INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Slezská univerzita v Opavě**
**Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné**

# KVANTITATIVNÍ METODY

Pro prezenční formu studia

**Radmila Stoklasová**

**Karviná 2012**

Projekt OP VK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0017
„Inovace studijních programů na Slezské univerzitě,
Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné“

**Obor:** Matematika.

**Anotace:** Publikace představuje studijní oporu základního vysokoškolského kurzu matematiky pro bakalářské studium na vysoké škole ekonomického zaměření. Obsahově pokrývá základní témata: jazyk matematiky, operace s maticemi, determinanty, soustavy lineárních algebraických rovnic, posloupnosti, funkce, limity, derivace funkce jedné reálné proměnné, vyšetřování funkcí, neurčitý a určitý integrál jedné reálné proměnné. Součástí textu jsou řešené a neřešené příklady.

**Klíčová slova:** matice, determinanty, soustavy lineárních algebraických rovnic, posloupnost a její limita, funkce a její limita, diferenciální počet jedné reálné proměnné, neurčitý integrál jedné reálné proměnné



**Autor:** **Mgr. Radmila Stoklasová, Ph.D.**

**Recenzenti:** Doplňte jména a příjmení včetně titulů

**ISBN** Doplní oddělení vědy a výzkumu.

# OBSAH

# ÚVOD

Tento text představuje studijní oporu pro studium kvantitativních metod ekonomických studijních programů v bakalářském studiu na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné.

Skriptum je rozděleno do 12 kapitol. Jednotlivé kapitoly odpovídají obvyklým 12 výukovým týdnům jednoho semestru a jsou přibližně stejně obsahově rozsáhlé a obtížné. Takový rozsah učiva odpovídá klasické dvouhodinové přednášce v prezenčním studiu na vysoké škole ekonomického zaměření.

První kapitola se zabývá výstavbou matematiky a jsou zde uvedeny základní pojmy, se kterými se v dalším textu pracuje. Kapitola druhá a třetí je opakováním učiva střední školy a shrnuje znalosti algebraických výrazů a jsou zde uvedeny různé typy rovnic a nerovnic a jejich řešení. Lineární algebře jsou věnovány kapitoly 4 – 6, ve kterých jsou uvedeny základní vlastnosti matic, determinantů a řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Kapitola sedmá rozšíří Vaše znalosti o číselných posloupnostech a jejich limitách. Důležitá je následující kapitola osmá, která je věnována funkcím jedné reálné proměnné. Jsou zde uvedeny grafy elementárních funkcí a jejich vlastnosti. V další kapitole se dovíte, jak vypočítat limitu funkce, seznámíte se také mimo jiné s pojmem jednostranná limita. Mezi jednu z nejdůležitějších patří kapitola 10, která je věnována diferenciálnímu počtu funkce jedné reálné proměnné a další kapitola se zabývá užitím diferenciálního počtu. Ve dvanácté kapitole se seznámíte s neurčitým integrálem funkce jedné reálné proměnné, dále s určitým integrálem a jeho užitím v geometrii.

# 1 JAZYK MATEMATIKY

## 1.1 MATEMATICKÁ LOGIKA

Základem každé teorie je systém výroků, které přijímáme jako pravdivé a které můžeme nazývat **axiomy** (nebo postuláty). V matematice další tvrzení vyplývají jedno z druhého a z axiomů a jsou zpravidla provázeny úvahami, které mají zajistit jejich platnost. O úvahách tohoto druhu hovoříme jako o **důkazech**, a tvrzení, jejichž platnost zajišťují, nazýváme **věty** (nebo teorémy).

Existují termíny, s nimiž se setkáváme jak v úvahách běžného života, tak i ve všech možných odborných disciplínách; zde náleží slova „*a*“, „*ne*“, „*nebo*“, „*je*“, „*každý*“, „*některý*“ a mnoho jiných. Obor **logika**, který pokládáme za základ všech ostatních věd, má za úkol stanovit přesný význam takových termínů a formulovat nejobecnější zákony, jimiž se tyto termíny řídí. Jde vlastně o nauku o jazyce zabývající se jak jeho strukturou (**syntax**), tak i jeho významovou stránkou a vztahem jazyka k realitě (**sémantika**).

Logika se vyvinula v samostatnou disciplínu dříve než aritmetika a geometrie. Na druhé straně teprve „nedávno“ se tento obor začal znovu rozvíjet. Mohutný impuls dostala logika v minulém stolení rozvojem algebraických metod v logice. Tak vznikla **matematická** (formální nebo symbolická) **logika**.

Matematická logika se zabývá tím druhem činnosti, kterou matematici vyvíjejí při dokazování. Matematická logika studuje povahu důkazu a pokouší se předvídat všechno možné, co budou vůbec kdy matematici dokazovat, a všechno, co nikdy nebudou moci dokázat.

**Výrok** je primitivní pojem matematické logiky. Výrok je tvrzení, pro které má smysl otázka o jeho pravdivosti. Jde o nejjednodušší a základní stavební kameny **výrokové logiky**, nebo také **výrokového počtu**. Mezi termíny logické povahy patří vybraná skupina slov jako „ne“, „a“, „nebo“, „jestliže..., pak...“, „... právě tehdy, jestliže ...“.

Všechna tato slova jsou prostředkem vytváření složených výroků z jednodušších výroků.
Výroky budeme označovat zpravidla malými písmeny řecké abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
Z jednotlivých výroků vytváříme složitější výroky užitím logických operací pomocí logických spojek.
Uvedeme nejdůležitější spojky výrokové logiky. Předpokládejme, že $\alpha, \beta$ jsou výroky. Známe pět **logických operací** (negaci, disjunkci, konjunkci, implikaci, ekvivalenci), které jsou reprezentovány **logickými spojkami** ( $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). V tabulce 1 naleznete jednotlivé logické spojky, jejich užití v logických operacích při vytváření logických souvětí a také jak tyto spojky čteme.

**Poznámka.** Spojku *nebo* v českém jazyce je možno chápat jako spojku vylučovací nebo nevylučovací. V matematice ji budeme *vždy chápat v nevylučovacím smyslu.*

Tabulka 1-1: Logické operace a logické spojky

| Logická operace | Zápis | Čteme | Česky |
|---|---|---|---|
| Negace | $\neg\alpha$ | non $\alpha$ | • není pravda, že $\alpha$<br>• $\alpha$ není pravdivé<br>• $\alpha$ neplatí |
| Disjunkce | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha$ vel $\beta$ | $\alpha$ nebo $\beta$ |
| Konjunkce | $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha$ et $\beta$ | • $\alpha$ a $\beta$<br>• $\alpha$ a současně $\beta$ |
| Implikace | $\alpha \Rightarrow \beta$ | $\alpha$ implikuje $\beta$ | • jestliže $\alpha$, potom $\beta$<br>• $\alpha$ je postačující podmínka pro $\beta$<br>• $\beta$ je nutná podmínka pro $\alpha$ |
| Ekvivalence | $\alpha \Leftrightarrow \beta$ | $\alpha$ je ekvivalentní $\beta$ | • $\alpha$ právě tehdy, jestliže $\beta$<br>• $\alpha$ tehdy a jen tehdy, jestliže $\beta$<br>• $\alpha$ je nutná a postačující podmínka pro $\beta$ |

Velice důležité je používání proměnných v matematice a vyjádření toho, že nějaká vlastnost je splněna „pro všechny“ nebo „pro některé“ prvky určité množiny.

Symbol „$\forall$“ se nazývá **obecný** (**univerzální**, **velký**) **kvantifikátor**.
Zápis $\forall x \in M$ čteme „pro všechna“ (pro každé, pro libovolné) $x$ z množiny M.

Symbol „$\exists$“ se nazývá **existenční (malý) kvantifikátor.**
Zápis $\exists x \in M$ čteme „existuje“ (aspoň jedno) $x$ z množiny M.

## 1.2 ČÍSELNÉ MNOŽINY

Množina přirozených čísel $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, $N_0 = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$.
Množina celých čísel $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.
Množina racionálních čísel $Q$ je rozšířením množiny celých čísel o všechna necelá racionální čísla tvaru $\frac{p_1}{p_2}$, kde $p_1, p_2$ $(p_2 \neq 0)$ jsou nesoudělná celá čísla.

Množina reálných čísel $R = (-\infty,\infty)$. Někdy namísto $\infty$ používáme $+\infty$ a tento symbol se nazývá „plus nekonečno“.
Množina iracionálních čísel $R - Q$. Jsou to čísla, která jsou reálná, ale nejsou racionální. Například Ludolfovo číslo $\pi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

**Poznámka.** Termíny racionální a iracionální čísla vznikly z latinského slova *ratio*, tj. rozum. Proto racionální čísla jsou čísla „rozumná“ a iracionální čísla jsou čísla „nerozumná“. Nerozumného však na nich nic není!

Kvůli zjednodušení se v tomto textu využívá také běžná **součtová a součinová symbolika** nebo též **sumační a multiplikační symbolika**

Pro zápis součtu více sčítanců nebo součinu více činitelů se používá symbolika, která podstatně zjednodušuje vyjadřování.

Nechť $n \in N$, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in R$. Potom značíme symbolem

**a.** $\sum_{i=1}^{n} a_i$ součet $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$,

**b.** $\prod_{i=1}^{n} a_i$ součin $a_1.a_2.a_3...a_n$.

Index $i$ se nazývá součtový (resp. součinový) index, číslo 1 se nazývá dolní mez a číslo $n$ horní mez tohoto součtu (resp.součinu).

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Zapište pomocí sumační symboliky aritmetický průměr čísel $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

***Řešení.***

Aritmetický průměr $\bar{a} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Vypočtěte: **a.** $\sum_{i=-1}^{3} 2^i$, **b.** $\prod_{i=3}^{n=5} (2i + 4)$.

***Řešení.***

**a.** $\sum_{i=-1}^{3} 2^i = 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = \dfrac{31}{2}$,

**b.** $\prod_{i=3}^{n=5} (2i + 4) = 10.12.14 = 1680$.

**Rozšířená číselná osa** $R^*$

Je to množina $R^*$ taková, že $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$, tj. k množině $R$ přidáme 2 prvky $\infty, -\infty$, takové, že pro $\forall x \in R$ platí:

$$(x < \infty \quad \wedge \quad -\infty < x \quad \wedge \quad -\infty < \infty).$$

Prvky množiny $R^*$ budeme nazývat **zobecněná reálná čísla**, přičemž $\infty, -\infty$ nazveme **nevlastní reálná čísla**.
Na množinu $R^*$ lze rozšířit některé operace definované na množině všech reálných čísel *R*.

Definujeme:

**1.** $\forall a \in R^* : \ (a > -\infty \ \Rightarrow \ a + \infty = \infty + a = \infty)$,

**2.** $\forall a \in R^* : \ (a < \infty \ \Rightarrow \ a - \infty = -\infty + a = -\infty)$,

**3.** $\forall a \in R : \ \left(\dfrac{a}{\pm\infty} = 0\right)$,

**4.** $\forall a \in R^* : \ (a > 0 \ \Rightarrow \ a.(\pm\infty) = (\pm\infty).a = \pm\infty)$,

**5.** $\forall a \in R^* : \ (a < 0 \ \Rightarrow \ a.(\pm\infty) = (\pm\infty).a = \mp\infty)$,

**6.** $-(-\infty) = \infty$,

**7.** $|\pm\infty| = \infty$.

Toto rozšíření operací je účelné zejména pro výpočet limit v kapitole 9. Některé operace nejsou definovány například: $\infty - \infty$, $0.(\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{k}{0}$, $0^0$, $\infty^0$, $1^{\pm\infty}$.
V takovém případě hovoříme o **neurčitých výrazech**.

Dalšími důležitými pojmy jsou pojmy suprémum a infimum množiny.
Nejprve definujme pojmy:
I) horní a dolní závora množiny,
II) minimum a maximum množiny, pak přejdeme k definici
III) supréma a infima a uvedeme některé jejich vlastnosti.

## DEFINICE 1

Nechť množina $M \subset R^*$, $a,b \in R^*$. Řekneme, že:

**a.** $a$ je **horní závora množiny** *M*, jestliže $\forall x \in M : (x \le a)$,

**b.** $b$ je **dolní závora množiny** *M*, jestliže $\forall x \in M : (x \ge b)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Určete horní a dolní závory množin:

**a.** všech reálných čísel *R*,

**b.** prázdné množiny,

**c.** $\langle 0,1 \rangle$.

***Řešení.***

**a.** Horní závorou je nevlastní číslo $\infty$, dolní závorou je nevlastní číslo $-\infty$.

**b.** Horní i dolní závorou prázdné množiny je každé číslo $a \in R^*$.

**c.** Horní závorou intervalu jsou čísla $\infty, 5000, 5, 1.$ Dolní závorou jsou např. čísla $-0{,}5; -2; -102$.

Vidíme, že horní či dolní závora množiny není jednoznačně určena. Navíc horní či dolní závora může být i prvkem této množiny (příklad c).

## DEFINICE 2

Nechť množina $M \subset R$, $a, b \in R$. Řekneme, že:

**a.** $a$ je *maximum množiny M* právě tehdy, jestliže $a \in M$ a $a$ je horní závora množiny *M*,
**b.** $b$ je *minimum množiny M* právě tehdy, jestliže $b \in M$ a $b$ je dolní závora množiny *M*.

Množina *M* má nejvýše jedno maximum a nejvýše jedno minimum. Maximum množiny *M* budeme značit max(*M*). Analogicky značíme minimum, tedy min(*M*).

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Určete maximum a minimum množiny:
**a.** všech reálných čísel *R*,
**b.** prázdné množiny,
**c.** $(0,1\rangle$.

***Řešení.***

**a.** Množina nemá maximum ani minimum.
**b.** Množina nemá maximum ani minimum.
**c.** Maximem intervalu je číslo 1, minimum daného intervalu neexistuje.

## DEFINICE 3

Nechť množina $M \subset R^*$, $a, b \in R^*$. Řekneme, že:

**a.** $a$ je **suprémum množiny** *M*, jestliže *a* je minimem množiny horních závor množiny *M*,
**b.** $b$ je **infimum množiny** *M*, jestliže *b* je maximem množiny dolních závor množiny *M*.

Suprémum množiny *M* budeme značit symbolem sup(*M*) a infimum symbolem inf(*M*).

Uvědomte si platnost následujících tvrzení:

- Existuje právě jedno suprémum a existuje právě jedno infimum množiny $M \subseteq R^*$. Suprémum i infimum množin **vždy** existují v $R^*$.
- $\sup(M) = \inf(M)$ právě tehdy, jestliže množina $M$ je jednoprvková.
- $\sup(M) \in M$ právě tehdy, jestliže existuje maximum množiny $M$, přičemž platí $\max(M) = \sup(M)$.
- $\inf(M) \in M$ právě tehdy, jestliže existuje minimum množiny $M$, přičemž platí $\min(M) = \inf(M)$.

### DEFINICE 4

Množina $M$ je **shora omezená**, jestliže $\sup(M) < \infty$,
množina $M$ je **zdola omezená**, jestliže $\inf(M) > -\infty$,
množina $M$ je **omezená**, jestliže je současně zdola i shora omezená.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Určete suprémum a infimum množiny:

**a.** všech reálných čísel $R$,
**b.** prázdné množiny,
**c.** $\langle 0,1 \rangle$.

***Řešení.***

**a.** $\sup(R) = \infty$, $\inf(R) = -\infty$,
**b.** $\sup(\emptyset) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = \infty$, (promyslete)
**c.** $\sup\langle 0,1 \rangle = 1$, $\inf\langle 0,1 \rangle = 0$.

## 1.3 OPERACE S MNOŽINAMI

**Základním vztahem** mezi prvkem a množinou je vztah „býti prvkem množiny“ značíme jej symbolem $a \in A$. Symbolem $a \notin A$ označujeme skutečnost, že prvek $x$ nepatří do množiny $A$.

**Množinou** rozumíme souhrn libovolných objektů, které jsou vzájemně rozlišitelné. Objekty tvořící množinu se nazývají **prvky (elementy)** množiny. Základní vlastností množiny je jednoznačné určení množiny jejími prvky. O každém objektu (abstraktním nebo reálném) můžeme jednoznačně rozhodnout, zda do dané množiny patří nebo nepatří. Množiny označujeme velkými písmeny, prvky malými písmeny. Pro zadání množin používáme složené závorky.

**Zadání množin**

**a.** výčtem (vyjmenováním) prvků množiny, např. $\{a, b, c\}$,

**b.** uvedením charakteristické vlastnosti, společné všem prvkům množiny. Žádný jiný prvek (nepatřící do množiny) tuto vlastnost nemá, např. $\{x \in R; -3 \le x \le 10\}$.

Podle počtu prvků dělíme množiny na **konečné, nekonečné a množinu prázdnou**. Prázdná množina neobsahuje žádný prvek. V teorii množin má obdobný význam jako nula v teorii čísel.

**Základní vztahy** mezi množinami jsou vztahy:

**a.** rovnosti: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$,

**b.** inkluze (být podmnožinou): $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

**Operace s množinami:**

**a.** sjednocení množin *A*, *B*: $A \cup B = \{x;\ x \in A \ \vee\ x \in B\}$,

**b.** průnik množin *A*, *B*: $A \cap B = \{x;\ x \in A \ \wedge\ x \in B\}$,

**c.** rozdíl množin *A*, *B*: $A - B = \{x;\ x \in A \ \wedge\ x \notin B\}$,

**d.** doplněk množiny *A* v základní množině *Z*: $\overline{A} = \{x;\ x \in Z \ \wedge\ x \notin A\}$,

**e.** kartézský součin množin *A*, *B*: $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \ \wedge\ y \in B\}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Určete pomocí intervalů prvky množin $A, B, C, D, A \cap C, \overline{B}, C - B, \overline{D}, A \cup B$,

kde $A = \left\{x \in R; |x-2| \le 4 \ \wedge\ \left|6 + \frac{x}{2}\right| > 7\right\}$, $\quad B = \left\{x \in R; \left|\frac{x}{x+2}\right| \le 1\right\}$,

$C = \{x \in R; x^2 + 2x - 8 \le 0\}$, $\quad D = \{x \in R; x^2 + x + 1 > 0\}$.

***Řešení.***

Množina *A*: $|x-2| \le 4 \quad \wedge \quad \left|6 + \frac{x}{2}\right| > 7$

$$\frac{1}{2}|12 + x| > 7$$

$$|12 + x| > 14$$

$$x \in \langle -2, 6\rangle \qquad x \in (-\infty, -26) \cup (2, \infty)$$

$$A = \langle -2,6\rangle \cap [(-\infty,-26) \cup (2,\infty)] = (2,6\rangle .$$

Množina *B*: $\left|\frac{x}{x+2}\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le \frac{x}{x+2} \le 1$

$$-1 \le \frac{x}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{x}{x+2} \le 1$$

$$0 \le \frac{2x+2}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{-2}{x+2} \le 0$$

$$B=\left[(-\infty,-2)\cup\langle -1,\infty)\right]\cap(-2,\infty)=\langle -1,\infty).$$

Množina $C$: $x^2+2x-8\le 0$

$$(x+4)(x-2)\le 0$$

Řešením kvadratické nerovnice je $x\in\langle -4,2\rangle$, tedy $C=\langle -4,2\rangle$.

