}_0$.

K testu se používá testové kritérium $$u = \frac{|2m - n|}{\sqrt{n}}, \tag{7.8}$$

kde n je rozsah testového vzorku, m je počet případů ve vzorku s hodnotou menší než $\tilde{\mu}_0$. Při zadané hladině významnosti α porovnáme hodnotu kritéria (7.8) s kritickou hodnotou normovaného normálního rozdělení $u_{\alpha/2}$. Pokud je hodnota testového kritéria větší než příslušná kritická hodnota, tj. platí-li $u > u_{\alpha/2}$, potom nulovou hypotézu H_0 zamítáme, jinak ji nezamítáme.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Náhodně vybraný vzorek 19 zaměstnanců v okrese Karviná poskytl následující údaje o jejich měsíčních mzdách (v tis.Kč):

10,0	12,3	12,6	12,6	13,0	13,2	13,3	13,3	13,4	13,8
14,1	14,3	14,6	15,1	15,2	15,4	16,5	18,2	20,5	-------

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že mediánová měsíční mzda učitelů v České republice je 15 tis. Kč.

Řešení.

Populaci tvoří měsíční platy všech učitelů v ČR. Je známo, že mzdy nemají normální rozdělení pravděpodobnosti. Proto namísto aritmetického průměru je lepší charakteristikou medián. Tomu odpovídá mediánový test hypotézy H_0: $Med(X) = 15$ proti alternativní hypotéze H_1: $Med(X) \neq 15$. V tomto testu je $n = 19$, medián $m = 13$. Podle vztahu (7.8) snadno vypočítáte $u = 1{,}61$. Z Tabulky 1 hodnot normovaného normálního rozdělení zjistíte, že $u_{0,025} = 1{,}96$. Protože hodnota statistiky u pro vzorek nepřevýšila hodnotu příslušného kvantilu, neboť $1{,}61 < 1{,}96$, nulovou hypotézu H_0 nezamítáte (přijímáte). Jinými slovy, na zvolené hladině významnosti vzorek neodporuje hypotéze o výši mediánové měsíční mzdy učitelů v ČR. Vybraný vzorek je v souladu s celostátní populací.

7.3.2 TEST DOBRÉ SHODY

Společným rysem situací, při nichž se uplatní (Pearsonův) **Chi-kvadrát test**, nebo též **test dobré shody**, je to, že všechny výsledky v náhodném výběru lze roztřídit do určitého počtu vzájemně se nepřekrývajících tříd. Testovaná hypotéza pak spočívá v předpokladu určitého typu (modelu) pravděpodobnostního rozdělení, z čehož vyplývá zařazení výsledků do jednotlivých tříd. Vynásobíme-li tyto pravděpodobnosti rozsahem výběru, dostáváme teoretické četnosti při platnosti nulové hypotézy. Test dobré shody pak spočívá v porovnání těchto teoretických četností s empirickými četnostmi ve výběrovém souboru. Jsou-li rozdíly mezi nimi příliš velké, potom zřejmě model rozdělení vyjádřený testovanou hypotézou není vhodný a tedy nulovou hypotézu zamítáme. Potom považujeme model za nevhodný na zvolené hladině významnosti.

Za testové kritérium k ověření vhodnosti modelu volíme statistiku G, která je součtem čtverců rozdílů mezi teoretickými a empirickými četnostmi vztažených relativně k příslušné teoretické četnosti, a to pro všechny třídy:

$$G = \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_j - \psi_j)^2}{\psi_j} \ , \qquad (7.9)$$

kde J představuje počet tříd výběrového souboru, n_j empirickou četnost v j-té třídě, ψ_j teoretickou četnost v j-té třídě, je rozsah výběrového souboru.

Je-li rozsah výběru n dost velký a jsou-li všechny empirické četnosti rovněž dost velké, tj**. alespoň 80% četností je větších než 5**, má toto testové kritérium G při platnosti nulové hypotézy přibližně rozdělení Chi-kvadrát s $df = J - 1$ stupni volnosti. Přitom je teoretická četnost $\psi_j = n.p_j$, kde p_j je příslušná pravděpodobnost. Závěr testu pak spočívá v porovnání hodnoty testového kritéria vypočteného pro náhodný výběr se 100α %-ní kritickou hodnotou rozdělení $\chi^2_\alpha(J-1)$. Kritické hodnoty tohoto rozdělení bývají často tabelovány, tak je tomu také v Tabulce 3 z Přílohy tohoto textu.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 4

Automobil Škoda - Favorit se prodává ve čtyřech barvách. Prodejna rozčlenila tyto barvy podle poptávky o konkrétní barvy takto:

40% zákazníků požaduje zelenou barvu automobilu,
25% červenou barvu,
25% modrou barvu a
10% bílou barvu.

Na hladině významnosti α = 0,05 ověřte hypotézu, že uvedené pravděpodobnostní odhady jsou správné. K ověření správnosti učiněného předpokladu o struktuře poptávky podle barev použijte záznamy o nákupech v dané prodejně v jistém měsíci.

Řešení.
Vstupní i vypočtené údaje obsahuje následující tabulka:

j	Barva	$p_{0,j}$	n_j	ψ_j	$\dfrac{(n_j - \psi_j)^2}{\psi_j}$	$\dfrac{n_j}{n}$
1	zelená	0,40	201	192	0,42	0,42
2	červená	0,25	105	120	1,88	0,22
3	modrá	0,25	144	120	4,80	0,30
4	bílá	0,10	30	48	6,75	0,06
součet		1,00	480	480	13,85	1,00

Testovaná hypotéza je následující:

$$H_0 : p_{0,1} = 0{,}4, p_{0,2} = p_{0,3} = 0{,}2, p_{0,4} = 0{,}1 ,$$

zatímco alternativní hypotéza H_1 je negací nulové hypotézy. Rozsah výběrového souboru je značný, a protože pro všechna j je $\psi_j > 5$, jsou podmínky pro použití testu dobré shody splněny.

Stanovíme kritický obor C jako pravostranný interval, jehož levý krajní bod představuje 100(1 - α)%-ní kvantil funkce Chi-kvadrát $\chi^2_{0.95}(3) = 7{,}81$, neboť stupeň volnosti $df = 4 - 1 = 3$. Hodnotu příslušného kvantilu lze nalézt v běžných tabulkách rozdělení Chi-kvadrát, např. v Tabulce 3 z Přílohy. Tedy $C = [\, \chi^2_{0.95}(3) \,;\, +\infty) = [7{,}81 \,;\, +\infty\,)$.

Hodnotu testového kritéria G obsahuje výše uvedená tabulka v posledním řádku vpravo: $G = 13{,}85$. Jelikož tato hodnota padne do kritického oboru, *zamítáme* nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. Praktický dopad takového testu by měl mít za následek korekci představ o pravděpodobnostním rozložení poptávky po jednotlivých barvách automobilů. To by pak mělo přimět vedení prodejny ke změně objednávek u výrobce. Nové pravděpodobnosti $p_{1,j}$ jednotlivých barev bychom mohli z uvedeného výběrového souboru stanovit jako relativní četnosti $p_{1,j} = n_j / n$, viz poslední sloupec ve výše uvedené tabulce.