Množina $D$: $x^2+x+1>0$

Protože diskriminant je záporný $(D=-3)$ jsou řešením nerovnice v oboru reálných čísel buď všechna reálná čísla, nebo množina prázdná. V našem případě je $D=R$.

$A\cap C=\langle 2,6\rangle\cap\langle -4,2\rangle=\varnothing$,

$\overline{B}=R-B=(-\infty,\infty)-\langle -1,\infty)=(-\infty,-1)$,

$C-B=\langle -4,2\rangle-\langle -1,\infty)=\langle -4,-1)$,

$A\cup B=\langle 2,6\rangle\cup\langle -1,\infty)=\langle -1,\infty)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Graficky znázorněme množiny $A, B, C, D, E, F, G, \overline{A}$, kde

$A=\{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2<9\}$,

$B=\{(x,y)\in R^2;\ x^2\ge y\}$,

$C=\{(x,y)\in R^2;\ x<0 \quad\wedge\quad y>-1\}$,

$D=\{(x,y)\in R^2;\ |x|\le 2 \quad\wedge\quad |y|>1\}$,

$E=\{(x,y)\in R^2;\ x+2y\le 2\}$,

$F=\{(x,y)\in R^2;\ x=y^2\}$,

$G=\{(x,y)\in R^2;\ x>y \quad\wedge\quad y\ge 0\}$.

***Řešení.***

Množina $A$ je kruh se středem $S=[0,0]$ a poloměrem $r=3$, bez své hranice.

Množina $B$ je vnější oblast paraboly, která má vrchol v bodě $V=[0,0]$ a větve paraboly jsou směrem nahoru.

Množina $C$ je průnikem poloroviny $x<0$ (hranicí je osa $y$, která do množiny $C$ nepatří) a poloroviny $y>-1$ (hranicí je přímka $y=-1$, která do množiny $C$ nepatří).

Množina $D$ je průnikem dvou oblastí: 1) vnější oblastí pásu, který je omezen přímkami $y=1$, $y=-1$, které do množiny $D$ nepatří, 2) vnitřní oblastí pásu, který je omezen přímkami $x=2$, $x=-2$, které do množiny $D$ patří.

Množina $E$ je plocha „pod přímkou“, která prochází body $[0,1]$, $[2,0]$. Přímka do množiny $E$ patří.

Množina $F$ je parabola, která má vrchol v bodě $V=[0{,}0]$ a větve paraboly jsou směrem doprava.
Množina $G$ je průnikem dvou polorovin: 1) dolní polorovina, která je omezena přímkou $y=x$, přičemž přímka do množiny $G$ nepatří, 2) horní polorovina, která je omezena přímkou $y=0$,(osa $x$), která do množiny $G$ patří.

Množina $\overline{A}$ je doplňkem množiny $A$, tj. vnější oblast kružnice se středem $S=[0{,}0]$ a poloměrem $r=3$, včetně hranice kružnice.

## 1.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Vypočtěte $\sum_{i=-1}^{1} 2i + \prod_{j=1}^{3} 3^j$ .

### PŘÍKLAD 2

Vypočtěte následující výraz, je-li $a \in R$: $V=(a+\infty)((-\infty)+a)$.

### PŘÍKLAD 3

Ve kterém z následujících případů se jedná o neurčitý výraz?

**a.** $\frac{a}{\infty}$, **b.** $\frac{\infty}{(-\infty)}$, **c.** $\infty.\infty$ ,

**d.** $\frac{5}{0}$, **e.** $5^0$, **f.** $0^0$.

### PŘÍKLAD 4

Určete maximum, minimum, suprémum a infimum množin:

**a.** množina přirozených čísel *N*,
**b.** $B=\langle 3,8\rangle$ ,
**c.** $C=(-\infty,4)$,
**d.** $D=\{6\}\cup(1,5)$.

Na základě vypočtených hodnot rozhodněme, zda jsou tyto množiny omezené, omezené shora, omezené zdola.

### PŘÍKLAD 5

Určete horní a dolní závory množiny všech racionálních čísel a množiny všech iracionálních čísel.

### PŘÍKLAD 6

Určete prvky množin $A, B, C, D, \overline{A}, \overline{D}, B-A, B\cup C, A\cap B, \overline{C\cup D}$, kde:

$$A=\{x\in R; |x+2|<3 \quad \wedge \quad |2x+6|\geq 2\},\qquad B=\left\{x\in R; \left|\frac{x+1}{x-5}\right|\leq 1\right\},$$

$$C=\{x\in R; x^2-3x-10<0\},\qquad D=\{x\in R; x^2+25<0\}.$$

### PŘÍKLAD 7

Graficky znázorněte množiny $A, B, C, D, E, F, G, H, \overline{A}, A\cap B, \overline{H}-E$, kde

$$A=\{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2\leq 4\},$$
$$B=\{(x,y)\in R^2;\ x^2\leq y\},$$
$$C=\{(x,y)\in R^2;\ x>0 \quad \wedge \quad y<0\},$$
$$D=\{(x,y)\in R^2;\ |x|\leq 3 \quad \wedge \quad |y|>2\},$$
$$E=\{(x,y)\in R^2;\ x+y\leq 1\},$$
$$F=\{(x,y)\in R^2;\ x\leq (y-2)^2\},$$
$$G=\{(x,y)\in R^2;\ x-5=0 \quad \wedge \quad -1\leq y\leq 1\},$$
$$H=\{(x,y)\in R^2;\ (x-2)^2+(y+1)^2>9\}.$$

## 1.5 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1) $\sum_{i=-1}^{1} 2i = 2(-1)+2.0+2.1=0$, $\prod_{j=1}^{3} 3^j = 3+9+27=33$, $\sum_{i=-1}^{1} 2i + \prod_{j=1}^{3} 3^j = 33$.

2) Postupně vypočteme $a+\infty=\infty$, $(-\infty)+a=-\infty$.
Tedy $V=(a+\infty)((-\infty)+a)=\infty.(-\infty)=-\infty$.

3) Neurčité výrazy představují operace uvedené po písmenem b., d., f.

4) sup($N$)= $\infty$, max($N$) neexistuje, neboť to musí být číslo z $R$, inf($N$)= 1 = min($N$), množina $N$ není omezená, je omezená pouze zdola,
sup($B$)= 8 = max($B$), inf($B$)= 3 = min($B$), množina $B$ je omezená, tj. je omezená shora i zdola,

sup($C$)= 4, max($C$) neexistuje, inf($C$)= $-\infty$, min($C$) neexistuje, množina $C$ není omezená, je omezená pouze shora,
sup($D$)= 6 = max($D$), inf($D$)= 1, min($D$) neexistuje, množina $B$ je omezená, tj. je omezená shora i zdola.

5) Horní závorou množiny všech racionálních čísel a množiny všech iracionálních čísel je nevlastní číslo $\infty$, dolní závorou množiny všech racionálních čísel a množiny všech iracionálních čísel je nevlastní číslo $-\infty$.

6) $A = \left(-5,-4\right\rangle, B = \left(-\infty,2\right\rangle, C = \left(-2,5\right), D = \emptyset,$

$\overline{A} = \left(-\infty,-5\right\rangle \cup \left(-4,\infty\right),\ \overline{D} = R,$

$B - A = \left(-\infty,-5\right\rangle \cup \left(-4,2\right\rangle,\ B \cup C = \left(-\infty,5\right),\ A \cap B = \left(-5,-4\right\rangle,$

$\overline{C \cup D} = \left(-\infty,-2\right\rangle \cup \left\langle 5,\infty\right)$

7) Množina $A$ je kruh se středem S[0,0] a poloměrem $r = 2$,
množina $B$ je vnitřní oblast paraboly s vrcholem V[0,0], hlavní osa je rovnoběžná s osou $x$,
množina $C$ je IV. kvadrant roviny $R^2$ bez souřadnicových os,
množina $D$ je sjednocením dvou částí pásu, který je ohraničen přímkami $x = -3$, $x = 3$, $y = -2$, $y = 2$, přímky $y = -2$, $y = 2$ do množiny $D$ nepatří,
množina $E$ je dolní část roviny $R^2$ ohraničená přímkou, jejíž průsečíky s osami jsou $P_x[1,0]$, $P_z[0,1]$,
množina $F$ je vnitřní oblast paraboly s vrcholem V[0,2], hlavní osa je rovnoběžná s osou $y$,
množina $G$ je úsečka s krajními body [5,1], [5,-1],
množina $H$ je vnější oblast kruhu se středem S[2,-1] a poloměrem $r = 3$.

# 2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

**Algebraický výraz** je zápis, který je složen z čísel a písmen vyjadřujících jednotlivé proměnné (neznámé). Čísla a písmena jsou spojována znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování či odmocňování. Algebraický výraz může dále obsahovat závorky, které stanovují pořadí jednotlivých početních operací.

Příkladem výrazu je např. $(a+1)^2$, $\frac{x+5}{2}$, $\sqrt{x+y}$ +7, atd.

S úpravami algebraických výrazů souvisí nutnost stanovení definičního oboru proměnných, tj. vymezení, kdy má daný výraz smysl. Nejčastěji se budeme setkávat s určením podmínek řešitelnosti pro lomené výrazy, kdy jmenovatel zlomku nesmí nabývat nulové hodnoty. Úprava algebraického výrazu představuje nahrazení výrazu výrazem jiným, který se mu rovná v definičních oborech proměnných. Zjednodušení algebraického výrazu je situace, kdy nový výraz obsahuje menší počet členů, proměnných, atd.

## 2.1 Operace s jednočleny a mnohočleny

Pod pojmem jednočlen chápeme výraz, který obsahuje pouze operace násobení a umocňování. Jedná se tedy o součin určitého čísla (koeficientu) a mocnin jedné popř. více proměnných s přirozenými mocniteli.
Mnohočlen neboli polynom je potom součet konečného počtu jednočlenů (členů mnohočlenu). Stupeň mnohočlenu je dán nejvyšším exponentem proměnné. Mnohočlen, který obsahuje pouze exponent $a^0$, je mnohočlen nultého stupně. Mnohočleny jsou si rovny, jestliže mají všechny členy shodné. Hodnotu mnohočlenu získáme tak, že za proměnnou dosadíme konkrétní reálné číslo.

Pro všechna čísla $a$, $b$, $c$ z množiny všech reálných čísel $R$ platí:

| | |
|---|---|
| $a+0=0+a=a$<br>$a\cdot 1=1\cdot a=a$ | neutrálnost |
| $a+b=b+a$<br>$a\cdot b=b\cdot a$ | komutativnost |
| $(a+b)+c=a+(b+c)$<br>$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ | asociativnost |
| $a\cdot(b+c)=ab+ac$ | distributivnost |

Při součtu či rozdílu mnohočlenů slučujeme odpovídající si členy, při násobení násobíme každý člen s každým.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Sečtěte jednočleny:

$$-1\frac{2}{3}ab^3 + 2a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b$$

***Řešení.***

$$-1\frac{2}{3}ab^3 + 2a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b =$$
$$= \left(-1\frac{2}{3}ab^3 - ab^3\right) + (2a^3b - a^3b) + \left(-4\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}a^2b\right) == -2\frac{2}{3}ab^3 + a^3b - 5a^2b$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Sečtěte mnohočleny:

$$\{[(2a + b) - (2a - b)] + (4a + 1) - (2a - 3)\} - [5 - (3a + 2)]$$

***Řešení.***

$$\{[(2a + b) - (2a - b)] + (4a + 1) - (2a - 3)\} - [5 - (3a + 2)] =$$

$$= 2a + b - 2a + b + 4a + 1 - 2a + 3 - 5 + 3a + 2 = 5a + 2b + 1$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Vynásobte a upravte:

$$2a(10a - 3b) - 5\{b(5a + 3b) - [3b^2 - a(4a - 6b)]\}$$

***Řešení.***

$$2a(10a - 3b) - 5\{b(5a + 3b) - [3b^2 - a(4a - 6b)]\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{5ab + 3b^2 - [3b^2 - 4a^2 + 6ab]\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{5ab + 3b^2 - 3b^2 + 4a^2 - 6ab\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{4a^2 - ab\} = 20a^2 - 6ab - 20a^2 + 5ab = -ab$$

**Dělení mnohočlenu** probíhá následujícím způsobem. Člen nejvyššího stupně dělence se dělí členem nejvyššího stupně dělitele. Tímto postupem získáme první člen neúplného podílu, kterým zpětně vynásobíme dělitele. Vzniklý výsledek odečteme od dělence, jehož stupeň se provedenou úpravou sníží. Dále postupujeme stejným způsobem.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Vydělte:

a) $(x^2 + 5x + 4) : (x + 1)$

b) $(10x^3 + 7x^2 - x - 1) : (2x + 1)$

***Řešení.***

a)

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 5x + 4) : (x + 1) = x + 4 \\
\underline{-(x^2 + x)} \\
\quad 4x + 4 \\
\quad \underline{-(4x + 4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

podmínka: $x \neq -1$

b)

$$
\begin{array}{l}
(10x^3 + 7x^2 - x - 1) : (2x + 1) = 5x^2 + x - 1 \\
-(10x^3 + 5x^{2)} \\
\qquad 2x^2 - x - 1 \\
\quad \underline{-(2x^2 + x)} \\
\qquad\quad -2x - 1 \\
\qquad \underline{-(-2x - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

podmínka: $x \neq -\frac{1}{2}$

**Rozklad mnohočlenu na součin** je možný pomocí vytýkání společného činitele před závorku, využití rozkladu dle vzorců pro mnohočleny nebo pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu. Cílem je úprava původního mnohočlenu na součin několika jednodušších mnohočlenů.

Při úpravách algebraických výrazů se budete setkávat s následujícími vzorci:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Výrazy $a^2 + b^2$, $a^2 + ab + b^2$, $a^2 - ab + b^2$ jsou výrazy v oboru reálných čísel nerozložitelné.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Upravte:

a) $(x-2)^2$
b) $(x+2)^3$
c) $x^3 + 8$
d) $x^3 - 27$
e) $25x^2 - 64y^2$

***Řešení.***

a) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
b) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
c) $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
d) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$
e) $25x^2 - 64y^2 = (5x - 8y)(5x + 8y)$

**Rozklad kvadratického trojčlenu**

Pod pojmem **kvadratický trojčlen** rozumíme výraz $ax^2 + bx + c$. Setkávat se budete rovněž s pojmem **normovaný kvadratický trojčlen** ve tvaru $x^2 + px + q$.

Kvadratický trojčlen lze rozložit na součin lineárních dvojčlenů v množině všech reálných čísel $R$ za podmínky, že diskriminant neboli výraz $b^2 - 4ac > 0$ resp. $p^2 - 4q > 0$. Kořeny kvadratického trojčlenu se označují $x_1$ a $x_2$ a platí, že:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Upravte na součin:

a) $x^2 - 8x + 15$
b) $x^2 - 3x - 28$
c) $x^2 - 4x + 3$

d) $x^2 + 4x + 3$
e) $x^2 - 4x - 12$
f) $x^2 - 8x + 12$
g) $x^2 + 4x - 12$

***Řešení.***

a) $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

$x_1 + x_2 = 8 \qquad x_1 = 3$
$x_1 \cdot x_2 = 15 \qquad x_2 = 5$

b) $x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$

$x_1 + x_2 = 3 \qquad x_1 = 7$
$x_1 \cdot x_2 = -28 \qquad x_2 = -4$

c) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
d) $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$
e) $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$
f) $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$
g) $x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$

## 2.2 LOMENÉ VÝRAZY

Lomené výrazy jsou výrazy ve tvaru podílu dvou výrazů, tj. podíl $\frac{a}{b}$, kde $b \neq 0$.
Výraz $a$ se nazývá **čitatel** zlomku a výraz $b$ **jmenovatel** zlomku. U lomených výrazů je nutné stanovit definiční obor proměnné. Podmínkou je, že jmenovatel lomeného výrazu nesmí nabývat nulové hodnoty.

**Početní operace s lomenými výrazy**
Pro všechna čísla $a,b,c,d$ z množiny všech reálných čísel $R$, kde $b \neq 0, d \neq 0$ platí:

Sčítání a odčítání lomených výrazů: $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Násobení lomených výrazů: $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dělení a úprava složeného zlomku: $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Často bude výhodné využít před operacemi sčítání, odčítání, násobení a dělení tzv. krácení zlomku v podobě $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, kde $k \neq 0$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Upravte algebraické výrazy a stanovte podmínky řešitelnosti:

a) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

b) $\dfrac{2x-1}{2x}-\dfrac{2x}{2x-1}-\dfrac{1}{2x-4x^2}$

c) $\dfrac{2a+b}{a^2+ab}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+b}$

***Řešení.***

a)

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

podmínka: $x\neq\pm1$

b)

$$\frac{2x-1}{2x}-\frac{2x}{2x-1}-\frac{1}{2x-4x^2}=\frac{2x-1}{2x}-\frac{2x}{2x-1}-\frac{1}{2x\cdot(1-2x)}=$$

$$=\frac{(2x-1)(2x-1)-2x\cdot 2x+1}{2x\cdot(2x-1)}=\frac{4x^2-4x+1-4x^2+1}{2x\cdot(2x-1)}=\frac{-4x+2}{2x\cdot(2x-1)}=$$

$$=\frac{-2\cdot(2x-1)}{2x\cdot(2x-1)}=-\frac{2}{2x}=-\frac{1}{x}$$

podmínky: $x\neq 0, x\neq\frac{1}{2}$

c)

$$\frac{2a+b}{a^2+ab}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b}{a(a+b)}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b-a-b+a}{a(a+b)}=\frac{2a}{a(a+b)}=\frac{2}{a+b}$$

podmínky: $a\neq 0, a\neq -b$

**Složený zlomek**

Složený zlomek představuje podíl dvou jednoduchých zlomků. Složený zlomek dělíme, jestliže násobíme jeho převrácenou hodnotu. V některých případech bude nutné nejdříve složený zlomek upravit, tj. rozšířit a stanovit nejmenší společný jmenovatel v čitateli a jmenovateli složeného zlomku (tj. ve jmenovatelích jednoduchých zlomků). Stejně jako u jednoduchého zlomku nesmíme ovšem zapomenout na vymezení podmínek řešitelnosti.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Upravte složené zlomky a stanovte podmínky řešitelnosti.

a) $$\frac{x+\frac{x+1}{2}}{1+\frac{6x-2}{4}}$$ b) $$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$$

***Řešení.***

a)

$$\frac{x+\frac{x+1}{2}}{1+\frac{6x-2}{4}}=\frac{\frac{2x+x+1}{2}}{\frac{4+6x-2}{4}}=\frac{\frac{3x+1}{2}}{\frac{6x+2}{4}}=\frac{4(3x+1)}{2(6x+2)}=\frac{4(4x+1)}{4(3x+1)}=1$$

podmínka: $x \neq -\frac{1}{3}$

b)

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}=\frac{xy(x^2+y^2)}{xy(x^2-y^{2)}}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

podmínky: $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$

## 2.3 MOCNINY A ODMOCNINY

**Mocniny**

Výraz $a^n$ znamená, že se jedná o opakování násobení téhož činitele *a* *n*-krát. Výraz *a* nazýváme **základ mocniny** (mocněnec) a *n* **mocnitel** (exponent). Pro všechna přípustná reálná čísla *a*,*b*,*m*,*n* platí následující vztahy:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}; a \neq 0$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; b \neq 0$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^0 = 1$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Upravte výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:

$$\left[(a^4b)^{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[(a^{-3}b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

***Řešení.***

$$\left[(a^4b)^{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[(a^{-3}b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = (a^4b)^{-\frac{1}{8}} \cdot (a^{-3}b^3)^{\frac{1}{6}} = \left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{8}}\right) \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} =$$

$$= a^{-1} \cdot b^{\frac{3}{8}} = \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^1} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{a}$$

podmínky: $a \succ 0, b \succ 0$

**Odmocniny**
Pro každé číslo $n$ z množiny všech přirozených čísel $N$ nazýváme $n$-tou odmocninou z nezáporného čísla $a$ takové nezáporné číslo $b$, pro něž platí $b^n = a$.
Z definice vyplývá, že $b = \sqrt[n]{a}$. Číslo $n$ označujeme výrazem **odmocnitel** (exponent odmocniny) a číslo $a$ jako **odmocněnec** (základ odmocniny).

Pro $a \geq 0, b \geq 0; m, n \in N\ platí$:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Upravte výrazy:

a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ b) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$

***Řešení.***
a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{5}{3}$$

Odmocniny můžeme převést rovněž na mocniny. K převodu na mocniny využijeme vztahu $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Jinou metodou řešení je převod všech odmocnin na jednu společnou odmocninu.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Upravte výrazy a stanovte podmínky řešitelnosti:

a) $\sqrt[7]{a^{20}}$

b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$

c) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt[18]{a^{13}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}}$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

***Řešení.***

a) $\sqrt[7]{a^{20}} = \sqrt[7]{a^{14} \cdot a^6} = \sqrt[7]{(a^2)^7} \cdot \sqrt[7]{a^6} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a^6}$
podmínka: $a \geq 0$

b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \cdot \sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^8 \cdot y^6 \cdot x^3 y^6 \cdot x^{10}} = \sqrt[12]{x^{21} y^{12}} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^9 \cdot y^{12}} =$
$= xy\sqrt[12]{x^9} = xy\sqrt[4]{x^3}$
podmínka: $x \geq 0, y \geq 0$

c) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt[18]{a^{13}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}} = \sqrt[18]{a^{15} \cdot a^{14} \cdot a^{13} \cdot a^{-24}} = \sqrt[18]{a^{18}} = a$
podmínka: $a > 0$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{4+2+1}{8}} = a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$
podmínka: $a \geq 0$

**Usměrňování lomených výrazů**

Usměrňování lomených výrazů znamená, že se snažíme ze jmenovatele zlomku odstranit výraz obsahující odmocninu. Za tímto účelem je nutné zlomek rozšířit na početní výraz, který je mu roven, ale již neobsahuje odmocninu. V případě, že se jedná o samotnou odmocninu, je nutné rozšířit výraz toutéž odmocninou. V případě součtu (rozdílu) obsahujícího odmocninu popř. odmocniny rozšiřujeme součtem (rozdílem) téhož výrazu dle vztahu
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Usměrněte lomené výrazy:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$  b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

***Řešení.***

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2$

## 2.4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

**Absolutní hodnota** reálného čísla $a$ se označuje výrazem $|a|$ a znamená, že $|a| = a$ pro $a \geq 0$ a $|a| = -a$ pro $a < 0$.
Absolutní hodnota nechává nezáporná čísla beze změny a záporná čísla násobí $(-1)$. Platí, že $|a| \geq 0$. Hodnota čísla $a$ je tedy při dosazování kladných i záporných čísel stále nezáporné číslo. Absolutní hodnota nuly se rovná nule.
Absolutní hodnota je z grafického hlediska vzdálenost čísla $a$ od 0, tj. od počátku.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Vypočtěte absolutní hodnotu reálných čísel:
a) $|3|$ b) $|-3|$ c) $|-3| + |5| - |-2| + |-1|$

***Řešení.***
a) $|3| = 3$
b) $|-3| = 3$
c) $|-3| + |5| - |-2| + |-1| = 3 + 5 - 2 + 1 = 7$

## 2.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Sečtěte mnohočleny:
$(x^3 + 3x^2) - (y^3 + 4y) + (x + xy) - (3x^3 - y^3 + xy)$

### PŘÍKLAD 2

Vynásobte a upravte:
$xy(x + y) - x\{y(3y - 2x) - [x^2 - y(3x - 2y)]\}$

## PŘÍKLAD 3

Upravte na součin:
$x^3 + x^2 + 2x + 2$

## PŘÍKLAD 4

Vydělte:
$(6x^3 + 2x^2 + x + 5) : (x + 1)$

## PŘÍKLAD 5

Upravte algebraický výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:
$$\left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2+9}{6x}\right) : \frac{x^2+9}{3x}$$

## PŘÍKLAD 6

Upravte algebraický výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:
$$\left[\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{x+y} + x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right] : \frac{1+x}{y}$$

## PŘÍKLAD 7

Upravte složený zlomek a stanovte podmínky řešitelnosti:
$$\frac{\frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{5}}{\frac{a+1}{4} - \frac{a-1}{5}}$$

## PŘÍKLAD 8

Upravte složený zlomek a stanovte podmínky:
$$\frac{\frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

## PŘÍKLAD 9

Upravte složený zlomek a stanovte podmínky:

$$\frac{\frac{a}{4}-1+\frac{1}{a}}{\frac{a+2}{4}\cdot\frac{a-2}{a}}\cdot\frac{a+2}{a-2}$$

## PŘÍKLAD 10

Upravte složený zlomek a stanovte podmínky:

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}+\frac{2a}{b}$$

## PŘÍKLAD 11

Upravte algebraický výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}\cdot d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}\cdot\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt{d^{-5}}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^4}\right]^{-1}$$

## PŘÍKLAD 12

Upravte algebraický výraz:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}}$$

## PŘÍKLAD 13

Upravte algebraický výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:

$$\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\cdot\frac{1}{x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

**PŘÍKLAD 14**

Upravte algebraický výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:

$$\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}-\frac{1+2\sqrt{x}}{4-x}$$

## 2.6 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1) $-2x^3+3x^2-4y+x$

2) $x^3$

3) $(x+1)(x^2+2)$

4) $6x^2-4x+5$; podmínka: $x\neq -1$

5) $\frac{x+3}{x-3}$; podmínky: $x\neq 0,\ x\neq \pm 3$

6) $\frac{x-y}{x}$; podmínky: $y\neq 0, x\neq 0, x\neq -1, x\neq -y$

7) $\frac{2(3a+7)}{a+9}$; podmínka: $a\neq -9$

8) $\frac{a+b}{a-b}$; podmínky: $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b$

9) 1; podmínky: $a\neq 0, a\neq \pm 2$

10) 0; podmínky: $a\neq \pm b,\ b\neq 0$

11) $b^{-\frac{11}{3}}\cdot d^4$; podmínky: $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$

12) $\sqrt[24]{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}}$

13) 1; podmínky: $x>0,\ y>0,\ x\neq y$

14) $\frac{3+2x}{4-x}$; podmínky: $x\neq 4,\ x\geq 0$

# 3 ROVNICE A NEROVNICE

## 3.1 POJEM ROVNICE

Pod pojmem rovnice rozumíme zápis rovnosti dvou výrazů. Znamená to tedy, že se levá strana rovnice rovná pravé straně rovnice, tj. $L(x) = P(x)$, kde $x$ je proměnná.

Rovnice řešíme na oboru proměnné, což je některý z číselných oborů ($R$, $N$, $Z$, atd.). Neznámou (proměnnou) označujeme písmeny, nejčastěji písmenem $x$. Jestliže budeme řešit rovnici v oboru (množině) reálných čísel $R$, tak platí zápis $x \in R$.

**Kořen rovnice (řešení rovnice)** je hodnota proměnné, tj. číslo, pro které platí, že po dosazení do rovnice vytvoří rovnost. Levá strana rovnice se bude rovnat pravé straně rovnice. Množinu všech kořenů (řešení) rovnice nazýváme $K$ a je vždy podmnožinou oboru proměnné. Při řešení rovnic se používají ekvivalentní úpravy. Jedná se o úpravy rovnic, při kterých se množina kořenů $K$ nemění.

**Ekvivalentní úpravy:**
- vzájemná výměna stran rovnice,
- nahrazení vybrané strany rovnice výrazem, který je jí v celém definičním oboru řešení rovnice roven,
- přičtení téhož výrazu nebo reálného čísla k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice týmž reálným číslem různým od nuly popř. týmž výrazem, který je definován v celém oboru řešení rovnice.

Ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení rovnice. Při řešení iracionálních rovnic, kdy se proměnná $x$ nachází pod odmocninou, je nezbytné použít neekvivalentní úpravy a obě strany rovnice umocnit. Umocňování a odmocňování neřadíme mezi ekvivalentní úpravy. Zkouška je nezbytnou součástí řešení, jestliže v průběhu řešení rovnice byly použity neekvivalentní úpravy. V případě, že při řešení byly použity pouze ekvivalentní úpravy, zkouška není nutná. Zkoušku je ovšem možné provést, a to z důvodu kontroly numerické správnosti výsledku.

Existuje několik druhů rovnic – lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické či goniometrické rovnice. Pro účely našeho studia se budeme zabývat rovnicemi lineárními a kvadratickými.

## 3.2 LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnicí o jedné neznámé $x$ nazýváme každou rovnici $ax + b = 0$, pro $a, b \in R$, $a \neq 0$.
V případě, že se neznámá nachází ve jmenovateli, je nezbytné stanovit podmínky řešitelnosti rovnice. Řešením rovnice v množině $R$ může být jedno číslo, nekonečně mnoho řešení popř. rovnice nemusí mít řešení žádné:

| | |
|---|---|
| $a \neq 0$ | jediným řešením (kořenem) je $x = -\frac{b}{a}$ |
| $a = 0$ , $b = 0$ | rovnice má nekonečně mnoho řešení, tj. množina $R$ |
| $a = 0$ , $b \neq 0$ | rovnice nemá řešení |

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

V množině *R* řešte rovnici:

$$\frac{17-\ x}{3}+\frac{2x}{10}=\frac{7x-5}{5}-\frac{6x}{30}$$

***Řešení.***
Obě strany rovnice vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem (30), abychom odstranili zlomky. Rovnice má po ekvivalentní úpravě následující tvar:

$$\frac{17-\ x}{3}+\frac{2x}{10}=\frac{7x-5}{5}-\frac{6x}{30} \qquad /.30$$

$10\,(17-x)\ +\ 3\cdot 2x\ =\ 6\,(7x-5)-6x$
$170-10x\ +\ 6x\ =\ 42x-30-6x$
$170-4x\ =\ 36x-30$
$40x\ =\ 200$
$x\ =\ 5$

Rovnice má jeden kořen K = {5}.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

V množině *R* řešte rovnici:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\ 1=\frac{6}{x^2+x-2}$$

***Řešení.***
Hodnota ve jmenovateli nesmí být rovna 0, proto je nutno vymezit podmínky $x\ \neq\ -2; x\ \neq 1$. Výraz upravíme a obě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem $(x-1)(x+2)$.

$(x\ +\ 1)(x\ +\ 2)\ +\ 2(x-1)-(x-1)(x\ +\ 2)\ =\ 6$
$x^2+3x\ +\ 2\ +\ 2x-2-(x^2\ +\ x-2)\ =\ 6$
$4x\ =\ 4$
$x\ =\ 1$

Vzhledem ke skutečnosti, že dle podmínek se $x\ \neq\ 1$, nemá daná rovnice řešení, tj. kořenem rovnice je prázdná množina $K\ =\emptyset$

## 3.3 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustava rovnic je situace, kdy hledáme více neznámých (proměnných), které vyhovují všem rovnicím současně.

Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y má následující tvar:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice $[x, y]$.
Řešením soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých je uspořádaná trojice $[x, y, z]$.

**Metody řešení soustav lineárních rovnic:**
1. metoda dosazovací – z vybrané rovnice se vyjádří jedna neznámá pomocí druhé neznámé a dosadí se do rovnice druhé. Po následném vyřešení jedné z proměnných dojde ke zpětnému dosazení vypočtené proměnné do první rovnice a určení chybějící neznámé.

2. metoda sčítací – jedna popř. obě rovnice soustavy se vynásobí vhodným číslem tak, aby se po sečtení rovnic jedna z proměnných vyloučila. Po vypočtení jedné neznámé lze tuto metodu již zkombinovat s metodou dosazovací, tj. vypočtenou neznámou dosadit do libovolné rovnice a dopočíst chybějící proměnnou.

3. metoda srovnávací – z každé rovnice se vyjádří jedna proměnná a získané výrazy se položí do rovnosti. Vypočtenou neznámou pak dosadíme do libovolné rovnice a dopočítáme chybějící proměnnou.

4. metoda maticová – do maticového schématu doplníme číselné koeficienty jednotlivých proměnných a postupujeme pomocí úprav na trojúhelníkový tvar.

5. metoda grafická – na základě grafického znázornění soustavy rovnic hledáme řešení (např. v případě soustavy lineárních rovnic se jedná o průsečík přímek).

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Řešte v $R^2$ soustavu rovnic:

$$2x + 3y = 13$$
$$3x - y = 3$$

***Řešení.***

$$2x + 3y = 13$$
$$3x - y = 3$$

řešíme metodou dosazovací

$$\Rightarrow y = 3x - 3$$

$$2x + 3(3x - 3) = 13$$
$$2x + 9x - 9 = 13$$
$$11x = 22$$
$$x = 2$$

$$y = 3x - 3$$
$$y = 3 \cdot 2 - 3$$
$$y = 6 - 3$$
$$y = 3$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice [2; 3].

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Řešte v $R^2$ soustavu rovnic: $\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ 5x - 2y &= -3 \end{aligned}$

***Řešení.***

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ \underline{5x - 2y} &\underline{= -3} \end{aligned}$$

Řešíme metodou sčítací.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \,/\,.(-5) \\ \underline{5x - 2y} &\underline{= -3} \,/\,.2 \\ -10x - 15y &= -70 \\ \underline{10x - 4y} &\underline{= -6} \\ -19y &= -76 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \,/\,.2 \\ \underline{5x - 2y} &\underline{= -3} \,/\,.3 \\ 4x + 6y &= 28 \\ \underline{15x - 6y} &\underline{= -9} \\ 19x &= 19 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[1; 4]$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Řešte v $R^2$ soustavu rovnic: $\begin{aligned} 3x - 2y &= -1 \\ 5x + 3y &= 30 \end{aligned}$

***Řešení.***

Řešíme metodou srovnávací, tj. z každé rovnice vyjádříme proměnnou *x*:

$$3x - 2y = -1 \Rightarrow x = \frac{2y - 1}{3}$$

$$5x + 3y = 30 \Rightarrow x = \frac{30 - 3y}{5}$$

$$\frac{2y - 1}{3} = \frac{30 - 3y}{5} \qquad /.15$$

$$\begin{aligned} 5(2y - 1) &= 3(30 - 3y) \\ 10y - 5 &= 90 - 9y \\ 19y &= 95 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y-1}{3} \\ x &= \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[3;\ 5]$.

## 3.4 LINEÁRNÍ NEROVNICE

Pod pojmem nerovnice rozumíme zápis nerovnosti dvou výrazů, v nichž se vyskytuje neznámá. Nerovnice se tedy liší od rovnice znaky nerovnosti $\leq, \geq, <, >$.

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentní úpravy:
- výměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice,
- nahrazení strany nerovnice výrazem, který je jí v celém oboru řešení nerovnice roven,
- přičtení téhož výrazu nebo reálného čísla k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran nerovnice týmž reálným číslem různým od nuly.

**Lineární nerovnice** se může vyskytovat ve tvaru $ax + b \geq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b < 0$, kde $a, b \in R$.

POZOR! Násobíme-li obě strany nerovnice stejným kladným číslem, znak nerovnosti se nezmění. Jiná situace ovšem nastává, násobíme-li obě strany nerovnice stejným záporným číslem, pak se znak nerovnosti obrátí.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

V množině R řešte nerovnici:

$$\frac{37-2x}{2} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x$$

***Řešení.***

$$\frac{37-2x}{2} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x \qquad /.4$$

$2(37 - 2x) + 36 \leq 3x - 8 - 4x$
$74 - 4x + 36 \leq -x - 8$
$3x \geq 118$
$x \geq \frac{118}{3}$

Množina všech řešení lineárních nerovnice je K = $\langle\frac{118}{3}; \infty)$.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

V množině R řešte nerovnici:

$$\frac{5x-6}{x+6} < 1$$

***Řešení.***

$$\frac{5x-6}{x+6}<1$$

Nerovnici je nutné převést do anulovaného tvaru, kdy na pravé straně nerovnice bude číslo 0. Pak je třeba na levé straně nerovnice stanovit společný jmenovatel a nerovnici upravit.

$$\frac{5x-6}{x+6}-1<0$$

$$\frac{5x-6-(x+6)}{x+6}<0$$

$$\frac{4x-12}{x+6}<0$$

Po ekvivalentních úpravách nerovnice postupujeme netodou nulových bodů. Zjistíme, kdy se čitatel a jmenovatel rovná nule. Tyto nulové body rozdělí množinu reálných čísel na intervaly. Ve vymezených intervalech budeme pomocí dosazování libovolného čísla z intervalu zjišťovat kladnou či zápornou hodnotu čitatele, jmenovatele a výsledného podílu.

Nulové body: $4x-12=0$, $x=3$; $x+6=0$, $x=-6$

| | $(-\infty;-6)$ | $(-6;3)$ | $(3;\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $4x-12$ | – | – | + |
| $x+6$ | – | + | + |
| $\frac{4x-12}{x+6}$ | + | – | + |

Dle posledního řádku v tabulce zjistíme, který interval vyhovuje nerovnici. V našem případě se jedná o prostřední interval, kde se nachází znaménko mínus, neboť výraz má být záporný. Nulové body do množiny všech řešení dle zadání nerovnice $\frac{4x-12}{x+6}<0$ nepatří, tj. kořenem je $K=(-6;\ 3)$.