7.3.3 TEST NEZÁVISLOSTI KVALITATIVNÍCH ZNAKŮ

Typickou úlohou, k jejímuž řešení se často používá test dobré shody, je **ověření nezávislosti dvou (nebo více) kvalitativních znaků**. Jejich hodnoty byly zjištěny u n náhodně vybraných prvků základního souboru, nebo, obecněji řečeno, jde o výsledky n nezávislých náhodných pokusů. Výsledky jsou pak zpracování uspořádány v tzv. **kontingenční tabulce**.

V jednom experimentu můžeme současně sledovat dvě nebo i více odpovědí - hodnoty kvalitativních znaků. Tak například při kontrole jakosti výrobku můžeme sledovat přítomnost nebo nepřítomnost vady A (znak A), nebo přítomnost nebo nepřítomnost vady

B (znak B). Oba znaky A i B nabývají pouze dvě alternativní hodnoty - kategorie: např. **Ano, Ne (Přítomnost, Nepřítomnost**, apod.).

Při psychologické zkoušce způsobilosti osoby k výkonu určité činnosti může testovaná osoba dostat dva úkoly, jejichž výsledek může být hodnocen jako "vynikající", "průměrný" a "podprůměrný". Zde jde o sledování dvou kvalitativních znaků se třemi kategoriemi odpovědí.

Představte si nyní n nezávislých opakování experimentu se dvěma kvalitativními znaky A a B. Znak A má r možných kategorií hodnot, značených $A_1, A_2, \ldots, A_r$, znak B má s možných kategorií hodnot $B_1, B_2, \ldots, B_s$. Výsledek celého složeného experimentu lze shrnout do *kontingenční tabulky*:

Kategorie znaku *A / B*	B_1	B_2	B_3	....	B_s	Součet
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2s}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3s}	$n_{3.}$
....	.....	....	....	....	....	....
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	....	n_{rs}	$n_{r.}$
Součet	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	....	$n_{.s}$	n

V tabulce značí n_{ij} počet experimentů, při kterých znak A nabývá hodnoty (kategorie) A_i a znak B hodnoty B_j. Symbolem $p_{i.} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$ značíme celkový počet opakování, při kterých se vyskytla i-tá kategorie znaku A, symbolem $n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ značíme celkový počet opakování, při kterých se vyskytla j-tá kategorie znaku B.

Cílem statistické analýzy je zjištění, zda příslušné dva znaky jsou závislé či nikoliv. Výskyt i-té kategorie (hodnoty) znaku A a j-té kategorie znaku B při jedné realizaci příslušného experimentu je náhodný jev, který je průnikem dvou jevů, označme pravděpodobnost tohoto průniku p_{ij}. Každá četnost n_{ij} ve výše uvedené kontingenční tabulce je vlastně realizací náhodné veličiny s binomickým rozdělením pravděpodobnosti s parametry n a p_{ij}. Četnosti $n_{i.}$ výskytu jevu A_i a četnosti $n_{.j}$ výskytů jevů B_j jsou realizacemi náhodných veličin s binomickým rozdělením s parametry n, $p_{i.}$, resp. parametry n, $p_{.j}$. Zde jsme označili $p_{.j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$ a $p_{i.} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$. V souladu s definicí nezávislosti jevů řekneme, že znaky A a B jsou nezávislé, jestliže platí pravidlo o násobení pravděpodobností nezávislých jevů, tj.

$$p_{ij} = p_{i.} p_{.j}, \; i = 1,2,\ldots,r, \; j = 1,2,\ldots,s, \tag{7.10}$$

Položíme-li nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti znaků A a B jako předpoklad (7.10), pak lze ukázat, že statistika

$$G=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}=n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}}-1\right) \tag{7.11}$$

má Chi-kvadrát rozdělení s df =(r -1)(s -1) stupni volnosti.

Hypotézu H_0 o nezávislosti znaků A a B zamítáme na hladině významnosti α, když hodnota statistiky (7.11) padne do kritického oboru

$$C=\left[\chi^2_{1-\alpha}(df);+\infty\right). \tag{7.12}$$

Speciálním případem kontingenční tabulky je tzv. **čtyřpolní tabulka**, kdy každý znak nabývá pouze dvou (alternativních) hodnot. Zde uvažujeme se dvěma kvalitativními znaky Z_1 a Z_2, každý z nich nabývá dvou možných kategorií, které označíme h_1, h_2. Ze základního souboru provedeme náhodný výběr, jehož výsledky uspořádáme do následující tabulky:

Znak Z_1 / Znak Z_2	h_1	h_2	Součet
h_1	A	B	$A+B$
h_2	C	D	$C+D$
Součet	$A+C$	$B+D$	n

Zde A představuje četnost současného výskytu hodnoty h_1 u znaků Z_1 i Z_2. Obdobný význam mají hodnoty *B, C* a *D.*

Hypotézu o nezávislosti obou alternativních znaků můžeme zformulovat jako (7.10). Testové kritérium (7.11) lze v tomto speciálním případě vyjádřit:

$$G=\frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}. \tag{7.13}$$

Počet stupňů volnosti je v tomto jednoduchém případě df = (2-1)(2-1) = 1.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 5

Pro n = 320 výrobků se zjišťovala hmotnost a vnější vzhled, přičemž pro oba tyto znaky se každý výrobek označil buď jako dobrý, nebo nevyhovující. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, která je konkretizací tabulky předchozí. Testujte hypotézu o nezávislosti znaků "Vzhled" a "Hmotnost" na hladině významnosti α = 0,1.

Vzhled / Hmotnost	Dobrý	Nevyhovující	Součet
Dobrá	239	60	299
Nevyhovující	14	7	21
Součet	253	67	320

Řešení.

1. Použijeme nejprve přímou metodu s pomocí vzorce (10.5), do něhož dosadíte hodnoty z předchozí tabulky:

$$G = 320(\frac{239^2}{253.299} + \frac{60^2}{67.299} + \frac{14^2}{253.21} + \frac{7^2}{67.21} - 1) = 2{,}086.$$

Protože 2,086 < $\chi^2_{0,1}(1)$ = 2,7, tj. hodnota kritéria nepadne do kritického oboru (7.12), hypotézu o nezávislosti daných znaků *přijímáme*.

2. V řešení 1. jsme použili vzorce, který je obecný v tom smyslu, že může být použit pro kontingenční tabulku o rozměrech $r \times s$, tj. v případech, kdy první znak má r hodnot a druhý má s hodnot. V konkrétním příkladu je $r = s = 2$, a proto můžeme aplikovat vzorec (7.13) pro čtyřpolní tabulku. Po dosazení příslušných hodnot do (7.13) obdržíme: G = 2,086.

Docházíme přirozeně ke stejnému výsledku, a proto též závěr o přijetí hypotézy o nezávislosti znaků "Hmotnost" a "Vzhled" je stejný.

SHRNUTÍ KAPITOLY

Statistické hypotézy, tj. hypotézy, jež se týkají náhodných veličin, rozdělujeme do dvou velkých tříd na parametrické hypotézy a neparametrické hypotézy. Parametrické hypotézy se vztahují na jeden nebo několik parametrů daného pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny (znaku populace). Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení (normální, exponenciální, apod.). Neparametrické testy hypotéz (mediánový test, Chi-kvadrát test, test nezávislosti) se většinou používají tam, kde nemáte důvod předpokládat, že populační soubor má normální rozdělení pravděpodobnosti.

OTÁZKY

Ano či ne?...

1) Zamítnutí správné hypotézy označujeme jako chybu II. druhu.
2) Pokud test zamítne nulovou hypotézu H_0, je tato hypotéza nepravdivá.

3) Jestliže je nulová hypotéza přijata na hladině významnosti 0,05, pak musí být přijata i na hladině významnosti 0,01.
4) Přijmeme-li nulovou hypotézu, nemůžeme se dopustit chyby I. druhu.
5) Alternativní hypotézu přijmeme, pokud hodnota testového kritéria leží v kritickém oboru.

Doplňte...

6) Nulovou hypotézu nezamítáme neboli ________________.
7) Hypotéza $H_1 : \Theta > \Theta_0$ se nazývá ________________.
8) Číslo $1-\beta$, kde β znamená ________________, označujeme jako ________________.
9) Chybou I. druhu se rozumí ________________ a její pravděpodobnost se označuje ________________.
10) Nulovou hypotézu zamítáme, pokud hodnota testového kritéria náleží ________________.

11) Letecká společnost provedla při jednom letu kontrolu u 25 pasažérů, na kolik se váha zavazadel liší od povolených 20 kg. Byly zjištěny tyto údaje: $\bar{x} = 21{,}1$ kg; $s = 2{,}7$ kg. Je možno na hladině významnosti 10% usoudit, že průměrná váha zavazadel nepřevýší 20 kg?

12) Tabulka dokumentuje procentuální zastoupení různých věkových kategorií 1 000 účastníků korespondenčního kurzu *Business English*.

Věk	Podíl účastníků [%]
15 - 24	0,118
25 - 34	0,139
35 - 44	0,175
45 - 54	0,207
55 - 64	0,192
65 a více	0,169

Testujte hypotézu o stejném zastoupení uvedených věkových kategorií účastníků v korespondenčním kurzu na hladině významnosti 5%.

13) Management zdravotní pojišťovny zjišťuje, zda její podíl na krytí nákladů spojených s hospitalizací pacientů je závislý na délce hospitalizace. Náhodný vzorek pacientů poskytl následující výsledky:

Krytí nákladů	Délka hospitalizace			
	do 5 dní	6 - 10 dní	11 - 15 dní	nad 15 dní
méně než 25%	26	30	6	5
25 - 50%	21	30	11	7
51 - 75%	25	25	45	9
nad 75%	11	32	17	11

Je možno potvrdit závislost procentuálního podílu krytí nákladů na délce hospitalizace? Uvažujte hladinu významnosti 1%.

15) Manželská poradna provedla šetření závislosti rozvodovosti věkové kategorie 35 až 40 let na pohlaví partnerů. Tabulka shrnuje výsledky u náhodného výběru 100 klientů zmíněné věkové kategorie.

Rodinný stav	Pohlaví	
	muž	žena
rozvedený(á)	15	20
jiný	30	35

Na hladině významnosti 0,1 ověřte hypotézu o nezávislosti rozvodovosti na pohlaví partnerů.

ODPOVĚDI

Ano či ne?...

1) Ne
2) Ne
3) Ano
4) Ano
5) Ano

Doplňte ...

6) Přijímáme
7) Pravostranná složená alternativní hypotéza
8) Pravděpodobnost chyby II. druhu, síla testu
9) Zamítnutí platné hypotézy, alfa
10) Kritickému oboru

11) Nikoliv, hypotéza se zamítá.
12) Hypotéza se zamítá.
13) Hypotéza se přijímá. (Hypotéza o nezávislosti se zamítá).
14) Hypotéza se přijímá.

8 JEDNODUCHÁ REGRESNÍ ANALÝZA

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Závislostí kvantitativního znaku na kvantitativním znaku se zabývá regresní analýza. V případě závislosti dvou znaků mluvíme o jednoduché regresi (případně korelaci), u znaku závislém na více kvantitativních veličinách hovoříme o vícenásobné regresi. V této kapitole budeme vyšetřovat nejprve nejjednodušší lineární závislost dvou znaků, dále se budeme zabývat i nelineárními závislostmi dvou znaků důležitých z hlediska ekonomických aplikací. Kapitolu a celou publikaci uzavře problematika korelace, závislosti, kdy nerozlišujeme mezi původcem a následkem. K čemu je to všechno dobré? Znalost závislostí umožňuje předvídat chování závislé veličiny.

CÍLE KAPITOLY

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- uvést příklady regresních funkcí,
- vypočítat regresní koeficienty pomocí metody nejmenších čtverců,
- vypočítat koeficient determinace,
- vypočítat koeficient korelace.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

K prostudování této kapitoly budete potřebovat asi 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Lineární regresní funkce, metoda nejmenších čtverců, koeficient determinace, koeficient korelace.

Při analýze dat nás často zajímá vztah mezi jedinou proměnnou (hodnotami statistického znaku) nazývanou **závisle proměnnou** (někdy **vysvětlovanou proměnnou**), označujeme ji Y, a obecně několika proměnnými (hodnotami statistických znaků), které nazýváme **nezávisle proměnné** (někdy **vysvětlující proměnné**), a označujeme je symboly $X_1, X_2, ...$ Pokud se zabýváme jedinou nezávisle proměnnou X, hovoříme o **jednoduché regresi**, pokud je nezávisle proměnných více než jedna, mluvíme o **vícenásobné regresi** (někdy též vícerozměrné nebo mnohonásobné regresi). V této kapitole se věnujeme pouze jednoduché regresi.

Závisí-li veličina Y na veličině X, pak to matematicky vyjadřujeme zápisem

$$Y = f(X). \tag{8.1}$$

V našem případě jsou Y a X **statistické znaky** (náhodné veličiny), pak hovoříme o **stochastistické závislosti**, funkční vztah (10.1) přejde v **regresní vztah** (**regresní model**)

$$y = f(x) + \varepsilon, \tag{8.2}$$

kde y , resp. x , představují hodnoty znaku Y , resp. X, ε je **náhodná chyba** *(***reziduum***)*, funkci f nazýváme **regresní funkce**.

Jestliže je regresní funkce f **lineární**, což značí že má tvar **regresní přímky**

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \tag{8.3}$$

potom hovoříme o **jednoduché lineární regresi**, nemá-li regresní funkce lineární tvar, hovoříme o **jednoduché nelineární regresi**. Ve vzorci (8.3) jsou β_0, β_1 **parametry** regresní funkce.