## 3.5 Soustavy lineárních nerovnic

Soustavu lineárních nerovnic řešíme analogicky jako samotnou nerovnici. Každou nerovnici soustavy vyřešíme zvlášť. Množinou všech řešení soustavy nerovnic je průnikem řešení jednotlivých nerovnic soustavy.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Řešte soustavu nerovnic:

$$\frac{1-2x}{3} < \frac{1+3x}{4}$$

$$1-7x \geq -6x$$

***Řešení.***

$$\frac{1-2x}{3} < \frac{1+3x}{4} \qquad /.12$$

$$4(1-2x) < 3(1+3x)$$
$$4-8x < 3+9x$$
$$-17x < -1$$
$$x > \frac{1}{17}$$
$$K_1 = \left(\frac{1}{17}; +\infty\right)$$

$$1-7x \geq -6x$$
$$-x \geq -1$$
$$x \leq 1$$
$$K_2 = (-\infty; 1\rangle$$

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty; 1\rangle \cap \left(\frac{1}{17}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{17}; 1\right\rangle$$

## 3.6 KVADRATICKÁ ROVNICE

Kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0, pro\ a \neq 0$. Čísla $a, b, c$ nazýváme koeficienty kvadratické rovnice:

| | |
|---|---|
| $ax^2$ | kvadratický člen |
| $bx$ | lineární člen |
| $c$ | absolutní člen |

Řešením této rovnice je $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pro $D \geq 0$.

Výraz $D = b^2 - 4ac$ označujeme pojmem diskriminant:

| | |
|---|---|
| $D > 0$ | rovnice má dva různé reálné kořeny, |
| $D = 0$ | rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen, |
| $D < 0$ | rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení, (řešení existuje v oboru komplexních čísel). |

Hodnota diskriminantu $D$ rozhoduje o počtu řešení kvadratické rovnice.

Kvadratickou rovnici lze zapsat rovněž jako součin kořenových činitelů:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

V oboru reálných čísel *R* řešte rovnici:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$$

***Řešení.***

$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3 \qquad /\cdot x(x+2) \qquad x \neq 0, x \neq -2$

$x \cdot x + (x+2)(x+2) = 3x(x+2)$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x$

$2x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x$

$-x^2 - 2x + 4 = 0 \qquad /\cdot(-1)$

$\underline{x^2 + 2x - 4 = 0}$

$D = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$

$D = 4 + 16$

$D = 20$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2-\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$$

$K = \{-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\}$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

V oboru reálných čísel *R* rozložte kvadratické rovnice na součin kořenových činitelů:

a) $x^2 + x - 12 = 0$
b) $x^2 - 7x + 12 = 0$
c) $x^2 - 8x - 9 = 0$
d) $x^2 + 8x - 20 = 0$
e) $x^2 + 12x + 20 = 0$
f) $x^2 - 25 = 0$
g) $x^2 - 4x = 0$

***Řešení.***

a) $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) = 0$
b) $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$
c) $x^2 - 8x - 9 = (x+1)(x-9) = 0$
d) $x^2 + 8x - 20 = (x+10)(x-2) = 0$

e) $x^2 + 12x + 20 = (x + 10)(x + 2) = 0$
f) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) = 0$
g) $x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$

## 3.7 KVADRATICKÉ NEROVNICE

Kvadratická nerovnice má jeden z následujících tvarů:
$ax^2 + bc + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, pro\ a \neq 0.$

Postup při řešení kvadratické nerovnice spočívá v metodě nulových bodů, které rozdělí číselnou osu na intervaly. V těchto intervalech zjišťujeme pomocí dosazení libovolného čísla z daného intervlu hodnotu kladnou nebou zápornou.

Kvadratické nerovnice lze řešit rovněž pomocí grafického znázornění kvadratické funkce, kdy zjišťujeme, která část funkce leží nad osou $x$ $(ax^2 + bx + c > 0)$ popř. pod osou $x$ $(ax^2 + bx + c < 0)$.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

V množině reálných čísel řešte nerovnici:
$x^2 - 6x + 8 \geq 0$

***Řešení.***
$x^2 - 6x + 8 \geq 0$
$(x - 2)(x - 4) \geq 0$

Nulové body:

| | |
|---|---|
| $x - 2 = 0$ | $x - 4 = 0$ |
| $x = 2$ | $x = 4$ |

| | $(-\infty;\ 2)$ | $(2; 4)$ | $(4; \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x - 2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x - 4$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x - 2)(x - 4)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Hledané intervaly vyhovující dané nerovnice jsou oba krajní intervaly. Vzhledem ke skutečnosti, že se nerovnice $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ může rovnat nule, patří do množiny všech řešení nerovnice rovněž vymezené nulové body 2 a 4, tj. $K = (-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)$.

## 3.8 Příklady k procvičení

### PŘÍKLAD 1

Řešte v $R$ rovnici:

$$\frac{3}{1-x^2}=\frac{2}{(1+x)^2}-\frac{5}{(1-x)^2}$$

### PŘÍKLAD 2

Řešte v $R$ rovnici:

$$\frac{x+2}{x-2}-1=\frac{3x^2+x+9}{3(x^2-4)}-\frac{x-2}{x+2}$$

### PŘÍKLAD 3

Řešte v $R$ rovnici:

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{7x-15}{9-x^2}=\frac{x-3}{x+3}$$

### PŘÍKLAD 4

Řešte v $R^3$ soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=43\\ 2x-2y+z&=6\\ 4x+4y-3z&=28 \end{aligned}$$

### PŘÍKLAD 5

Řešte v $R^3$ soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x-3y+5z&=35\\ 3x+2y-4z&=-10\\ 5x-y+2z&=31 \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 6

Řešte v *R* nerovnici:

$$\frac{3}{x^2 - 1} \leq 0$$

## PŘÍKLAD 7

Řešte v *R* nerovnici:

$$\frac{3}{x-2} < 1$$

## PŘÍKLAD 8

Řešte v *R* nerovnici:

$$\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$$

## PŘÍKLAD 9

Řešte v *R* kvadratické nerovnice:

a) $x^2 - 2x - 24 \geq 0$
b) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
c) $x^2 + x - 2 > 0$
d) $x^2 + 25 \leq 0$
e) $x^2 - 36 < 0$
f) $x^2 + x + 5 > 0$
g) $x^2 \leq 0$

## 3.9 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1) $K = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$
2) $K = \{27\}$
3) $K = \emptyset$
4) $K = \{6; 7; 8\}$
5) $K = \{4; 1; 6\}$
6) $K = (-1; 1)$
7) $K = (-\infty; 2) \cup (5;\ \infty)$

8) $K = (-\infty; 2) \cup (2;\ \infty)$

9) a) $K = (-\infty;\ -4 > \cup < 6;\ \infty)$

b) $K = \langle -3;\ 1 \rangle$

c) $K = (-\infty; -2) \cup (1;\ \infty)$

d) $K = \emptyset$

e) $K = (-6; 6)$

f) $K = R$

g) $K = \{0\}$

# 4 MATICOVÝ POČET

## 4.1 OPERACE S MATICEMI

Začněme příkladem matice typu (3,4). Takto zapíšeme typ matice, která má 3 řádky a 4 sloupce. Konkrétním příkladem může být například tato matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

### DEFINICE 1

**Maticí typu $(m,n)$** nazýváme množinu prvků $a_{ik}$ uspořádaných do $m$ řádků a $n$ sloupců, tj. schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Stručněji zapisujeme: $A = (a_{ik})$, $i = 1, 2,\dots,m$, $k = 1, 2,\dots,n$ .

Pro zápis matic se někdy používají ještě další 2 typy závorek:

$$A = \|a_{ik}\|, \qquad A = [a_{ik}].$$

První index „$i$“ se nazývá **řádkový index,** druhý index „$k$“ se nazývá **sloupcový index.** Prvky matice mohou být reálná čísla, komplexní čísla, funkce, operátory, vektory a také matice.

**Hlavní diagonálu** matice $A$ tvoří prvky $a_{11}$, $a_{22}$,..., $a_{pp}$ ,kde $p$ = min $\{m,n\}$, **vedlejší diagonálu** prvky $a_{1n}$ , $a_{2\,n-1}$, $a_{3\,n-2}$,...

Matice lze podle tvaru rozdělit na **čtvercové** ($m = n$) a **obdélníkové** ($m \neq n$).

Matice typu $(n, n)$ se nazývá čtvercová matice **stupně (řádu) *n*.**

**Bodová matice** je matice typu (1,1).

**Typy matic:**

**a. nulová matice *0***, jejíž prvky jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0$, $\forall i$, $\forall k$,

**b. diagonální matice** je čtvercová matice, jejíž prvky neležící v hlavní diagonále jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,

**c. jednotková matice** $E$ je diagonální matice, jejíž prvky v hlavní diagonále jsou jedničky, tj. $a_{ik} = 1$ pro $i = k$, $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$,

**d. trojúhelníková matice** je matice, která má pod (resp. nad. hlavní diagonálou samé nuly, tj. pro :

horní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i > k$,
dolní trojúhelníkovou matici je $a_{ik} = 0$ pro $i < k$,

**e. symetrická matice** je čtvercová matice , pro kterou platí $a_{ik} = a_{ki}$ , $\forall i, \forall k$,
**f. antisymetrická matice** je čtvercová matice, pro kterou platí $a_{ik} = -a_{ki}$ , $\forall i, \forall k$,

### 4.1.1 ROVNOST MATIC

Matice $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu $(m, n)$ se sobě rovnají, mají-li na stejných místech stejné prvky: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ik} = b_{ik}$ , $\forall i, \forall k$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Vypočtěte $a, b, c \in R$, jestliže platí:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & 3+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

***Řešení.***
Z podmínek o rovnosti odpovídajících si prvků v obou maticích sestavíme soustavu 4 rovnic:

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ a + b &= 5, \\ c &= -2, \\ 3 + b &= 6. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme: $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$.

### 4.1.2 SČÍTÁNÍ MATIC

Součtem matic $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu $(m, n)$ rozumíme matici, jejíž prvky jsou součtem odpovídajících si prvků v maticích $A$ a $B$, tj.

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}),\ \forall i, \forall k.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Vypočtěte $A + B$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

***Řešení.***

$$A + B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti sčítání matic:

$A + B = B + A$ (komutativní zákon)
$A + (B + C) = (A + B) + C$, (asociativní zákon)
$A + 0 = 0 + A = A$,
$A + (-A) = (-A) + A = 0$.

Všimněte si, že matice *A, B* musí být stejného typu, matice různých typů nelze sčítat! Dále *0* je nulová matice stejného typu jako matice *A*.

### *4.1.3 Násobení matice reálným číslem*

Součinem čísla *r* a matice *A* typu (*m,n*) nazýváme matici $rA = (ra_{ik})$, $\forall i$, $\forall k$. Výsledná matice je téhož typu (*m,n*), přitom každý prvek původní matice vynásobíme číslem *r*.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Vypočtěte *rA*, je-li dáno $r = -2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

***Řešení.***

$$-2A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť $p, q \in R$ a $A, B$ jsou matice téhož typu. Pro násobení matice číslem platí:

$pA = Ap$,
$(-1)A = -A$,
$p(A + B) = pA + pB$,
$(p + q)A = pA + qA$,
$p(qA) = (pq)A$,
$1A = A$.

### 4.1.4 NÁSOBENÍ MATICE MATICÍ

Součinem matice $A$ typu $(m,n)$ a matice $B$ typu $(n,p)$ v daném pořadí je matice $C = A.B$ typu $(m,p)$, pro jejíž prvky $c_{ik}$ platí: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$.

Uvědomte si, že podmínkou existence definovaného součinu $AB$ je rovnost počtu sloupců matice $A$ a počtu řádků matice $B$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Vypočtěte $AB$, je-li dáno:

**a.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,

**b.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

**c.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

***Řešení.***

**a.** $$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.(-1)+1.2 & 2.3+1.(-4) \\ (-1).(-1)+3.2 & (-1).3+3.(-4) \\ 0.(-1)+(-2)2 & 0.3+(-2).(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 & 6-4 \\ 1+6 & -3-12 \\ 0-4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -15 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**b.** $$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -2+3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Násobili jsme matice typu $(3,2)(2,1)$ a výsledkem je matice typu $(3,1)$.

**c.** Nelze násobit matice typu $(3,2)(3,3)$, protože počet řádků první matice není roven počtu sloupců matice druhé. Součin $BA$ je definován, neboť násobíme matice typu $(3,3)(3,2)$ a výsledná matice bude typu $(3,2)$.

Vlastnosti součinu matic:

$$EA = AE = A,$$
$$A(BC) = (AB)C,$$
$$A0 = 0A = 0,$$
$$p(AB) = (pA)B = A(pB),$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

**Komutativní zákon obecně pro součin matic neplatí!** Pokud dvě matice tento zákon splňují, tj. platí pro ně rovnost $AB = BA$, pak se nazývají **záměnné**. Například každá diagonální matice řádu $n$ je záměnná s každou diagonální maticí téhož řádu.

## 4.2 Transponovaná matice

**Transponovaná matice** z matice $A$ typu $(m,n)$ je matice $A^T$ typu $(n,m)$, která vznikne z matice $A$ vzájemnou výměnou řádků a sloupců ve stejném pořadí (tj. překlopením prvků matice kolem hlavní diagonály). Označujeme ji $A^T$.

Pro operace s transponovanou maticí platí:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$
$$(pA)^T = pA^T,$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

***Řešení.***

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Vypočtěte matici $C = (-3)A^T + 2B^T$, je-li dáno:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Řešení.***

Nejprve vypočítáme matice transponované a pak dosadíme do požadované rovnosti.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = (-3)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -10 & -11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4.3 HODNOST MATICE

Na řádky a sloupce matice se můžete dívat jako na řádkové a sloupcové vektory. Lineární závislost a nezávislost řádků (sloupců) matice se pak definuje analogicky jako u vektorů.

### DEFINICE 2

**Hodnost $h(A)$** matice $A$ je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice $A$. Hodnost nulové matice $\boldsymbol{0}$ je nula. Hodnost matice je také možné definovat jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice. Obě definice jsou ekvivalentní.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost nazýváme **ekvivalentní** a značíme $A \approx B$.

**Hodnost matice se nezmění**, jestliže v matici provedeme tzv. **řádkové elementární úpravy**:

**1.** vyměníme dva řádky matice,
**2.** násobíme řádek matice nenulovým číslem,
**3.** přičteme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků,
**4.** vynecháme -li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Aniž by se změnila hodnost matice lze stejné úpravy provádět i se sloupci matice, neboť platí:

$$h(A) = h(A^T).$$

**Určování hodnosti matice**

Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici $A$ na horní (resp. dolní) trojúhelníkovou matici $B$, která má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové. Hodnost $h(A)$ matice $A$ je pak rovna počtu řádků trojúhelníkové matice $B$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

***Řešení.***

Hodnost matice zjišťujeme zpravidla tak, že danou matici převedeme řádkovými úpravami uvedenými výše na matici, která má v diagonále vesměs nenulové prvky a pod diagonálou samé nuly. Hodnost matice je pak rovna počtu řádků.

Postupujeme tedy takto: vzájemnou výměnou prvního a posledního sloupce a potom prvního a druhého řádku dostaneme nejprve matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ a potom matici } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

V další úpravě se snažíme pod prvkem $a_{11} \neq 0$ dostat samé nuly. Toho dosáhneme, když ke třetímu řádku přičteme první:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro snazší výpočet bude jednodušší, když budeme mít $a_{22} = 1$. Vyměníme druhý a třetí sloupec:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při dalších úpravách se opět snažíme, aby prvky pod $a_{22}$ byly rovny nule, proto ke třetímu řádku přičteme druhý řádek vynásobený číslem $(-3)$ a ke čtvrtému řádku druhý řádek vynásobený číslem $(-4)$. Dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Prvek $a_{33} \neq 0$. Snažíme se, aby prvek pod prvkem $a_{33}$ byl roven nule. Toho dosáhneme tak, že ke čtvrtému řádku přičteme třetí řádek násobený číslem $(-2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Upravili jsme původní matici na matici horní trojúhelníkovou. Hodnost matice trojúhelníkové i hodnost původní matice je $h = 4$ (počet nenulových řádků).

## DEFINICE 3

**Čtvercová matice** $A$ typu $n$ se nazývá **regulární,** jestliže její hodnost je rovna počtu řádků (sloupců), tj. $h(A) = n$. Čtvercová matice, která není regulární se nazývá **singulární**. O regulárnosti či singulárnosti hovoříme pouze u čtvercových matic. Součin regulárních matic je opět regulární matice.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Zjistěte, zda vektory $\boldsymbol{u} = (1,-2,5)$, $\boldsymbol{v} = (3,-1,2)$, $\boldsymbol{w} = (2,-9,23)$ jsou lineárně závislé.

***Řešení.***
Dané vektory napíšeme jako řádky matice a vypočítáme její hodnost. Bude-li rovna počtu daných vektorů, jsou vektory lineárně nezávislé, bude-li tomu naopak jsou vektory lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$h = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{vektory } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ jsou lineárně závislé.}$$

## 4.4 INVERZNÍ MATICE

V této kapitole začneme jednoduchým příkladem, na kterém budeme definovat pojem inverzní matice. Najděte matici, která bude vyhovovat následující rovnosti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobíme matice na levé straně rovnosti a dostáváme:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 0 \\ 3a + 4c &= 0 \\ 3b + 4d &= 1 \end{aligned}$$

Řešením je soustavy je $a = -2,\ b = 1,\ c = 1{,}5,\ d = -0{,}5$.

Hledaná matice je tvaru $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Tuto matici pak nazveme inverzní maticí k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

### DEFINICE 4

**Inverzní maticí** k regulární matici $A$ řádu $n$ nazveme matici $A^{-1}$, pro kterou platí:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

kde $E$ je jednotková matice řádu $n$.

Ke každé regulární matici existuje právě jedna matice inverzní.

Vlastnosti inverzních matic:

$$E^{-1} = E,$$
$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Výpočet inverzní matice se provádí pomocí elementárních řádkových transformací.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Určete k dané matici $A$ inverzní matici $A^{-1}$, je-li:

**a.** $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$, **b.** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

***Řešení.***

Každou matici $A$ řádu $n$ lze jen řádkovými (resp. jen sloupcovými) úpravami převést na jednotkovou matici $E$. Jestliže se stejných úprav použije na řádky (resp. sloupce) jednotkové matice $E$ téhož řádu, pak z této jednotkové matice obdržíme inverzní matici $A^{-1}$. Výchozí matice je tvaru $(A, E)$.

**a.** V následujícím schématu upravujeme matici $A$ tak, abychom na pozicích prvků $a_{21}$, $a_{12}$ dostali nulové prvky a v hlavní diagonále jedničky.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Následující čtyři úpravy vedou k výpočtu matice $A^{-1}$:

**1.** k $(-3)$násobku 2. řádku přičteme $(2)$násobek 1. řádku,
**2.** k $(-17)$násobku 1.řádku přičteme 1.řádek,
**3.** 1.řádek dělíme číslem $(-3)$,
**4.** oba řádky dělíme číslem 17.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc}-51 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right) \approx$$
$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc}17 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 17 & 2 & -3\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & -\frac{3}{17}\end{array}\right) = \left(E, A^{-1}\right).$$

Inverzní matice: $A^{-1}=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

**b.** Opět se budeme snažit získat nulové prvky na pozicích $a_{21}$, $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{23}$, $a_{13}$, $a_{12}$. Přesně v tomto pořadí. Postupujeme následovně:

**1.** k (2)násobku 2. řádku přičteme 1. řádek, k (2)násobku 3. ádku přičteme $(-3)$násobek 1. řádku,
**2.** k 3. řádku přičteme $(-1)$násobek 2. řádku,
**3.** k $(-6)$násobku 2. řádku přičteme 3. řádek, k (2)násobku 1. řádku přičteme 3. řádek,
**4.** k (3)násobku 1. řádku přičteme 2. řádek,
**5.** 1. řádek dělíme číslem (12), 2. řádek číslem (6), 3. řádek číslem $(-6)$.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & -16 & -20 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & -10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{12} & -\frac{20}{12} & \frac{8}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{6} & -\frac{14}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{array}\right) = \left(E, A^{-1}\right)$$

Po zkrácení zlomků a vytknutí $\frac{1}{3}$ dostaneme $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -5 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Výsledek ověříme vypočtením součinu $AA^{-1} = E$.