Mezi nelineární regresní funkce, které lze substitucí proměnné převést na lineární funkce patří:

regresní parabola: $$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x^2, \tag{8.4}$$

regresní hyperbola: $$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}, \tag{8.5}$$

regresní logaritmická funkce: $$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \log x. \tag{8.6}$$

Další významné nelineární regresní funkce lze převést na lineární logaritmickou transformací:

regresní mocninná funkce: $$f(x) = \beta_0 x^{\beta_1}, \tag{8.7}$$

regresní exponenciální funkce: $$f(x) = \beta_0 \beta_1^x. \tag{8.8}$$

Kromě výše uvedených příkladů nelineárních regresních funkcí existuje celá řada dalších významných nelineárních funkcí, které nelze na lineární funkci jednoduše převést.

Úkolem jednoduché lineární regrese je „proložit“ danými body přímku (tj. nalézt lineární regresní funkci), která nejlépe charakterizuje polohu daných *n* bodů. Z předchozího odstavce víme, že tato regresní funkce má tvar

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

kde β_0, β_1 jsou zatím neznámé hodnoty parametrů regresní přímky. Regresní model (8.2) má nyní tvar

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \; i = 1,2,...,n. \tag{8.9}$$

Odhady b_0, b_1 těchto neznámých parametrů – **regresní koeficienty** získáme metodou nejmenších čtverců. Této metodě, která patří mezi nejdůležitější metody používané ve statistice, bude věnována další podkapitola.

8.1 Metoda nejmenších čtverců

Mějme data ve formě párových hodnot – bodů: $(y_1, x_1), (y_2, x_2),...,(y_n, x_n)$. Úkolem jednoduché regrese je nalézt regresní funkci, která „nejlépe charakterizuje polohu“ daných *n* bodů. Nejprve budeme uvažovat obecně nelineární regresní funkci $f(x, \beta_0, \beta_1)$ se dvěma parametry β_0, β_1. Speciálními případy této regresní funkce je lineární funkce (8.3) a také nelineární funkce (8.4) – (8.8). Postup metody nejmenších čtverců bude tentýž, nezávisle na konkrétním tvaru regresní funkce. Odhady b_0, b_1 neznámých parametrů β_0, β_1 získáme tak, že nalezneme hodnoty b_0, b_1, pro něž nabývá své minimální hodnoty **reziduální součet čtverců** odchylek hodnot závisle proměnné y_i od teoretické hodnoty $Y_i = f(x_i; b_0, b_1)$

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, b_0, b_1))^2 . \tag{8.10}$$

Jak je známo z matematické analýzy, své minimum funkce S_R (zde je to funkce proměnných b_0, b_1) nabývá pro ty hodnoty b_0, b_1, pro něž se anulují její parciální derivace:

$$\frac{\partial S_R}{\partial b_0} = 0, \qquad \frac{\partial S_R}{\partial b_1} = 0. \tag{8.11}$$

Vztahy (8.11) představují soustavu 2 rovnic o 2 neznámých b_0, b_1, která se nazývá **soustava normálních rovnic**. Jejím řešením získáme hledané odhady regresních parametrů zvolené regresní funkce.

Vyřešíme nyní soustavu (8.11) pro speciální případ, který nás zejména zajímá, totiž lineární regresní funkci $f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 x$. Dosadíme-li tuto funkci do vztahu (8.10), vypočteme příslušné parciální derivace, které položíme rovny 0, získáme konkrétní soustavu normálních rovnic:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{8.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,. \tag{8.13}$$

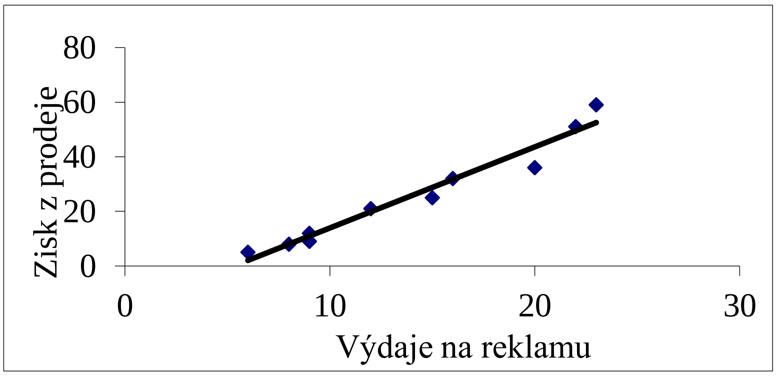
Z těchto rovnic již snadno (v konkrétním případě pro dané hodnoty y_i , x_i známou „dosazovací metodou“) vypočteme hledané odhady b_0, b_1.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1

Společnost na výrobu bytového textilu zkoumala, jak souvisí zisk z prodeje s výdaji na reklamu. Následující tabulka uvádí údaje z deseti náhodně vybraných firem. Načrtněte bodový graf a odhadněte typ regresní funkce popisující danou závislost. Vypočtěte regresní koeficienty.

Firma č.	Výdaje na reklamu (tis. Kč)	Zisk z prodeje (10 tis. Kč)
1	6	5
2	8	8
3	9	9
4	9	12
5	12	21
6	15	25
7	16	32
8	20	36
9	22	51
10	23	59

Řešení.



Jak patrně usoudíte z obrázku, roste zisk z prodeje zhruba lineárně v závislosti na výdajích za reklamu. Regresní funkcí tedy bude nejspíše lineární funkce – přímka (8.3).

Využijeme výsledků metody nejmenších čtverců, nebudeme však dosazovat přímo do soustavy rovnic (8.12), (8.13), ale použijeme vztahy pro b_0, b_1, které je možné z dané soustavy vyjádřit, a to v numericky výhodném a snadno zapamatovatelném tvaru:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{462{,}1 - 14 \cdot 25{,}8}{230 - 14^2} = \frac{100{,}9}{34} = 2{,}97 \qquad (8.12^*)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 25{,}8 - 2{,}97 \cdot 14 = -15{,}78\,. \qquad (8.13^*)$$

Hledaná regresní přímka má tvar: $Y = -15{,}78 + 2{,}97x$.

Z analytické geometrie si připomeňte, že regresní koeficient b_0 představuje průsečík regresní přímky s osou „y“, tedy hodnotu Y_0 pro x = 0. Tento regresní koeficient se někdy nazývá **úrovňová konstanta**. Regresní koeficient b_1 vyjadřuje směrnici přímky, tedy sklon přímky k ose „x“, tj. změnu funkční hodnoty Y při změně nezávisle proměnné x o jednotku.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Klasickým jednoduchým lineárním regresním modelem se nazývá regresní model (8.9):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

splňující následující podmínky:

1. Hodnoty vysvětlující proměnné x_i se volí předem, viz (A) v kapitole 12.2, nejsou to tedy náhodné veličiny.
2. Náhodné složky (rezidua) ε_i v modelu (12.9) mají **normální rozdělení** pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a (neznámým) konstantním rozptylem σ^2. Konstantnost rozptylu nazýváme **homoskedasticita**.
3. Náhodné složky jsou **nekorelované**, tj.
   $\rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro každé $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. (ρ značí korelační koeficient).