## 4.5 MATICOVÉ ROVNICE

Maticová rovnice je rovnice, kde neznámá je matice. Při řešení maticových rovnic používáme maticové operace součtu a součinu a nesmíme zapomenout, že pro součin matic obecně neplatí komutativní zákon. To mimo jiné znamená, že při úpravách rovnic (pokud násobíme rovnici libovolnou maticí), je nutné obě strany rovnice násobit danou maticí současně buď zleva nebo zprava.

Připomínáme dva důležité vztahy, které budeme při řešení maticových rovnic používat:

**1.** pro regulární matici $D$ platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E$,

**2.** pro matici $X$ platí: $XE = EX = X$.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Řešte maticové rovnice:

a) $AX = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XA = B$; kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

***Řešení.***

a) Z maticové rovnice vyjádříme matici $X$ tak, že rovnici násobíme maticí $A^{-1}$ zleva:

$$AX = B \quad /.A^{-1}$$
$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Z maticové rovnice vyjádříme matici $X$ tak, že rovnici násobíme maticí $A^{-1}$ zprava:

$$XA = B \quad /.A^{-1}$$
$$X.A.A^{-1} = B.A^{-1}$$
$$X = B.A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

Řešte maticové rovnice:

**a.** $AX + B^T X = 2D^T + CX$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

**b.** $XA^T = 2C + XB^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

***Řešení.***

**a.** Nejprve vyjádříme z maticové rovnice neznámou matici $X$:

$$AX + B^T X = 2D^T + CX,$$
$$AX + B^T X - CX = 2D^T,$$
$$\left(A + B^T - C\right)X = 2D^T.$$

Označme matici $A+B^T-C=F$ a dostáváme:

$FX=2D^T$, (násobíme maticovou rovnici zleva maticí $F^{-1}$)
$F^{-1}FX=2F^{-1}D^T$,
$X=2F^{-1}D^T$.

Vypočteme matici $F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow F=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Vypočteme matici $F^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Dosadíme do rovnosti $X=2F^{-1}D^T$ a dostáváme:

$$X=2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

**b.** Řešíme stejným způsobem uvedeným výše:

$XA^T=2C+XB^T$,
$XA^T-XB^T=2C$,
$X(A^T-B^T)=2C$.

Označme matici $A^T-B^T=F$ a dostáváme:

$XF=2C$, (násobíme maticovu rovici zpravamaticí $F^{-1}$)
$XFF^{-1}=2CF^{-1}$,
$X=2CF^{-1}$.

Vypočteme matici $F=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -4\end{pmatrix} \Rightarrow F=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Vypočteme matici $F^{-1}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$.

Dosadíme do rovnosti $X=2CF^{-1}$ a dostáváme:

$$X=2\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-50 & -14\\ -16 & -4\end{pmatrix}.$$

## 4.6 Příklady k procvičení

### PŘÍKLAD 1

Jsou dány matice:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&0\\1&4\\-7&5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1\\4&6\\-7&3\end{pmatrix}.$$

Určete matice:

**a.** $3A$, **b.** $A+B$, **c.** $A-C$, **d.** $2C-5A$,

### PŘÍKLAD 2

Jsou dány matice:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}.$$

Určete matice:

**a.** $A-2B$ **b.** $3A-C$ **c.** $A+B+C$

### PŘÍKLAD 3

Najděte matici $D$ třetího řádu tak, aby platilo $A+B+C+D=0$. Matice $A$, $B$, $C$ jsou matice z příkladu 2.

### PŘÍKLAD 4

Vypočtěte součiny $AB$ a $BA$, kde $A$ a $B$ jsou následující matice:

**a.** $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-2\\5&6\end{pmatrix}$,

**b.** $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&-1&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&-2\\0&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$,

**c.** $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$

## PŘÍKLAD 5

Vypočtěte následující součiny matic:

**a.** $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix},$

**b.** $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$

**c.** $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3 & -4\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},$

**d.** $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ -1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$

## PŘÍKLAD 6

Jsou dány matice $A, B, C$ :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Určete matice $D, F, G$, jestliže platí:

$$D=(A+B)C,\qquad F=A^T-B,\qquad G=A^TB.$$

## PŘÍKLAD 7

Zjistěte, pro která $x, y\in R$ platí:

**a.** $\begin{pmatrix}3x+2y & 5\\ -1 & 4x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y+11 & 5\\ -1 & 3y\end{pmatrix}$

**b.** $$\begin{pmatrix} -2y & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y-1 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & y+8 \end{pmatrix}.$$

## PŘÍKLAD 8

Určete $x, y \in R$ tak, aby matice $B$ byla transponovanou maticí k matici $A$:

**a.** $A = \begin{pmatrix} 2x+y & 3 \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

**b.** $A = \begin{pmatrix} 2 & x-3y \\ 2y & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.

## PŘÍKLAD 9

Určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

## PŘÍKLAD 10

Určete inverzní matici $A^{-1}$ k matici $A$:

**a.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, **b.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, **c.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

**d.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, **e.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

### PŘÍKLAD 11

Z následující maticové rovnice vyjádřete neznámou matici $X$ ($A$, $B$, $C$ jsou dané matice vhodného typu, tj. takové, aby následující operace byly definovány) a uveďte, pro které matice $A, B, C$ se dá matice $X$ z této rovnice osamostatnit:

**a.** $AX - C = 2X + BA,$

**b.** $C + XA = BA,$

**c.** $BX = BXA + 3C,$

**d.** $XA - 3X = XC + B.$

### PŘÍKLAD 12

Řešte maticové rovnice:

**a.** $X\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$

**b.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$

**c.** $X\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$

**d.** $X\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

### PŘÍKLAD 13

Řešte maticové rovnice.

**a.** $2X + E = A,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**b.** $A - 3X = B,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

**c.** $5X-2A=E,\ A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$

**d.** $AX=B-A,\ A=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&4\end{pmatrix}$

**e.** $AX=BA,\quad A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

**f.** $AX+B^T=C^T,\ A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-1&7\\-3&3&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$

## 4.7 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1) **a.** $\begin{pmatrix}3&9\\6&15\\-3&6\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\\6&-1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}-1&3\\3&9\\-8&7\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-7&-13\\-2&-13\\-9&-4\end{pmatrix}$

2) **a.** $\begin{pmatrix}1&-5&0\\-3&4&-5\\-14&13&-1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}3&-3&4\\6&11&15\\0&5&-7\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}1&1&5\\9&5&10\\7&-7&3\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\-9&-5&-10\\-7&7&-3\end{pmatrix}$

4) **a.** $AB=\begin{pmatrix}18&16\\14&28\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}7&1\\-7&39\end{pmatrix}$

**b.** $AB=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\8&4&-7\\-1&8&-3\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}5&3&-12\\4&-2&1\\7&-4&-4\end{pmatrix}$

**c.** $AB$ nedefinováno, $BA=\begin{pmatrix}9&19\\2&6\\10&20\end{pmatrix}$

5) **a.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & 14 & 11 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -30 \\ 17 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7) **a.** $x = 1,\ y = 2$ **b.** $x = 2,\ y = 3$

8) **a.** $x = 1,\ y = -2$ **b.** $x = 3,\ y = -2$

9) $h(A) = 3,\quad h(B) = 2,\quad h(C) = 2$

10) **a.** $A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

**c.** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ **d.** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

**e.** $A^{-1}$ neexistuje ( $A$ je singulární )

11) **a.** $X = (A - 2E)^{-1}(BA + C)$, je-li matice $A - 2E$ regulární
**b.** $X = (BA - C)A^{-1}$, je-li matice $A$ regulární
**c.** $X = 3B^{-1}C(E - A)^{-1}$, jsou-li matice $B,\ E - A$ regulární
**d.** $X = B(A - 3E - C)^{-1}$, je-li matice $A - 3E - C$ regulární

12) **a.** $X = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

**c.** $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 & 15 & -3 \\ -17 & -12 & 4 \\ 20 & 15 & -7 \end{pmatrix}$ **d.** $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -21 & -2 & -16 \\ 11 & -2 & 16 \\ -37 & 14 & -32 \end{pmatrix}$

13) **a.** $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ **b.** $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

**c.** $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**d.** $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

**e.** $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**f.** $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 61 & -1 & -44 \\ 45 & 1 & -32 \\ -11 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

# 5 DETERMINANTY

Každé čtvercové matici je přiřazeno číslo, které nazýváme determinantem matice. Pokud matice není čtvercová, tak determinant definován není. Pro determinant užíváme tato označení:

$$\det A = \det\left(a_{ij}\right) = |A| = \left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## DEFINICE 1

Čtvercovou matici $A$ nazýváme regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
Čtvercovou matici $B$ nazýváme singulární $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$.

## DEFINICE 2

**Výpočet determinantu druhého řádu:**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinant se rovná rozdílu součinu prvků hlavní diagonály a součinu prvků vedlejší diagonály.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$.

***Řešení.*** $$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3.(-2) - 1.(-5) = -1.$$

## DEFINICE 3

**Výpočet determinantu třetího řádu (Sarussovo pravidlo):**

det$A$=

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Sarussovo pravidlo je možno si zapamatovat tak, že k matici daného determinantu připíšeme první dva sloupce, resp. první dva řádky matice jako čtvrtý a pátý sloupec resp. čtvrtý a pátý řádek podle schematu :

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & \left.\right) & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{21} & a_{22} \\ & & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

resp.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ - & & & & + \end{matrix}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Vypočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

***Řešení.***

Řešíme Sarussovým pravidlem – připíšeme první dva sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix} =$$

$$= 1.1.(-3) + 2.1.(-2) + (-4).3.3 - [(-4).1.(-2) + 1.1.3 + 2.3.(-3)] = -36.$$

## 5.1 VLASTNOSTI DETERMINANTU

V této části kapitoly uvedeme některé důležité vlastnosti determinantu matice. K daným vlastnostem jsou uvedeny příklady, které si sami propočtěte.

**1.** Determinant matice $A$ se rovná determinantu transponované matice $A^T$.

Platí: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 7 & 6 & 3 \\ 13 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

**2.** Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva řádky (resp. dva sloupce), změní determinant matice znaménko.

$$\text{Platí:}\quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 13 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

**3.** Společného nenulového činitele $k$ všech prvků jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

$$\text{Platí:}\quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Obráceně:}\quad 5\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 35 & 13 \\ 4 & 30 & 9 \\ 16 & 15 & 8 \end{vmatrix}.$$

**4.** Determinant matice se rovná nule, jestliže:

**a.** všechny prvky aspoň jednoho řádku(resp.jednoho sloupce) jsou rovny nule,
**b.** jeden řádek (resp. sloupec. matice je lineární kombinací řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

$$\text{Platí:}\quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 32 & 53 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí řádek je součtem dvojnásobku prvního řádku a trojnásobku druhého řádku.

**5.** Jestliže k některému řádku (resp. sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (resp. sloupců), potom determinant nové matice je stejný, jako determinant původní matice.

**6.** Jsou-li $A$, $B$ čtvercové matice stejného řádu, platí: det ($AB$) = det$A$. det $B$.

$$\text{Platí:}\quad \begin{vmatrix} 14 & -9 & 7 \\ 10 & -1 & 2 \\ 12 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

## DEFINICE 4

**Doplněk prvku** $a_{ij}$

Ve čtvercové matici $A$ vypustíme $i$-tý řádek a $j$-tý sloupec. Obdržíme tak matici typu $(n-1, n-1)$. Její determinant označíme $A_{ij}^*$ a nazveme **subdeterminantem** prvku $a_{ij}$ v matici $\boldsymbol{A}$. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$ nazýváme **doplňkem** prvku $a_{ij}$ v matici $A$.

Zapamatujte si, že doplněk (daného prvku) je subdeterminantem (tohoto prvku) opatřený vhodným znaménkem.

Ve schématu $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ je naznačena symbolem +, resp. symbolem $-$ „poloha“ prvků, jejichž subdeterminant a doplněk se sobě rovnají, resp. liší se znaménkem.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Určete v matici $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ doplněk prvku $a_{23}$ a prvku $a_{31}$.

***Řešení.***

Nejprve vypočteme příslušné subdeterminanty, které pak dosadíme do vztahu

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^* .$$

$$A_{23}^* = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \quad \Rightarrow \quad A_{23} = (-1)^{2+3}(-10) = 10,$$

$$A_{31}^* = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15 \quad \Rightarrow \quad A_{31} = (-1)^{3+1} 15 = 15.$$

## DEFINICE 5

**Výpočet determinantu řádu $n \geq 3$ (rozvoj determinantu podle prvků určitého řádku resp. sloupce):**

Vztah pro rozvoj determinantu podle prvků $i$-tého řádku :

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Vztah pro rozvoj determinantu podle $j$-tého sloupce:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Pomocí uvedených vztahů počítáme především determinanty řádu $n > 3$, protože pro výpočet determinantů řádu $n = 3$ používáme Sarrusovo pravidlo. V následujícím příkladě vypočteme determinant rozvojem.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Vypočítejte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ rozvojem podle třetího řádku.

***Řešení.***

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 + 12 + 0 = 6.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix}$.

***Řešení.***

$$\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

***Řešení.***

Řešíme Sarrusovým pravidlem:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2.(-2).(-1) + 1.5.1 + 3.2.2 - [3.(-2).1 + 2.5.2 + 1.2.(-1)] = 9.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Určete parametr $k \in \boldsymbol{R}$ tak, aby:

**a.** matice $A$ byla regulární,

**b.** matice $B$ byla singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{pmatrix}$$

***Řešení.***

**a.** Matice $A$ je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Řešíme proto následující rovnici, kde determinant vypočteme Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

Matice $A$ je regulární pro $k \in (-\infty,3) \cup (3,\infty)$.

**b.** Matice $B$ je singulární $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$. Řešíme rovnici:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2-k \\ 3+k & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-4)(k+5) = 0.$$

Matice $B$ je singulární pro $k \in \{-5,4\}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Řešte nerovnici: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} \geq 0.$

***Řešení.***

Sarrusovým pravidle vypočteme daný determinant:

$$\begin{aligned} (2-x)(3+x)+1+1-[(2-x)+1+(3+x)] &\geq 0 \\ -x^2 - x + 2 &\geq 0 \\ x^2 + x - 2 &\leq 0 \\ (x+2)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$+ \qquad - \qquad +$$

Řešení nerovnice je $x \in \langle -2,1 \rangle$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Vypočteme determinant matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

***Řešení.***

V tomto příkladu budeme rozvíjet determinant podle prvního sloupce, ale nejdříve determinant upravíme tak, aby na pozicích $b_{21}, b_{31}$ byly nulové prvky.

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

K $(-2)$násobku druhého řádku přečteme první řádek. Protože druhý řádek je <u>*upravovaným*</u> řádkem musíme determinant násobit převrácenou hodnotou čísla $(-2)$ tj. $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

K třetímu řádku přečteme $(-3)$násobek řádku druhého. Předtím jsme násobili řádek druhý, ale protože se nejedná o řádek upravovaný, hodnota determinantu se nemění.

Dostáváme $\det B = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, který rozvineme podle 1.sloupce.

$$\det B = \left(-\frac{1}{2}\right)2(-1)^2\begin{vmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 136.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Vypočteme determinant matice $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

***Řešení.***

Pokud jsou pod hlavní diagonálou všechny prvky nulové, pak platí, že determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále. To znamená $Det\ C = 2\cdot 2\cdot 4\cdot 5 = 80$.

## 5.2 CRAMEROVO PRAVIDLO

Pomocí Cramerova pravidla můžeme řešit soustavu lineárních rovnic, je-li matice soustavy regulární. Pro numerické výpočty není Cramerovo pravidlo výhodné, protože výpočet determinantů je pracný. Výhodou Cramerova pravidla je explicitní vyjádření řešení, což v mnoha úvahách v matematice i v aplikacích je důležité.

Nechť je dána soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

Nechť matice $A$ této soustavy je regulární (tj. $\det A \neq 0$). Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{pro všechna} \quad i \in \{1,2,\ldots,n\},$$

kde $B_i$ je matice, která vznikne z matice $A$ tak, že $i$-tý sloupec matice $A$ nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny. Tento postup ilustruje následující příklad.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12. \end{aligned}$$

***Řešení.***

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6, \qquad \det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12, \qquad \det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{18}{6} = 3, \qquad y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-12}{6} = -2, \qquad z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{6}{6} = 1.$$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}.$$

***Řešení.***

Nejprve vypočteme příslušné determinanty a pak jejich hodnoty dosadíme do příslušných vztahů.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1, \qquad \det B_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1.$$

Na základě Cramerova pravidla dostáváme:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{1}{1} = 1, \qquad y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-1}{1} = -1.$$

## 5.3 Příklady k procvičení

### PŘÍKLAD 1

Vypočtěte determinanty druhého řádu.

**a.** $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -6 & 16 \end{vmatrix}$.

### PŘÍKLAD 2

Vypočtěte Sarussovým pravidlem determinanty třetího řádu.

**a.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

## PŘÍKLAD 3

Vypočtěte determinanty rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce.

**a.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix}$,

**c.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, **d.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

**e.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, **f.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

## PŘÍKLAD 4

Řešte následující rovnice a nerovnice.

**a.** $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0$, **b.** $\begin{vmatrix} a+x & x \\ -x & x-a \end{vmatrix} = a^2$,

**c.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3+x \end{vmatrix} > 0$, **d.** $\begin{vmatrix} x & 3 & 2x \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} < 0$,

**e.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & x+2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} > 0$, **f.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

## PŘÍKLAD 5

Upravte a vypočtěte determinanty.

**a.** $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

## PŘÍKLAD 6

Pro která $a \in R$ je determinant $D$ roven nule?

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -a^2 \\ 2 & \frac{a}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

## PŘÍKLAD 7

Pro která $a \in R$ je determinant $D$ záporný ?

$$D = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

## PŘÍKLAD 8

Určete parametry v daných maticích tak, aby matice $A$, $C$ byly singulární a matice $B$, $D$ byly regulární. Matice jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+b & 6 \\ 6-b & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ d^2 & 2d & 1 \\ 2d & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## PŘÍKLAD 9

Cramerovým pravidlem řešte soustavy lineárních rovnic:

**a.** $$\begin{aligned} 4x+y-z&=2\\ -y+z&=-10\\ 2x+3y-2z&=24, \end{aligned}$$

**b.** $$\begin{aligned} -2x+2y-z&=-3\\ y+3z&=-4\\ 4x-y+2z&=3, \end{aligned}$$

**c.** $$\begin{aligned} -2x+y+3z&=1\\ 3x+2y+3z&=-2\\ -x+3y-z&=8. \end{aligned}$$

## 5.4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1) **a.** 28 **b.** –7 **c.** 2 **d.** 0

2) **a.** – 43 **b.** 0 **c.** 16 **d.** 40

3) **a.** – 42 **b.** $-2x^2$ **c.** – 24 **d.** 0 **e.** 5 **f.** – 60

4) **a.** $x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$ **b.** $x = \pm a$ **c.** $x \in (-2,1)$ **d.** $x \in (3,\infty)$
**e.** $x \in (-4,\infty)$ **f.** $x \in \{-1,3\}$

5) **a.** $a^4 - 2a^3$ **b.** 10

6) $a \in \{-2,0,2\}$

7) $a \in (2, 17)$

8) $a \in \{-13, 2\}$, $b \in R - \{-12,3\}$, $c = 0$, $d \in R - \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$

9) **a.** $(-2,8,-2)$ **b.** $(1,-1,-1)$ **c.** $(-1,2,-1)$

# 6 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

## DEFINICE 1

Soustavou $m$ lineárních algebraických rovnic o $n$ neznámých nazýváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

kde $a_{ik}, b_i \quad (i = 1,2,\dots,m, \quad k = 1,2,\dots,n)$ jsou reálná čísla.
Řešením soustavy (S) nazýváme každou uspořádanou $n$-tici $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ reálných čísel takovou, že po dosazení $u_i$ za $x_i$ do soustavy (S) dostaneme $m$ identit.

Každou soustavu (S) lze zapsat v maticovém tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nazývá **matice soustavy** (S).

Matice $A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ se nazývá **rozšířená matice soustavy** (S).

Soustavě lineárních rovnic (S) odpovídá právě jedna rozšířená matice soustavy $A_r$ a naopak. Jinak řečeno každou soustavu lineárních rovnic lze charakterizovat rozšířenou maticí soustavy. Všimněte si, že rozšířenou matici soustavy tvoří koeficienty u neznámých a sloupec pravých stran rovnic soustavy, který pro větší přehlednost oddělujeme svislou přerušovanou čarou.

**DEFINICE 2**

Pokud je vektor pravých stran $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \neq (0,0,\ldots,0)$ nazýváme soustavu (S) **nehomogenní soustavou lineárních rovnic**, pokud je vektor pravých stran nulový, nazýváme soustavu (S) **homogenní soustavou lineárních rovnic**.

V dalším textu budeme značit: $h$ = hodnost matice soustavy (S),
$h_r$ = hodnost rozšířené matice soustavy (S).

Buď platí $h_r = h$ nebo $h_r = h + 1$. Jiný případ nastat nemůže. To plyne snadno z definice hodnosti matice.

## 6.1 NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Ze zkušenosti víme, že při řešení soustavy (S) může nastat jeden ze tří případů:
- soustava lineárních rovnic (S) nemá řešení,
- soustava lineárních rovnic (S) má právě jedno řešení,
- soustava lineárních rovnic (S) má nekonečně mnoho řešení.

*Kdy má soustava lineárních rovnic (S) řešení ?*
Na tuto otázku odpovídá **Frobeniova věta**.

**VĚTA 1**

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Jestliže zjistíte, že hodnosti daných matic $A$ a $A_r$ se rovnají, pak soustava má řešení. *Kolik řešení má daná soustava (S) ?* Na tuto otázku Frobeniova věta neodpovídá!

Nechť soustava lineárních rovnic (S) má řešení, $h$ je hodnost matice soustavy a $n$ je počet neznámých.

Nyní zodpovíme otázku o počtu řešení soustavy. Platí:
**a.** Jestliže $h = n$, potom soustava (S) má právě jedno řešení,
**b.** Jestliže $h < n$, potom soustava (S) má nekonečně mnoho řešení. Přitom lze řešení získat tak, že za $n - h$ neznámých lze dosadit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou pak určeny jednoznačně.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Najděte všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 10. \end{aligned}$$

***Řešení.***

K řešení použijeme známou Gaussovu eliminační metodu. Použitím řádkových elementárních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na horní trojúhelníkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Matice soustavy $A$ má po úpravách poslední řádek nulový, proto platí $h = 2$. Protože $h_r = 3$, není splněna Frobeniova podmínka a daná soustava nemá řešení.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Najděte všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

***Řešení.***

Zda soustava má řešení, prověříme stanovením hodností matic:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \approx \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Hodnost matice soustavy $h$ = 4, hodnost rozšířené matice soustavy $h_r = 4$ a rovněž počet neznámých $n$ = 4. Proto má soustava právě jedno řešení: Najdeme jej tak, že poslední matici přiřadíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ -3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 3x_3 + 10x_4 &= 16, \\ -6x_4 &= -6, \end{aligned}$$

kterou řešíme postupně „zdola nahoru".
Z poslední rovnice vypočteme $x_4 = 1$. Po dosazení $x_4 = 1$ do předposlední rovnice dostaneme $x_3 = 2$. Analogicky z další rovnice je $x_2 = 3$. Nakonec z první rovnice soustavy vypočteme $x_1 = 0$. Hledaným řešením soustavy je vektor $\boldsymbol{x} = (0, 3, 2, 1)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Najděte řešení soustavy dvou lineárních rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

***Řešení.***

Rozšířená matice soustavy má tvar: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Hodnost rozšířené matice soustavy $h_r = 2$, hodnost matice soustavy $h$ = 2, počet neznámých $n$ = 3. Protože $h < n$ soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na 1 parametru, neboť $n - h$ = 3 – 2 =1. Můžeme zvolit $x_3 = t,\ t \in R$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme: $x_2 = 1 + t$. Poslední neznámou vypočteme z rovnice první: $x_1 = 5 + 2t$.

Všechna řešení soustavy se pak dají zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2t, \\ x_2 &= 1 + t, \\ x_3 &= t, \end{aligned}$$

kde $t \in R$. Výsledek můžeme zapsat také vektorově:

$$\boldsymbol{x} = (5,1,0) + t(2,1,1), \quad \text{kde } t \in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Najděte všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}.$$

***Řešení.***

Upravíme rozšířenou matici na horní trojúhelníkový tvar a na základě Frobeniovy věty zjistíme, zda má soustava řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 6 & -8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnosti matice soustavy i matice rozšířené se rovnají a proto soustava má řešení a to jediné. Z posledního řádku vypočteme $x_3 = 1$.

Z druhé rovnice $-7x_2 + 3x_3 = -11 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$.

Z první rovnice $x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Najděte všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic danou rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

***Řešení.***

Matici upravujeme na trojúhelníkový tvar Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & -7 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -7 & -3 \end{array}\right).$$

Protože $h = h_r = 2$ je splněna Frobeniova podmínka a řešení soustavy existuje. Protože počet neznámých je $n = 4$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $(n - h = 2)$

parametrech. Z druhé rovnice soustavy vidíme, že můžeme například volit $x_3 = s,\quad x_4 = t,$ kde $s, t \in R$. Dosadíme do druhé rovnice a dostáváme $x_2 = 3 + 7s - 7t$. Po dosazení $x_2, x_3, x_4$ do první rovnice získáme po úpravě $x_1 = -1 - 5s + 4t$.
Řešení soustavy je:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 5s + 4t, \\ x_2 &= 3 + 7s - 7t, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= t, \end{aligned}$$

kde $t, s \in R$, neboli $\boldsymbol{x} = (-1,3,0,0) + s(-5,7,1,0) + t(4,-7,0,1)$, kde $t, s \in R$.

## 6.2 Příklady k procvičení

### PŘÍKLAD 1

Určete řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic

**a.**
$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= -9, \\ x_1 + x_2 &= 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 15, \\ 3x_1 - x_4 &= -6, \end{aligned}$$

**b.**
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7, \end{aligned}$$

**c.**
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 21, \end{aligned}$$

**d.**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_4 &= 5, \end{aligned}$$

**e.**
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -4, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2, \end{aligned}$$

**f.**
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ -x_1 + 7x_3 - x_4 + x_5 &= 2, \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3, \end{aligned}$$

**g.**
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 7x_4 + 3x_5 = 4,$$

**h.**
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_3 &= -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= -2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= -4, \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 2

Najděte všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ s rozšířenou maticí soustavy $A_r$, kde:

**a.** $A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, **b.** $A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \\ 4 & -7 & 1 & 35 \end{array}\right)$,

**c.** $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$, **d.** $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)$,

**e.** $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$, **f.** $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 10 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & -1 \end{array}\right)$.

## 6.3 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)

**a.** $\boldsymbol{x} = (-2,2,-7,0)$

**b.** $\boldsymbol{x} = (-5,4,0) + t(-4,2,1), \quad t \in R$

**c.** $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}, 4\right)$

**d.** soustava nemá řešení

**e.** $\boldsymbol{x} = (1,-1,0,0) + s(-1,0,0,1) + t\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad s,t \in R$

**f.** soustava nemá řešení

**g.** $\boldsymbol{x} = (4,0,0,0,0) + r(-3,0,0,0,1) + s(7,0,0,1,0) + t(2,0,1,0,0) + u(-1,1,0,0,0) \quad r,s,t,u \in R$

$\boldsymbol{x} = (2,3,0,0) + s\left(0, \frac{1}{2}, 0, 1\right) + t\left(3, \frac{7}{2}, 1, 0\right) \quad s,t \in R$

**h.** $\boldsymbol{x} = (-1,3,0,0,0) + r(1,-3,0,0,1) + s(4,-7,0,1,0) + t(1,-4,1,0,0) \quad r,s,t \in R$

2)

**a.** $\boldsymbol{x} = (1,2,2) + t(1,0,-1), \quad t \in R$

**b.** soustava nemá řešení

**c.** $\boldsymbol{x} = (-8,3,6,0) + t(0,1,2,1), \quad t \in R$

**d.** $\boldsymbol{x} = (-1,-1,0,1)$

**e.** $\boldsymbol{x} = (2,1,0,1) + s(2,7,3,0) + t(1,1,0,1)\ s,t \in R$

**f.** $\boldsymbol{x} = (5,-2,0,0) + s(8,-6,1,0) + t(-7,5,0,1)\ s,t \in R$

# 7 POSLOUPNOST A LIMITA POSLOUPNOSTI

## 7.1 Posloupnost

### DEFINICE 1

Nekonečnou číselnou posloupností prvků číselné množiny je funkce, která každému přirozenému číslu *n* přiřazuje reálné číslo.

Jelikož je to funkce, má funkční předpis, definiční obor (je to množina přirozených čísel *N*), obor funkčních hodnot (je to množina reálných čísel), graf (je to množina izolovaných bodů v rovině).

V matematice se setkáváme také s posloupnostmi, jejichž prvky nejsou čísla, např. s posloupnostmi bodů, úseček, funkcí a podobně. V této kapitole se budeme zabývat pouze číselnými posloupnostmi, a proto přívlastek číselná u posloupnosti vynecháme.

Posloupnost můžeme zapsat například tak, že postupně za sebou píšeme prvky $a_1, a_2, a_3, \ldots.$, které tato funkce přiřazuje číslům 1, 2, 3 ..., nebo použitím zápisu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme používat jednoduššího zápisu $\{a_n\}$.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Napište první čtyři členy a $a_{n+1}$ člen posloupnosti $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

***Řešení.***

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1,$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2},$$

$$n=3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3},$$

$$n=4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4},$$

$$n=n+1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Napište členy $a_3, a_{n+1}, a_{11}$ posloupnosti $\left\{\dfrac{2n-1}{n}\right\}_{n=1}^{10}$.

***Řešení.***

$$n = 3 \;\Rightarrow\; a_3 = \frac{2.3-1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$n = n+1 \;\Rightarrow\; a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1},$$

$n = 11 \;\Rightarrow\; a_{11}$ neexistuje, posloupnost má jen 10 členů.

Budeme se zabývat zejména nekonečnými posloupnostmi, a proto přívlastek nekonečná vynecháme. Pokud půjde o konečnou posloupnost, tak přívlastek konečná bude explicitně uveden.

**Zadání posloupnosti:**

**a. vzorcem** vyjadřujícím *n*-tý člen posloupnosti $a_n$.

Například: Vzorcem $a_n = \dfrac{1}{n+2}$ je daná posloupnost, jejíž *n*-tý člen je $a_n$ pro každé $n \in N$.

$$a_1 = \frac{1}{3},\quad a_2 = \frac{1}{4},\; a_3 = \frac{1}{5},\quad \text{atd.}$$

**b. rekurentně** zadáním prvních *n* členů posloupnosti a rekurentního vzorce, který vyjadřuje (*n*+*k*)-tý člen posloupnosti pomocí předchozích *k* členů. To znamená, že při rekurentním zadání kromě vzorce musí být uvedeno i prvních *k* členů posloupnosti.

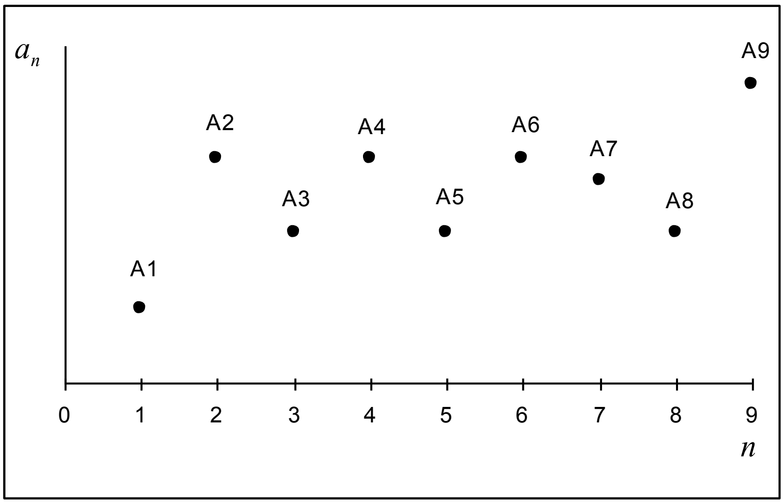
Vzorcem $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}, a_1 = 0, a_2 = 1$ je daná posloupnost

$$a_1 = 0,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_3 = a_{1+2} = a_1 + 2a_{1+1} = 0 + 2\cdot 1 = 2,$$
$$a_4 = a_{2+2} = a_2 + 2a_{2+1} = 1 + 2\cdot 2 = 5,$$
$$a_5 = a_{3+2} = a_3 + 2a_{3+1} = 2 + 2\cdot 5 = 12,$$
$$a_6 = a_{4+2} = a_4 + 2a_{4+1} = 5 + 2\cdot 12 = 29,$$

atd.

**c. graficky, grafem posloupnosti** je množina izolovaných bodů $A_n(n, a_n)$.

Obrázek 7-1: Graf posloupnosti




Ze střední školy znáte dvě posloupnosti. Je to aritmetická posloupnost a geometrická posloupnost.

## DEFINICE 2

**Aritmetická posloupnost** přiřazuje číslu *n* hodnotu $a_n$ lineární funkcí. Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference** aritmetické posloupnosti a značíme ho *d*. Platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Součet prvních *n* členů je dán vzorcem: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Je to **součet konečné** aritmetické posloupnosti.

**Součet nekonečné** aritmetické posloupnosti je vždy roven $\infty$, resp. $-\infty$, v závislosti na znaménku diference $d \neq 0$. Pro $d = 0$ v závislosti na znaménku $a_1$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

***Řešení.***

Čísla 1, 2, 3, ......, 1000 tvoří konečnou aritmetickou posloupnost s diferenci $d = 1$, prvním členem $a_1 = 1$, počet členů této posloupnosti je $n = 1000$.

Součet prvních 1000 členů je $s_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500500$.

## DEFINICE 3

**Geometrická posloupnost** přiřazuje číslu *n* hodnotu $a_n$ exponenciální funkcí. U geometrické posloupnosti je konstantní poměr mezi libovolným členem $a_n$ $(n \geq 2)$ a předcházejícím členem $a_{n-1}$. Tuto konstantu značíme *q*, číslo *q* se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti. Platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Jestliže kvocient $q \neq 1$, potom pro součet $s_n$ prvních *n* členů posloupnosti platí: $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Jedná se o **součet konečné** geometrické posloupnosti.

Jestliže $|q| < 1$, lze **sečíst i nekonečnou** geometrickou posloupnost.

Pro součet $s$ v tomto případě platí: $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

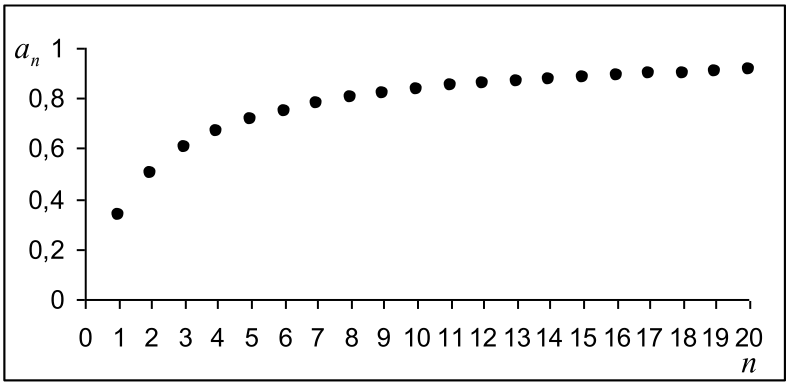
Nakreslete graf posloupnosti dané *n*-tým členem $a_n = \dfrac{n}{n+2}$.

***Řešení.***

Je to posloupnost $\left\{ \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \ldots, \dfrac{100}{102}, \ldots, \dfrac{1000}{1002}, \ldots \right\}$

Je zřejmé, že členy posloupnosti se blíží k číslu 1, jak je znázorněno na Obr. 7.2.

Obrázek 7-1: Graf posloupnosti $a_n = \dfrac{n}{n+2}$.



## 7.2 LIMITA POSLOUPNOSTI

Pojem limita patří k základním pojmům matematické analýzy.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se pro „$n$ jdoucí do nekonečna“ (označujeme $n \to \infty$) může "přibližovat" k reálnému číslu $A$ (říkáme, že má vlastní limitu) nebo k nevlastnímu číslu $\infty$, resp. $-\infty$ (říkáme, že má nevlastní limitu). Posloupnost nemusí mít ani vlastní ani nevlastní limitu, např. posloupnost $\{-1,2,-3,4,-5,6,\ldots\}$, neboli $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$. Nakreslete graf této posloupnosti.

### DEFINICE 4

**Definice vlastní limity nekonečné posloupnosti**

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu $A$, když k libovolnému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo $n_0$, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost

$$|a_n - A| < \varepsilon .$$

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, užíváme při tom zkratky latinského slova *limes*.