Podmínky 1. až 3. požadujeme tehdy, chceme-li zajistit splnění některých dalších vlastností: např. zjistit intervaly spolehlivosti koeficientů regresní funkce, interval spolehlivosti hodnoty regresní funkce, eventuálně, chceme-li provádět testy hypotéz o některých prvcích regresního modelu.

8.2 Koeficient determinace

Celkovou variabilitu vysvětlované proměnné charakterizuje **celkový součet čtverců**:

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2\,. \qquad (8.14)$$

Část celkové variability vysvětlenou regresním modelem charakterizuje **teoretický součet čtverců**:

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{y}\right)^2 , \tag{8.15}$$

nevysvětlenou část celkové variability představuje **reziduální součet čtverců** (8.10):

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Y_i\right)^2 . \tag{8.16}$$

Mezi jednotlivými součty čtverců platí základní vztah:

$$S_y = S_T + S_R . \tag{8.17}$$

Koeficient determinace charakterizuje přiléhavost dat k regresnímu modelu. Je definován vztahem:

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} . \tag{8.18}$$

Ze vztahu (8.17) vyplývá, že koeficient determinace nabývá hodnoty z intervalu [0;1] a určuje tu část celkové variability pozorovaných hodnot S_y, kterou lze vysvětlit daným regresním modelem. Jinak řečeno, po vynásobení koeficientu determinace stem obdržíme, kolik procent celkové variability je vysvětlitelných regresním modelem. Koeficient determinace je proto důležitou charakteristikou vhodnosti zvoleného regresního modelu.

Vztah (8.18) vzniká podílem náhodných veličin, a proto jakožto náhodná veličina je odhadem koeficientu determinace R^2. Pro malé rozsahy výběru n je odhad (8.18) **vychýlený**, tj. nadhodnocuje přiléhavost k regresnímu modelu. Proto se namísto něj používá **nevychýlený odhad** koeficientu determinace R^2_{adj} (z angl. *adj*usted), který nazýváme **upravený koeficient determinace**:

$$R^2_{adj} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-2} . \tag{8.19}$$

Pro velké hodnoty n je však zlomek ve vzorci (8.19) blízký k jedné a upravený koeficient se blíží k „neupravenému“.

Odmocninu koeficientu determinace nazýváme **koeficient korelace** a značíme jej R, podobně odmocninu upraveného koeficientu determinace nazýváme **upravený koeficient korelace**, označujeme jej R_{adj}.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 1 - POKRAČOVÁNÍ

Pro náš příklad lineární závislosti zisku z prodeje na výdajích na reklamu vypočítáme koeficient determinace, korelace a upravené koeficienty determinace a korelace.

Řešení.

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{2994{,}3}{3125{,}6} = 0{,}958 \ , \ R^2_{adj} = 0{,}953 \, .$$

$R = 0{,}979$, $R_{adj} = 0{,}979$.

8.3 Korelační analýza

U regresních modelů jsme předpokládali, že hodnoty vysvětlujících proměnných jsou dané, zatímco hodnoty vysvětlované proměnné jsou náhodné veličiny. Takové modely se používají k popisu závislostí závisle proměnné y na nezávisle proměnných x_i, tj. k popisu jednosměrné závislosti „y na x“. Často se však vyskytují případy, kdy máme k dispozici více náhodných veličin a není dopředu známo, které jsou vysvětlující a které vysvětlované. Je pak součástí analýzy tento směr závislosti stanovit. V jiných situacích však stanovení směru závislosti není zapotřebí. Zkoumá-li se například závislost prodeje zboží X na prodeji zboží Y, pak v některých případech má smysl vysvětlovat změny prodeje zboží X změnami prodeje Y, v jiných případech tomu může být naopak: změny prodeje zboží Y vysvětlujeme změnami zboží X. Jinými slovy, vztah mezi prodejem zboží X a Y zkoumáme jako oboustranný. Máme-li k dispozici n pozorovaných dvojic hodnot dvou proměnných, považujeme je za dvourozměrné náhodné veličiny a hledáme vhodný dvourozměrný pravděpodobnostní model. V případě většího počtu proměnných hledáme odpovídající vícerozměrný pravděpodobnostní model. Modely, v nichž se předpokládá, že n pozorovaných k-tic ($k \geq 2$) jsou hodnoty k-rozměrné náhodné veličiny, se nazývají **korelační modely** a analýza dat pomocí takových modelů se nazývá **korelační analýza**.

Z korelačních modelů jsou propracovány modely, které předpokládají, že pozorovaná data jsou hodnotami vícerozměrné náhodné veličiny, která má vícerozměrné normální rozdělení. Zde se budeme věnovat dvourozměrnému modelu s proměnnými x_1, x_2, jejichž sdruženým rozdělením je dvourozměrné normální rozdělení. Mějme n dvojic hodnot x_{1i}, x_{2i}, $i = 1,2,...,n$. Můžeme tedy vytvořit dva lineární regresní modely:

$$x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \varepsilon_1 \, , \tag{8.20}$$

$$x_1 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2 \, . \tag{8.21}$$

Odhady a_i, b_i parametrů α_i, β_i, $i = 0,1$, tj. odhady regresních koeficientů, obdržíme metodou nejmenších čtverců:

$$a_0 = \frac{\sum x_{2i}}{n} - a_1 \frac{\sum x_{1i}}{n} \, , \tag{8.22}$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_{1i} x_{2i} - \sum x_{1i} \sum x_{2i}}{n \sum x_{1i}^2 - \left(\sum x_{1i} \right)^2} \, , \tag{8.23}$$

$$b_0 = \frac{\sum x_{1i}}{n} - b_1 \frac{\sum x_{2i}}{n}, \tag{8.24}$$

$$b_1 = \frac{n\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i}}{n\sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{2i}\right)^2}. \tag{8.25}$$

Korelační koeficient definujeme jako odmocninu součinu „sklonů" regresních přímek:

$$\rho = \sqrt{\alpha_1 \beta_1}, \tag{8.26}$$

pokud platí $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ nebo $\alpha_1 \leq 0, \beta_1 \leq 0$. Pokud je jedno z čísel α_1, β_1 záporné, pak definujeme

$$\rho = -\sqrt{|\alpha_1 \beta_1|}.$$

Bodovým odhadem korelačního koeficientu ρ je **výběrový korelační koeficient *r*:**

$$r = \sqrt{a_1 b_1}. \tag{8.27}$$

Ze vztahů (8.23) a (8.25) obdržíme výpočtový tvar výběrového korelačního koeficientu:

$$r = \frac{n\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i}}{\sqrt{[n\sum x_{1i}^2 - \left(\sum x_{1i}\right)^2][n\sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{2i}\right)^2]}}. \tag{8.28}$$

Lze ukázat, že pro jednoduchý lineární regresní model platí:

$$r^2 = R^2, \tag{8.29}$$

tedy že čtverec výběrového korelačního indexu je roven koeficientu determinace. Musíte mít na paměti, že koeficient determinace obecně měří přiléhavost dat také k nelineárnímu regresnímu modelu, avšak rovnost (8.29) platí pro lineární regresní model. Pro nelineární regresní model rovnost (8.29) neplatí.