Posloupnost, která má tu vlastnost, že se její členy, počínaje některým, libovolně málo liší od čísla $A$, má v tomto čísle svou mezní hodnotu.
Když je limita nekonečné posloupnosti vlastní, pak říkáme, že posloupnost je **konvergentní**.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Na základě definice vlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$.

***Řešení.***

K libovolnému $\varepsilon > 0$ musíme určit číslo $n_0$ tak, aby pro každé $n > n_0$ platila nerovnost

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon .$$

Provedeme následující úpravy:

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

Číslo $n_0$ určíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí

$$\frac{2}{n+2} < \varepsilon \quad \text{neboli} \quad n \geq \frac{2}{\varepsilon} - 2\,.$$

Pro $\varepsilon = 0{,}01$ je hledané číslo $n_0 = 18$, pro $\varepsilon = 0{,}0001$ je $n_0 = \dfrac{2}{0{,}0001} - 2 = 19999$ atd.

## DEFINICE 5

**Definice nevlastní limity posloupnosti**

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\infty$ („plus" nekonečno, označuje se také $+\infty$), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo $n_0$, že pro každé přirozené $n > n_0$ je splněna nerovnost $a_n > M$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Nekonečná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (mínus nekonečno), když k libovolnému reálnému číslu $M > 0$ existuje takové přirozené číslo $n_0$, že pro každé přirozené číslo $n > n_0$ je splněná nerovnost $a_n < -M$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud je limita nekonečné posloupnosti nevlastní nebo limita neexistuje, pak říkáme, že posloupnost je **divergentní**.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Na základě definice nevlastní limity posloupnosti dokažte, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

***Řešení.***

K libovolnému reálnému číslu $M$ musíme určit $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $n^2 > M$. Z této nerovnosti určíme číslo $n_0$.

Dostáváme $n > \sqrt{M}$; $n_0$ stanovíme jako nejmenší přirozené číslo, pro které platí $n_0 > M$.

Např. Pro $M = 10^2$ hledané číslo $n_0$ je $n_0 = \sqrt{10^2} = 10$.

## DEFINICE 6

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **ohraničená** (též omezená), je-li ohraničená shora i zdola. **Shora** je ohraničená tehdy, když existuje číslo $k$ takové, že pro každé $n$ platí $a_n \le k$. **Zdola** je ohraničená tehdy, když existuje číslo $m$ takové, že pro každé přirozené $n$ platí $a_n \ge m$.

## DEFINICE 7

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, resp. rostoucí, jestliže
$a_m \le a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m < a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, resp. klesající, jestliže
$a_m \ge a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$, resp. $a_m > a_n$ pro všechna $m, n \in N$, $m < n$.

Jestliže je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buďto neklesající, rostoucí, nerostoucí nebo klesající, říkáme, že je **monotónní**.

Pro monotónní posloupnosti platí:

1. Monotónní posloupnost má vždy limitu (vlastní nebo nevlastní).
2. Limita neklesající nebo rostoucí posloupnosti je rovna supremu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in N\}$.
3. Limita nerostoucí nebo klesající posloupnosti je rovna infimu této posloupnosti, tedy $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \inf\{a_n; n \in N\}$.

**Výpočet limit posloupností**

K výpočtu limit posloupností využijeme znalosti limit jednoduchých základních posloupností, základních vět o limitách a znalosti operací s prvky v $R^*$, zejména s $\infty$ a $-\infty$.
Následující soubor 12 pravidel představuje matematické věty, které lze odvodit přímo z definice limity. Pečlivě si je projděte a dobře si je zapamatujte! Budou se vám později hodit k výpočtům příkladů limit.

**Pravidla pro výpočet vlastních limit**

Pro vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ q > 0,\ n \in N,\ k \in R$ platí:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},\ b \ne 0,$

**4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[l]{a_n} = \sqrt[l]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ , $l \in N$

**5.** $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$,

**6.** $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$,

**7.** $\lim\limits_{n\to\infty} q^{a_n} = q^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$,

**8.** je-li $a_n > 0, c > 0, c \neq 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \log_c a_n = \log_c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ,

**10.** existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k$ ,

**11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e,$

($e \cong 2,718$ je Eulerovo číslo, základ přirozených logaritmů),

**12.** je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, resp. $-\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$.

**Pravidla pro výpočet nevlastních limit**

Dále se budeme zabývat limitou součtu (součinu a podílu) dvou posloupností, přičemž alespoň jedna nebo obě mají nevlastní limitu.

Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $a \in R$. Platí tato tvrzení:

**1.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$.
Symbolicky lze toto tvrzení zapsat takto: „$a \pm \infty = \pm\infty$“.

**2.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Symbolicky: „$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$“.

**3.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,
pokud $a < 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.
Symbolicky: „$a \cdot \infty = \infty$ pro $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ pro $a < 0$“.

**4.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot \infty = \infty$“

**5.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ , potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
Symbolicky: „$\infty + \infty = \infty$“

**6.** Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.
Symbolicky: „$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$“

**7.** Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.
Symbolicky: „$-\infty - \infty = -\infty$"

**8.** Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
Symbolicky: „$(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$"

**Neurčité výrazy**

Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ 0^0,\ (\pm\infty)^0,\ 1^{\pm\infty}$.

Jestliže při výpočtu limit po dosazení limitní meze zjistíme, že limita je neurčitý výraz musíme tento výraz vhodným matematickým obratem (dělením nebo rozšířením) převést na „určitý" výraz, tj. výraz, jehož limitu známe.
V následujících dvou příkladech vysvětlíme výpočet limit posloupností, ve kterých $a_n$ je podílem mnohočlenů (*racionálním lomeným výrazem*).

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3 + 7n - 6n^2}$.

***Řešení.***

Limita je neurčitý výraz $\frac{\infty}{-\infty}$. Neboť $\lim_{n\to\infty}(2n^2 - 3n + 5) = \infty$ a $\lim_{n\to\infty}(3 + 7n - 6n^2) = -\infty$. Výraz pro *n*-tý člen posloupnosti upravíme tak, že čitatele i jmenovatele dělíme největší mocninou *n*.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + \frac{7n}{n^2} - \frac{6n^2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Uvědomte si, že $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0.$

Uvedeným způsobem můžeme postupovat vždy v případě výpočtu limity posloupnosti, jejíž *n*-tý člen má tvar racionálního lomeného výrazu obsahujícího proměnnou *n*, tj. v čitateli i ve jmenovateli se nacházejí mnohočleny. Následující věta nám dává návod na velmi rychlé a elegantní řešení.

## VĚTA 1

Jestliže $a_n = \dfrac{P_m(n)}{Q_r(n)}$, kde $m$ je stupeň mnohočlenu v čitateli, $r$ je stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, potom:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_m(n)}{Q_r(n)} = \begin{cases} \infty & \text{pro } m > r \\ 0 & \text{pro } m < \mathrm{r} \\ \text{podíl koeficientů} & \\ \text{při nejvyšších} & \text{pro } m = r \\ \text{mocninách } n & \end{cases}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Vypočtěte

**a.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - n^2 + 2}{n^5 + 4n^3 - 2n^2}$,

**b.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 5n + 1}{n - 3}$,

**c.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 6n^2 + 4n - 8}{5n^3 + 7n^2 - 2n + 2}$.

***Řešení.***

**a.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_3(n)}{Q_5(n)} = 0$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je menší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená $\operatorname{st} P_3(n) < \operatorname{st} Q_5(n)$.

**b.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_2(n)}{Q_1(n)} = \infty$, protože stupeň mnohočlenu v čitateli je větší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, to znamená $\operatorname{st} P_2(n) > \operatorname{st} Q_1(n)$.

**c.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_3(n)}{Q_3(n)} = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{st} P_3(n) = \operatorname{st} Q_3(n)$, koeficient u $n^3$ v čitateli je 2, ve jmenovateli je 5.

Limity algebraických výrazů závisejí na členu, který nejrychleji roste pro rostoucí $n$ a na operaci s tímto členem prováděné. Pamatujte si, že ze známých funkcí nejpomaleji roste funkce logaritmus $\log n$ (argument je $n$), potom následuje mocnina $n^a, (a > 0)$, rychleji roste exponenciální funkce $a^n, (a > 1)$, ještě rychlejší je faktoriál $n!$ a nejrychlejší je $n^n$. Seřazeny vzestupně podle rychlosti růstu (od nejmenšího k největšímu) mohou být takto:

$$\log n, \ldots, \sqrt[4]{n}, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, \ldots, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots, (n\text{-}1)!, n!, (n+1)!, \ldots, n^n.$$

V následujících příkladech vysvětlíme výpočet limit posloupností, ve kterých $a_n$ je iracionálním výrazem a zároveň se jedna o limitní typ „$\infty - \infty$“ Výraz určující $a_n$ vhodně rozšíříme. Použijeme identity známé z algebry: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. To znamená místo výrazu $a-b$ napíšeme výraz $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)$

***Řešení.***

Jedná se o limitní typ „$\infty - \infty$“ neboť $\lim \sqrt{4n^2+5n-7} = \infty$ a $\lim(-2n) = -\infty$.

Limitní výraz vhodně rozšíříme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+5n-7}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}+2} = \frac{5}{4}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}-7-7^{n-1}}{9^n+8^{\frac{n}{2}}-84}$.

***Řešení.***

Poznamenejme, že $3^{2n+1} = 3^{2n}\cdot 3^1 = \left(3^2\right)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3$.

Limitní výraz nejdříve upravíme tak, aby obsahoval stejné exponenty:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 9^n - 7 - \frac{1}{7}\cdot 7^n}{9^n + \left(\sqrt{8}\right)^n - 84}.$$

Čitatele i jmenovatele dělíme exponenciálním výrazem s největším základem. V našem případě je to $9^n$ a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{9^n} - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n}{1 + \left(\sqrt{\frac{8}{81}}\right)^n - \frac{84}{9^n}} = 3.$$

Místo dělení exponenciálním výrazem s největším základem můžeme samozřejmě tento výraz vytknout z čitatele i jmenovatele a zkrátit.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^{2n-2} - 10}{5\cdot 4^{n-1} + 3^n}$.

***Řešení.***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{2n-2} - 10}{5\cdot 4^{n-1} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 0{,}25\cdot 4^n - 10}{5\cdot 0{,}25\cdot 4^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(0{,}75 - \frac{10}{4^n}\right)}{4^n\left(1{,}25 - \frac{3^n}{4^n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n$.

***Řešení.***

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, proto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{5}{n}\right) = 1$. Je limitou posloupnosti $a_n = \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n$ číslo 1?

Takto uvažovat nelze, neboť v tomto případě se současně mění základ i exponent; $n$-tý člen není ani mocninným, ani exponenciálním výrazem. Pro výpočet zadané limity posloupnosti použijeme pravidlo 12 a přímo dostáváme výsledek:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = e^5.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

***Řešení.***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1-1}\right)^{2} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{2}} = \frac{(e^{-1})^2}{1} = e^{-2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Vypočtěte **a.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-7}{n+2}\right)^{n+8}$, **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{n}$.

***Řešení.***

**a.** $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+2}\right)^{n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-2-7}{n+2}\right)^{n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+2}\right)^{n+2-2+8}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+2}\right)^{6} = e^{-9}\cdot 1 = \frac{1}{e^9},$$

**b.** $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{\frac{(3n+2)}{3}-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{(3n+2)}}\,\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^{-1}}\cdot 1 = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

Vypočtete $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+8}{n^3+5}\right)^{\frac{3n^3}{2}}$.

***Řešení.***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+8}{n^3+5}\right)^{\frac{3n^3}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^3+5}\right)^{\frac{3n^3}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^3+5}\right)^{n^3}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(e^3\right)^{\frac{3}{2}}=e^{4,5}.$$

## 7.3 Příklady k procvičení

## PŘÍKLAD 1

Vypočtěte limity posloupností:

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{6-5n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n+3)}{3n^2-8}$

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-4)^2}{(3n-1)(4n+2)}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)$

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(3+\sqrt{n}\right)^2}{n+7}$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n+4}$

**g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+5n}}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$

**i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ **j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$

**k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ **l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$

**m)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}\right)$ **n)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)$

**o)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}+1}$ **p)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-8}{5\cdot 4^{n-1}+1}$

**q)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$ **r)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$

**s)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}-4^{2n}+2^{n-1}}{5^{n+1}-16^{n+\frac{1}{2}}}$ **t)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}-7^{n-1}+2^{2n}}{5-9^n+2^n}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **u)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ | **v)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n-1)!}{(n-2)!-n!}$ |
| **w)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7(n+1)!}{n!-(n+1)!}$ | **x)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+3}$ |
| **y)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{5n^2-8}{2}}$ | **z)** | $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-6}{2n+4}\right)^{3n-3}$ |

## 7.4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

**1)** **a)** $-0{,}8$ **b)** $\dfrac{1}{3}$ **c)** $\dfrac{1}{3}$ **d)** $0$ **e)** $1$

**f)** $\infty$ **g)** $\sqrt{2}-2$ **h)** $\sqrt{3}$ **i)** $-1$ **j)** $\dfrac{4}{7}$

**k)** $0$ **l)** $-2{,}5$ **m)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **n)** $\dfrac{1}{2}$ **o)** $\dfrac{1}{4}$

**p)** $\dfrac{48}{5}$ **q)** $\dfrac{5}{4}$ **r)** $-1$ **s)** $\dfrac{1}{4}$ **t)** $-1$

**u)** $0$ **v)** $0$ **w)** $-7$ **x)** $e^4$ **y)** $e^{-2,5}$

**z)** $e^{-15}$

# 8 FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

## DEFINICE 1

Nechť $D(f)$ a $H(f)$ jsou dvě podmnožiny reálných čísel, tj. $D(f) \subseteq R$, $H(f) \subseteq R$ a nechť $x \in D(f)$, $y \in H(f)$. Předpis $y = f(x)$ se nazývá funkcí, jestliže ke každému $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

Nechť $D(f)$ a $H(f)$ jsou dvě podmnožiny reálných čísel, tj. $D(f) \subseteq R$, $H(f) \subseteq R$ a nechť $x \in D(f)$, $y \in H(f)$. Předpis $y = f(x)$ se nazývá funkcí, jestliže ke každému $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

Proměnná *x* se obvykle nazývá **nezávisle proměnná** nebo **argument**, kdežto proměnná *y* se nazývá **závisle proměnná**.

Množina $D(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce *f*, množina $H(f)$ se nazývá **obor hodnot** (obor funkčních hodnot) funkce *f*.

Kromě uvedeného označení funkce se často používá také označení:

$$f : D(f) \to H(f),$$

$$f : y = f(x),$$

$$f : x \mapsto y.$$

Funkce *y* = *f* (*x*) je definována (určena), když je dán její definiční obor $D(f)$ a pravidlo, dle kterého je ke každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena **právě jedna funkční hodnota** $f(x)$. Toto pravidlo může být vyjádřeno následujícími způsoby:

**a) analyticky,** tj. analytickým výrazem (vzorcem), resp. rovnicí nebo několika rovnicemi platnými v definičním oboru, které prvkům $x \in D(f)$ přiřazují funkční hodnotu $y \in H(f)$.
Je-li závisle proměnná *y* vyjádřena pomocí nezávislé proměnné *x*, říkáme, že funkce je dána **explicitně**, například $y = 3x^2$.
Jinak mluvíme o **implicitním** zadání funkce, což obecně můžeme zapsat ve tvaru $F(x, y) = 0$, například $(y^2 + 3x)^3 = 0$.

Funkci danou explicitně můžeme vždy převést na implicitní tvar. Nechť například je funkce *f* zadaná explicitně rovnicí

$$y = 0{,}5\cos x + \sin x .$$

Uvedenou funkci můžeme vyjádřit implicitně takto :

$$2y - \cos x - 2\sin x = 0 .$$

Převod implicitního zápisu funkce na explicitní není vždy možný.

Například funkci $f$ zadanou implicitně rovnicí

$$y + \ln x - e^{xy} = 0$$

není snadné vyjádřit explicitně.

Poznamenejme, že ne každou rovnicí $F(x,y)=0$ je určena funkce. Například rovnicí $x^2+y^2-4=0$ není ve smyslu definice určena funkce, neboť hodnotám $x \in (-2,2)$ dle uvedené rovnice odpovídají dvě různé hodnoty $y_1$ a $y_2$:

$$y_1 = \sqrt{4-x^2}, \qquad y_2 = -\sqrt{4-x^2}\ .$$

**b) tabulkou,** která určuje hodnoty závislé proměnné pro jednotlivé hodnoty argumentu. Tento druh určení funkce můžeme použít jenom tehdy, je-li definičním oborem dané funkce konečná množina.

Tabulka může mít např. tvar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 5 | 8 | 9 |
| $y$ | 5 | 8 | 1 | 3 |

**c) grafem**, což je množina všech bodů v rovině, jejichž souřadnice jsou $[x, f(x)]$.
Grafem funkce $f$ rozumíme množinu všech bodů uvedené vlastnosti a nakreslená křivka je obrazem tohoto grafu.

## 8.1 Vlastnosti funkcí

### DEFINICE 2

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená shora**, existuje-li taková konstanta *h*, zvaná **horní závora** funkce *f* na oboru *M*, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \le h$.

### DEFINICE 3

Funkce $y = f(x)$ se nazývá na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená zdola**, existuje-li taková konstanta *d*, konstantní pro všechna $x \in M$, zvaná **dolní závora** funkce *f* na oboru *M*, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \ge d$.

### DEFINICE 4

Funkce $y = f(x)$ je na oboru $M \subseteq R$ **ohraničená**, právě když je součastně ohraničená zdola i shora. Právě tehdy existuje taková konstanta $K \ge 0$, že pro všechna $x \in M$ platí $|f(x)| \le K$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Rozhodněte, zda je kvadratická funkce $f(x) = x^2 + 5$ ohraničená v celém svém $D(f) = R$.

***Řešení.***

Protože $x^2 \geq 0$, je $f(x) \geq 5$ pro všechna $x \in R$. Funkce $f(x)$ je zdola ohraničená.
Grafem uvažované funkce $f(x) = x^2 + 5$ je parabola, která má větve směrem nahoru, proto funkce není shora ohraničená.
Na základě uvedeného můžeme již konstatovat, že $f(x)$ není ohraničená na množině *R*.

## DEFINICE 5

Funkce $f(x)$ je **sudá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$.
Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy *y*.

## DEFINICE 6

Funkce je **lichá**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$.
Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku souřadnicového systému.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Sudé jsou například funkce:

$f(x) = |x|$, neboť $|-x| = |x|$,

$f(x) = x^{2k}$, neboť $(-x)^{2k} = x^{2k}$, $k \in N$,

$f(x) = \cos x$, neboť $\cos(-x) = \cos x$.

Liché jsou například funkce:

$f(x) = \frac{1}{x}$, kde $x \neq 0$, neboť $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$,

$f(x) = x^{2k+1}$, neboť $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, $k \in N$,

$f(x) = \sin x$, neboť $\sin(-x) = -\sin x$.

## DEFINICE 7

Funkce $f(x)$ se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je též $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo $p$ se nazývá **perioda funkce.** Graf periodické funkce se posunutím podél osy $x$ o hodnotu $p$ nezmění. Typickým příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce.