Korelační koeficient ρ měří těsnost lineární závislosti proměnných x_1, x_2 a nabývá hodnot z intervalu [-1;1]. Rostou-li s hodnotami jedné proměnné hodnoty druhé proměnné, jedná se o přímou lineární závislost, korelační koeficient má kladné znaménko a blíží se k 1. Klesají-li s růstem hodnot jedné proměnné hodnoty druhé proměnné, jedná se o nepřímou lineární závislost a korelační koeficient má záporné znaménko. Je-li hodnota korelačního koeficientu rovna nule, potom mezi proměnnými není lineární závislost (v obecném případě však může existovat závislost nelineární). V takovém případě jsou proměnné **nekorelované**.

Test statistické významnosti korelačního koeficientu je založen na testovacím kritériu

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}, \tag{8.30}$$

které za platnosti nulové hypotézy $H_0 : \rho = 0$,

již testujeme proti alternativní hypotéze $H_1 : \rho \neq 0$, má Studentovo rozdělení t s (n - 2) stupni volnosti. Na hladině významnosti α je kritický obor vymezen nerovností

$$|t| > t_{1-\alpha/2}(n-2)\,. \tag{8.31}$$

Jestliže hodnota testového kritéria (8.30) padne do kritického oboru, tj. když platí nerovnost (8.31), potom nenulová hodnota korelačního koeficientu je statisticky významná. V opačném případě je hodnota korelačního koeficientu statisticky nevýznamná (na zvolené hladině významnosti).

ŘEŠENÁ ÚLOHA 2

Společnost Air - Ostrava, zajišťující lety na trase Ostrava - Praha, sleduje při plánování letů také na hmotnost užitečného zatížení letadla, jehož významnou část tvoří pasažéři a jejich zavazadla. Zjistilo se, že hmotnost zavazadel cestujících souvisí s dobou, na kterou odcestovali.

a. Najděte rovnici regresní přímky popisující danou závislost.

b. S jakou hmotností zavazadel lze počítat, bude-li na palubě 15 cestujících vracejících se za 2 dny, 7 cestujících vracejících se za 5 dnů, 5 cestujících vracejících se za 6 dnů a 1 cestující vracející se za 14 dní?

Výsledky průzkumu jsou zaznamenány v tabulce.

Řešení.

a. K výpočtu regresních koeficientů b_0, b_1 použijete vztahů uvedených v příkladu 1

$$b_1 = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{324{,}4 - 8{,}2 \cdot 28{,}8}{96{,}73 - 8{,}2^2} = 2{,}99\,,$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 28{,}8 - 2{,}99 \cdot 8{,}2 = 4{,}27\,.$$

Regresní přímka má tedy tvar $\quad Y = 4{,}27 + 2{,}99x\,.$

Pozorování	Dny	Hmotnost
1	13	46
2	12	43
3	9	29
4	16	52
5	10	31
6	5	18
7	2	11
8	3	12
9	8	25
10	2	10

11	14	48
12	19	60
13	3	15
14	5	20
15	2	12

Průběžné výpočty shrnuje následující tabulka:

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1	13	46	598	169
2	12	43	516	144
3	9	29	261	81
4	16	52	832	256
5	10	31	310	100
6	5	18	90	25
7	2	11	22	4
8	3	12	36	9
9	8	25	200	64
10	2	10	20	4
11	14	48	672	196
12	19	60	1140	361
13	3	15	45	9
14	5	20	100	25
15	2	12	24	4
Součet	123	432	4866	1451
Průměr	8,2	28,8	324,4	96,73

b. Vypočítáte hodnotu Y pro x = 2: $Y(2) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 2 = 10{,}25$,

x = 5: $Y(5) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 5 = 19{,}22$,

x = 6: $Y(6) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 6 = 22{,}21$,

x =14: $Y(14) = 4{,}27 + 2{,}99 \cdot 14 = 46{,}13$.

Potom hmotnost zavazadel m, se kterou lze počítat, snadno zjistíme.

$m = 15 \cdot Y(2) + 7 \cdot Y(5) + 5 \cdot Y(6) + 1 \cdot Y(14) = 153{,}75 + 134{,}54 + 111{,}05 + 46{,}13$

= 445,47.

ŘEŠENÁ ÚLOHA 3

Vedení gymnázia zjišťovalo, zda spolu souvisí výsledky testů z matematiky a z fyziky. Vybralo proto 10 studentů; jejich bodové výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

Počet bodů z matematiky	56	79	50	84	63	91	46	56	74	76
Počet bodů z fyziky	82	56	46	79	74	83	51	63	75	82

a. Vypočítejte výběrový korelační koeficient.

b. Na hladině významnosti α = 0,05 testujte, zda je závislost mezi počtem bodů z matematiky a počtem bodů z fyziky statisticky významná, tj. je-li korelační koeficient statisticky významný.

Řešení.

a. K výpočtu výběrového korelačního koeficientu použijete vztah (8.28). Počet bodů z matematiky označíte X_1, počet bodů z fyziky označíte X_{12}. Hodnoty potřebné k výpočtu výběrového korelačního koeficientu jsou uvedeny v následující tabulce.

Student	X₁	X₂	X₁X₂	X_1^2	X_2^2
1	56	82	4592	3136	6724
2	79	56	4424	6241	3136
3	50	46	2300	2500	2116
4	84	79	6636	7056	6241
5	63	74	4662	3969	5476
6	91	83	7553	8281	6889
7	46	51	2346	2116	2601
8	56	63	3528	3136	3969
9	74	75	5550	5476	5625
10	76	82	6232	5776	6724
Součet	675	691	47823	47687	49501

Výběrový korelační koeficient vypočítáme podle vztahu (8.28):

$$r = \frac{n\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i}}{\sqrt{[n\sum x_{1i}^2 - \left(\sum x_{1i}\right)^2][n\sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{2i}\right)^2]}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 47823 - 675 \cdot 691}{\sqrt{(10 \cdot 47687 - 675^2)(10 \cdot 49501 - 691^2)}} = 0{,}6112\ .$$

b. Je-li korelační koeficient ρ statisticky významný nebo ne, zjistíte testováním nulové hypotézy H_0: $\rho = 0$,
proti alternativní hypotéze H_1: $\rho \neq 0$.
K ověření nulové hypotézy použijete t-test a podle (8.30) vypočítáte testové kritérium t:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} = \frac{0{,}612}{\sqrt{1-0{,}612^2}}\sqrt{8} = 2{,}189.$$

V tabulkách t-rozdělení najdete $t_{1-\alpha/2}(n\text{-}2) = t_{0,975}(8) = 2{,}306$. Protože $2{,}189 < 2{,}306$, přijímáte nulovou hypotézu o nevýznamnosti korelačního koeficientu, což znamená, že závislost mezi výsledky testů z matematiky a fyziky je na zvolené hladině významnosti statisticky nevýznamná, i když výběrový korelační koeficient nabývá hodnoty 0,6112. Hlavním důvodem tohoto výsledku je malý počet vzorků (vybraných studentů).

SHRNUTÍ KAPITOLY

V této poslední kapitole jsme se zabývali regresní a korelační analýzou. Zprvu jsme se zabývali jednoduchou lineární regresí, která řeší vztah mezi kvantitativním znakem Y nazývaným vysvětlovaná (závislá) proměnná a rovněž kvantitativním znakem X nazývaným vysvětlující (nezávislá) proměnná. Závislost jsme vyjadřovali pomocí regresní přímky, jejíž 2 koeficienty jsme odhadovali metodou nejmenších čtverců. Přiléhavost dat k nalezené regresní přímce jsme vyjádřili číslem R^2 z intervalu [0;1], které se nazývá koeficient determinace. Čím je přiléhavost dat k regresní přímce lepší (těsnější), tím je koeficient determinace bližší k číslu 1, čím je naopak přiléhavost volnější, tím je R^2 blíže k nule.

OTÁZKY

Ano či ne?

1) Regresní analýza zkoumá závislost kvantitativních znaků.
2) Nevysvětlenou část variability proměnné Y vyjadřuje reziduální součet čtverců.
3) Determinační koeficient je definován jako podíl reziduálního součtu čtverců a teoretického součtu čtverců.
4) Odchylku naměřených hodnot y_i od teoretických hodnot Y_i nazýváme reziduální poměr.
5) Metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci podílu odchylek naměřených hodnot od druhé mocniny reziduálního součtu čtverců.

Doplňte …….

6) Klasický regresní model předpokládá , že náhodné složky mají _________________ rozptyl.
7) Exponenciální regresi lze pomocí ________________transformace převést na lineární regresi.
8) Pro testování hypotézy o nulovosti individuálních regresních koeficientů se používá__________________.
9) Odhady parametrů regresních funkcí určujeme pomocí metody _______________________.
10) Determinační koeficient nabývá hodnot z intervalu _____________.

11) Personální ředitel firmy shromáždil údaje o věku (X) a době pracovní neschopnosti (Y) dvaceti náhodně vybraných stálých zaměstnanců. Zjištěné údaje jsou zaznamenány v tabulce.

X	Y	X	Y
20	4	58	20
35	14	46	13
35	15	43	16
34	10	33	10
32	10	29	10
28	9	36	11
25	12	48	14
46	15	55	15

38	15	36	14
50	16	19	6

a. Načrtněte bodový graf a určete vhodný typ regresní funkce.
b. Najděte rovnici regresní funkce z a. vyjadřující danou závislost.
c. Zhodnoťte výstižnost regresní funkce z a.

12) V sociologické studii okresu Karviná byla také zkoumána souvislost ročních úspor s ročními příjmy rodin s dvěma dětmi školou povinnými. Výsledky studie uvádí tabulka.

Příjem (tis. Kč)	104	125	146	167	111	135	189	196	205	210	170	230
Úspory (tis. Kč)	6	5,6	9,2	14	8	9,1	20,5	29	23,2	38,5	25	40

a. Najděte lineární regresní model popisující závislost úspor na příjmech.
b. Odhadněte úspory rodiny, bude-li její roční příjem 205 tis. Kč?

ODPOVĚDI

Ano či ne?….

1) Ano
2) Ano
3) Ne
4) Ne
5) Ne

Doplňte…

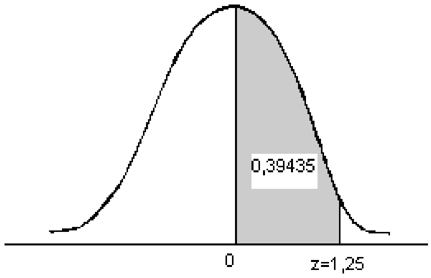
6) konstantní
7) logaritmické
8) *t*-test
9) nejmenších čtverců
10) [0,1]

11) **b.** $Y = 0{,}296\,x + 1{,}394$ **c.** $R^2 = 0{,}73$
12) **a.** $Y = -26{,}399 + 0{,}274x$ **b.** 29 771

PŘÍLOHA

TABULKA 1

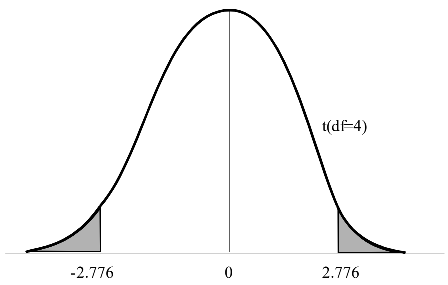
Plocha pod křivkou
normovaného normálního rozdělení *N*(0,1)



$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,10260	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,18824	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,36460	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	**0,39435**	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46928	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48573
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49532	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49897	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929

TABULKA 2

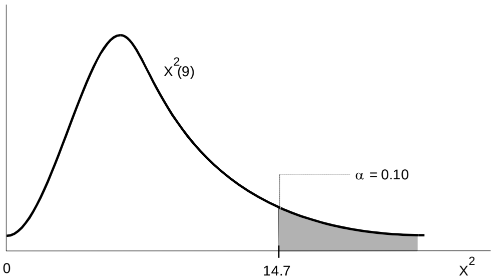
Kritické hodnoty Studentova rozdělení $t_{\alpha}(df)$



α	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	jednostranný
α df	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001	oboustranný
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941	
4	0,741	0,941	1,195	1,533	2,132	**2,776**	3,747	4,604	8,610	
5	0,727	0,925	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859	
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405	
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,073	0,883	1,100	1,383	1,883	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,695	0,783	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883	
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850	
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,271	2,080	2,518	2,831	3,819	
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,140	2,069	2,500	2,807	3,767	
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	
25	0,684	0,865	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,720	
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707	
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690	
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674	
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659	
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,666	
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551	
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460	
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373	
+∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291	

TABULKA 3

Kritické hodnotyrozdělení Chi-kvadrát
$\chi^2_\alpha(df)$



$df \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,7	3,8	5,0	6,6	7,9
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,6	6,0	7,4	9,2	10,6
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	6,3	7,8	9,4	11,3	12,8
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,8	9,5	11,1	13,3	14,9
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,2	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	**14,7**	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,0	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,51	10,98	12,34	14,04	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,58	32,0	35,2	38,1	41,6	42,2
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,6	38,9	41,9	45,6	48,6
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7

TABULKA 4

Kritické hodnoty Fisherova rozdělení *F*

$F_{\alpha}\ (df_1, df_2)$

Příklad: $F_{0,05}\ (5,7)=3,97$

		*df*₂								
df_1	α	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**0,100**	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86
	0,050	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
	0,025	647,79	799,48	864,15	899,60	921,83	937,11	948,20	956,64	963,28
	0,010	4052,1	4999,3	5403,5	5624,2	5763,9	5858,9	5928,3	5980,9	6022,4
2	**0,100**	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38
	0,050	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39
	0,010	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39
3	**0,100**	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
	0,050	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47
	0,010	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34
4	**0,100**	4,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
	0,050	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
	0,010	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	**0,100**	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32
	0,050	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
	0,025	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
	0,010	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	**0,100**	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96
	0,050	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
	0,010	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	**0,100**	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72
	0,050	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
	0,010	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	**0,100**	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56
	0,050	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
	0,010	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91

ZÁVĚREČNÝ TEST [Maximální možný zisk 100 bodů]

1. Řešte maticovou rovnici $AX = B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Je dána posloupnost $a_n = \dfrac{-3n+4}{n+5}$.

Určete $a_1 =$, $a_2 =$, $a_3 =$, $\lim a_n =$, $\sup P =$, $\inf P =$
Načrtněte graf.

3. Určete parametr $a \in R$ tak, aby byla matice A regulární :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2-a \\ 3+a & -2 \end{pmatrix}$$

4. Načrtněte graf funkce $y = -3x + 4$ a určete tyto limity

$\lim\limits_{x\to\infty}(-3x+4) = ...$ $\lim\limits_{x\to 1}(-3x+4) = ...$

5. Vypočtěte:

a) Vypočtěte součin: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

b) Načrtněte graf funkce $y = x^2$ a vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 =$

c) Vypočtěte inflexní body funkce $y = x^3 - 3x^2 + 6$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x - x^2} =$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{16-x^2} =$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{16-x^2} =$

6. Vypočtěte definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{4\arccos(x-2)}{\sqrt{9-x^2}}$

7. Pro funkci $f(x) = \ln(1-x^2)$ vypočtěte $f''(0) = ...$ a určete D(f) = ………..

$f'(x) =$

$f''(x) =$

8. V daném dnu bylo v prodejně elektroniky uskutečněno 30 nákupů (v Kč):

490	610	1140	1080	220	910	800	1170	1180	1170
880	1230	780	440	2040	1320	1170	780	1150	1360

a) Do následující tabulky doplňte četnosti tříd a načrtněte histogram četnosti:

Třída	Četnost
200 – 599	
600 – 999	
1000 – 1399	

b) Vypočtěte průměr, medián a směrodatnou odchylku.

9. Počet automobilů zastavujících u benzínového čerpadla za hodinu se řídí_________ rozdělením pravděpodobnosti.

a) Doplňte chybějící název.
b) Uveďte vzorec pro výpočet pravděpodobnosti zastavení alespoň *n* automobilů za hodinu, víte-li, že průměrně zastaví u čerpadla 1 automobil za 10 minut.
c) Vypočtěte pravděpodobnost podle a) pro $n = 2$ automobily.

10. V jisté oblasti bydlí voliči 3 politických stran: A, B, C, D. Průzkum volebních preferencí u 1000 respondentů ukázal následující výsledky:

Politická strana	A	B	C	D
Počet příznivců	240	252	266	242

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o stejném zastoupení příznivců všech 4 politických stran (tj. stejných volebních preferencích všech 4 stran). Použijte test Chi-kvadrát.

11. Výrobu horských kol (*y*) / v tis. ks / v závislosti na počtu odpracovaných hodin ve firmě udává následující tabulka:

x (*počet odpracovaných hodin*)	1500	1450	1600	1700	1900	2000
y (*výroba*)	22,3	22,0	23	25	26	28

a) Chybějící údaj za rok 2002 doplňte průměrem hodnot sousedních roků

b) Metodou regresní analýzy vypočtěte odhady neznámých regresních koeficientů v lineární regresní funkci.

c) Vypočtěte koeficient determinace a na jeho základě slovně zhodnoťte „přiléhavost“ dat k regresnímu modelu.

LITERATURA

Povinná:

STOKLASOVÁ, R., 2013. *Kvantitativní metody.* Karviná: SU OPF. ISBN 978-80-7248-848-3.

RAMÍK, J. a R. STOKLASOVÁ, 2014. *Statistika.* Karviná: SU OPF. ISBN 978-80-7510-030-6.

Doporučená:

ANDĚL, J., 2011. *Základy matematické statistiky.* Praha: Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-162-0.

ARLTOVÁ, M. a kol., 2014. *Základy statistiky v příkladech.* Tribun EU s.r.o. ISBN 978-80-2630-756-3.

HINDLS, R., S. HRONOVÁ, J. SEGER, a J. FISCHER, 2016. *Statistika pro ekonomy*. 8.vyd. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-8694-643-6.

KAŇKA, M., 2009. *Sbírka řešených příkladů z matematiky pro studenty vysokých škol.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-53-8.

KLŮFA, J. a J. COUFAL, 2003. *Matematika 1*. Praha: Ekopress. ISBN 8086119769.

MOUČKA, J. a P. RÁDL, 2015. *Matematika pro studenty ekonomie.* 2.vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5406-2.

SEDLAČÍK, M., J. NEUBAUER a O. KŘÍŽ, 2016. *Základy statistiky.* 2. roz. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5786-5.

SHRNUTÍ STUDIJNÍ OPORY

Obsahově studijní opora pokrývá základy matematiky a statistiky, které jsou náplní kurzu Kvantitativní metody v ekonomické praxi pro studijní programy: Cestovní ruch a turismus, Finance a účetnictví v bakalářském studiu na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné. Učební text se skládá ze dvou částí: v první se autorka věnuje základním poznatkům z lineární algebry (maticový počet a determinanty) a z matematické analýzy (funkce jedné reálné proměnné), druhá část je věnována základním poznatkům z popisné a induktivní statistiky (kvalitativní a kvantitativní znaky, diskrétní a spojité pravděpodobnostní modely, parametrické a neparametrické testy hypotéz, regresní analýza). V textu je uveden výklad teoretických základů dané problematiky a součástí každé kapitoly jsou také řešené příklady. Každá kapitola je uzavřena neřešenými příklady, na kterých si studenti mohou ověřit, jak danou kapitolu zvládli. V příloze je pak uveden vzorový závěrečný zkouškový test.

PŘEHLED DOSTUPNÝCH IKON

Čas potřebný ke studiu

Klíčová slova

Průvodce studiem

Rychlý náhled

Tutoriály

K zapamatování

Řešená úloha

Kontrolní otázka

Odpovědi

Samostatný úkol

Pro zájemce

Cíle kapitoly

Nezapomeňte na odpočinek

Průvodce textem

Shrnutí

Definice

Případová studie

Věta

Korespondenční úkol

Otázky

Další zdroje

Úkol k zamyšlení

Název:	Kvantitativní metody v ekonomické praxi
Autor:	**Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.**
Vydavatel:	Slezská univerzita v Opavě
	Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné
Určeno:	studentům SU OPF Karviná
Počet stran:	155

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.