## DEFINICE 8

Monotónní funkce jsou takové funkce, které splňují pro každou dvojici čísel $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in M \subset D(f))$ následující podmínky:

$$\text{jestliže} \left\{ \begin{array}{c} f(x_1) < f(x_2), \\ f(x_1) > f(x_2), \\ f(x_1) \leq f(x_2), \\ f(x_1) \geq f(x_2), \end{array} \right\} \text{pak funkce } f \text{ je v } M \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array} \right.$$

Funkce klesající a rostoucí nazýváme **ryze monotónní**.

## DEFINICE 9

Funkce $f(x)$ je na $D(f)$ **prostá** (jednoznačná), jestliže ke každým dvěma hodnotám $x_1, x_2 \in D(f)$, kde $x_1 \neq x_2$, přiřazuje hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Platí:**

1. Jestliže je funkce prostá, pak každá přímka rovnoběžná s osou $x$ protne její graf nejvýše v jednom bodě.
2. Každá ryze monotónní funkce je prostá, však ne každá prostá funkce je ryze monotónní.
3. Sudá funkce není nikdy prostá. Lichá funkce může, ale nemusí být prostá.

## DEFINICE 10

Nechť funkce $u = g(x)$ je definovaná na množině $M_1$ a funkce $y = f(u)$ na množině $M_2$. Nechť $M$ je takovou podmnožinou $M_1$, že pro každé číslo $x \in M$ patří příslušné číslo $u = g(x)$ do $M_2$. Potom funkce $y = f(g(x))$ se nazývá **složená funkce**. Funkci $u = g(x)$ říkáme vnitřní složka funkce, kdežto funkci $y = f(u)$ říkáme vnější složka složené funkce $y = f(g(x))$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Určete složenou funkci $y = F(x)$, která má vnitřní složku $u = 1 - x^2$ a vnější složku

$$y = f(u) = \sqrt{u^3}.$$

***Řešení.***

Hledaná funkce je ve tvaru $\quad y = F(x) = f(u(x)) = \sqrt{(1 - x^2)^3}$

## DEFINICE 11

Nechť $f(x)$ je prostá funkce definovaná na $D(f)$. Obor jejích funkčních hodnot je $H(f)$. Potom funkce, která přiřazuje každému $y \in H(f)$ hodnotu $x \in D(f)$, pro kterou platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkcí** k funkci $f(x)$ a značíme ji $f^{-1}(x)$. Platí $x = f^{-1}(y)$, nebo $x = g(y)$.

Funkce $y = f(x),\ x \in D(f)$ a $x = f^{-1}(y),\ y \in H(f)$ se nazývají **vzájemně inverzní funkce**. Jejich grafy jsou křivky osově souměrné dle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. dle přímky *y* = *x*.

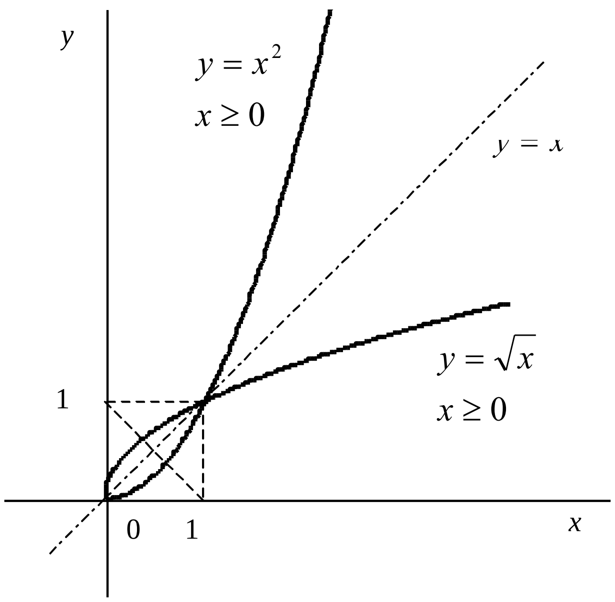
## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = e^x$ (na celém $D(f)$, jelikož exponenciální funkce je prostá) je funkce logaritmická $f^{-1}(x) = \ln x$. Obor funkčních hodnot exponenciální funkce je množina všech kladných čísel, kterou označujeme $R^+$, proto definičním oborem logaritmické funkce je také $R^+$, takže argument logaritmické funkce musí být vždy kladný.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Ke kvadratické funkci $f(x) = x^2$, jejímž $D(f) = R$, inverzní funkce neexistuje, protože kvadratická funkce v celém svém definičním oboru není prostá. V případě zúžení $D(f)$ na množinu $\langle 0, \infty)$ je inverzní funkcí k funkci kvadratické $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, kde $x \in \langle 0, \infty)$. Tyto dvě funkce jsou znázorněny na Obr. 8. 1.

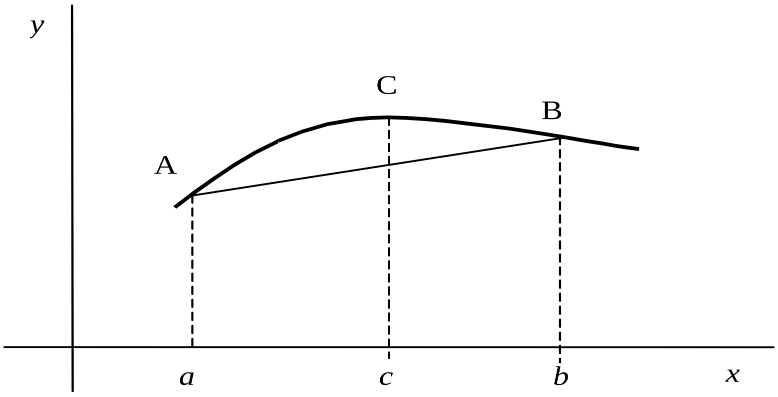
**Obrázek 8-1: Graf inverzních funkcí** $y = x^2$ **a** $y = \sqrt{x}$



## DEFINICE 12

Funkce $f(x)$ definovaná v intervalu $J$ se nazývá **ryze konkávní** na $J$, když splňuje podmínku: Pro každé tři body $a < c < b$ patřící do $J \subseteq D(f)$, leží bod $C = [c, f(c)]$ na grafu funkce (Obr. 8.2.) nad úsečkou s krajními body $A = [a, f(a)]$ a $B = [b, f(b)]$.

**Obrázek 8-2: Konkávní funkce**

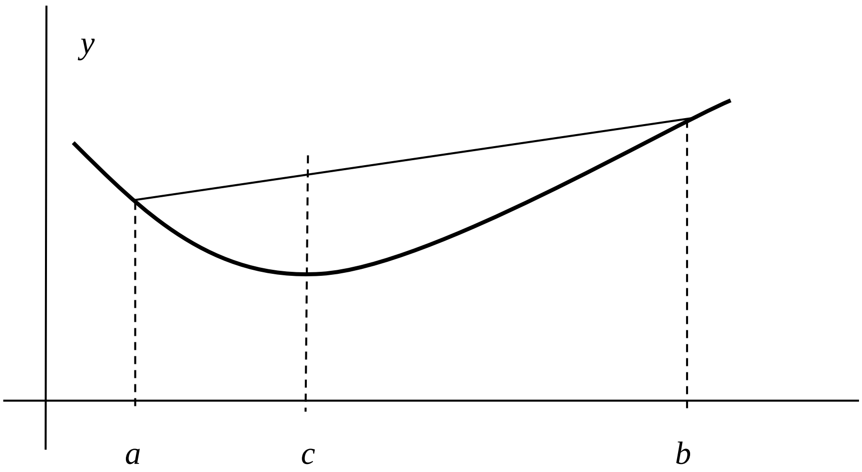



.

## DEFINICE 13

**Konvexní funkce** na $J$ je definována obdobně jako konkávní funkce, až na to, že bod C leží pod uvedenou úsečkou nebo na ní. Analogicky se definuje **ryze konvexní** funkce na $J$, kde se nepřipouští, aby bod C ležel na uvedené úsečce, viz Obr. 8.3.

**Obrázek 8-3: Konvexní funkce**



## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Funkce $f(x) = -x^2$ je konkávní na *R*, zatímco funkce $g(x) = x^2$ je konvexní na *R*.

## 8.2 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Podle toho, jaké operace vytvářejí funkci $f(x)$ z argumentu *x*, rozlišujeme dvě hlavní skupiny funkcí: algebraické funkce a transcendentní funkce.

### *8.2.1 ALGEBRAICKÉ FUNKCE*

Algebraickou funkcí rozumíme funkci, kterou lze vytvořit z konstant a z proměnné *x* konečným počtem algebraických operací (tj.sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a umocňováním racionálním exponentem).
Algebraické funkce dělíme na **racionální** a **iracionální** (např. $y = \sqrt[3]{x^2}$ ).
Racionální funkce dělíme na **polynomické funkce**, též polynomy neboli mnohočleny $\left(\text{např. } y = 2x^3 - 2x + 8\right)$ a **racionální lomené funkce** (např. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$), tj. funkce, které vznikají podílem dvou polynomů.

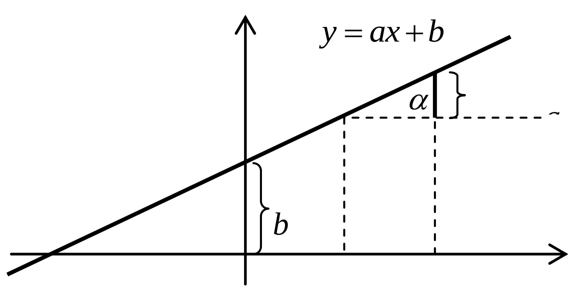
Uveďme nejprve dva příklady polynomických funkcí:

**Lineární funkce** je funkce ve tvaru:

$$y = ax + b, \quad a, b \in R, \quad \text{kde} \quad D(f) = R.$$

Grafem této funkce je přímka. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$a = \operatorname{tg}\alpha$ - směrnice přímky, která je grafem lineární funkce,
$b$ - úsek (vyťatý přímkou) na ose y, viz Obr. 8.4.

**Obrázek 8-4: Graf lineární funkce** $y = ax + b$.




Jestliže $a = 0$, potom hovoříme o **funkcí konstantní.**

**Kvadratická funkce** je funkce ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in R, a \neq 0, \quad \text{kde} \quad D(f) = R.$$

Grafem je parabola. Jednotlivé koeficienty mají tento význam:
$a > 0$, pak parabola je konvexní funkce na $R$,
$a < 0$, pak parabola je konkávní funkce na $R$.

**Racionální lomená funkce**
Racionální lomenou funkcí nazýváme funkcí $R(x)$, která je podílem dvou polynomických funkcí, tj. má tvar

$$R(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

**Mocninné funkce**
Mocninné (potenční) funkce jsou funkce ve tvaru $y = x^r$, kde $D(f) = (0,+\infty)$, tj: $x > 0$, $r$ je libovolné reálné číslo. Pro některé $r$ budeme mocninnou funkci definovat i mimo interval $(0,\infty)$.

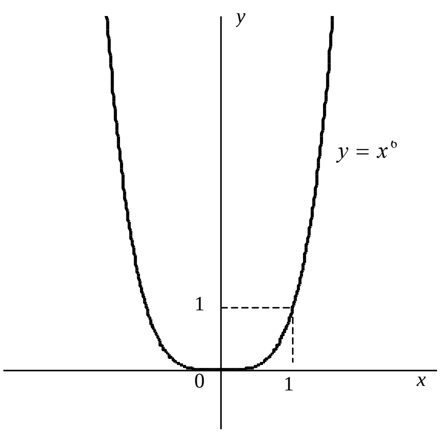
Jestliže $r$ je přirozené číslo, pak máme tyto případy:

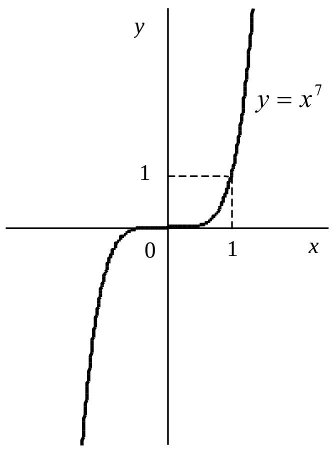
**a. Sudá mocninná funkce s kladným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n}, \quad n \in N, \quad \text{kde} \quad D(f) = R.$$

Grafem těchto funkcí je konvexní parabola ($2n$)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic Konkávní parabola ($2n$)-tého stupně s vrcholem v počátku souřadnic je grafem funkce $y = -x^{2n}$, kde $n \in N$.

**Obrázek 8-5: Graf paraboly šestého a sedmého stupně**



**b. Lichá mocninná funkce s kladným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{2n+1}, \quad n \in N, \quad \text{kde } D(f) = R.$$

Grafem funkce je parabola (2*n*+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek souřadnicového systému.

V případě $y = -x^{2n+1}$ je grafem křivka osově souměrná podle osy *x* ke grafu funkce $y = x^{2n+1}$. Tato parabola (2*n*+1)-ního stupně leží ve 2. a 4. kvadrantu.

Když $r = -n,\ n \in N$, je $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Nastávají tyto případy:

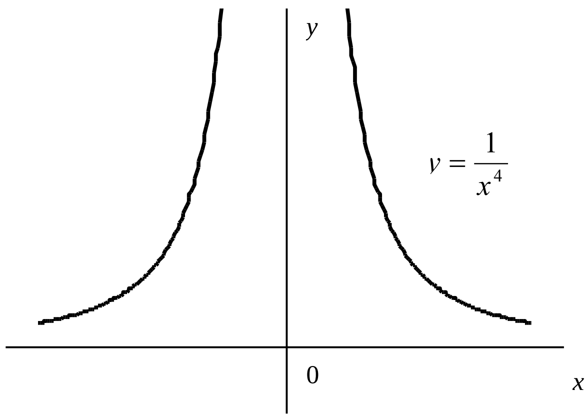
**c. Sudá mocninná funkce se záporným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n}, \quad n \in N, \quad \text{kde } D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \frac{1}{x^{2n}}$ není definována pro $x = 0$!

Grafem funkce je hyperbola (2*n*)-tého stupně, která leží v 1. a 2. Kvadrantu. V případě funkce $y = -x^{-2n}$ je grafem hyperbola (2*n*)-tého stupně, která leží ve 3. a 4. kvadrantu.

**Obrázek 8-6: Graf hyperboly čtvrtého stupně**



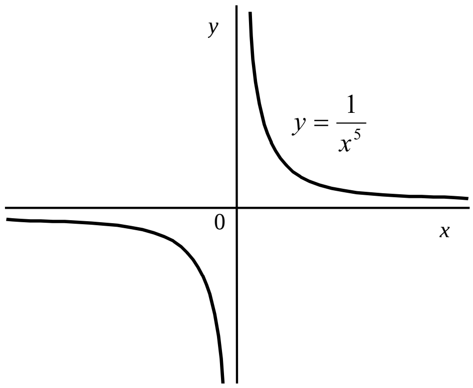

**d. Lichá mocninná funkce se záporným exponentem** je funkce ve tvaru

$$y = x^{-2n-1}, \quad n \in N, \quad \text{kde } D(f) = R - \{0\}.$$

Funkce $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$ opět není definována pro $x = 0$!

Grafem funkce je hyperbola (2*n*+1)-ního stupně, která leží v 1. a 3. kvadrantu. Zvláštním případem je funkce $y = \frac{1}{x}$ (tj. $n = 0$), jejímž grafem je vám dobře známá rovnoosá hyperbola.

**Obrázek 8-7: Graf hyperboly pátého stupně**




### 8.2.2 TRANSCENDENTNÍ FUNKCE

Připomeňme, že funkce, která není algebraická, se nazývá transcendentní (nealgebraická). Především nás budou zajímat exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

**Exponenciální funkce** má (na rozdíl od mocninné funkce) proměnnou $x$ v exponentu. Je to funkce ve tvaru

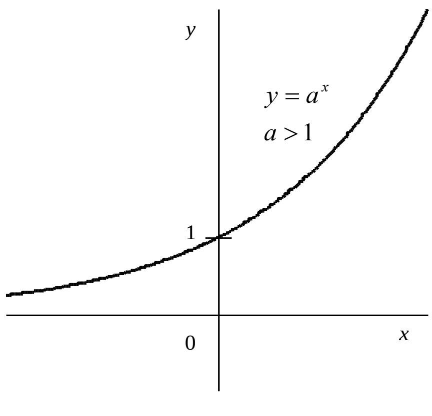
$$y = a^x, \quad a > 0, \quad \text{kde } D(f) = R, \quad H(f) = (0, \infty).$$

Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, tzn. ryze monotónní.

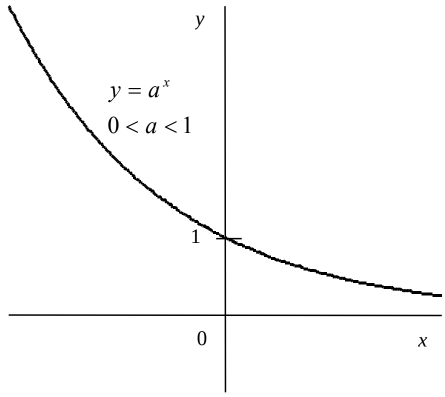
Pro $a = 1$ je to funkce konstantní $y = 1^x = 1$.

Pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající, tzn. taktéž ryze monotónní. Velmi důležitá je funkce $y = e^x$ se základem $e = 2{,}1782...$, což je tzv. Eulerovo číslo. Toto číslo je iracionální, podobně jako $\pi = 3{,}14159...$, nelze jej vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Někde se setkáte s názvem exponenciální funkce pouze pro funkci $y = e^x$. Funkci $y = a^x$ se pak říká **obecná mocnina**.

**Obrázek 8-8: Graf rostoucí exponenciální funkce**



**Obrázek 8-9: Graf klesající exponenciální funkce**

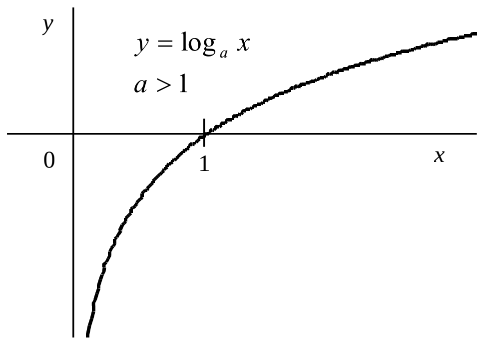



**Logaritmická funkce** je funkce ve tvaru

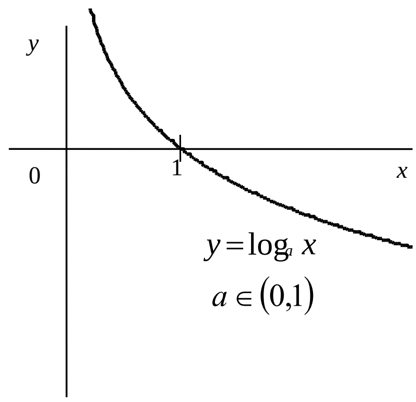
$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \qquad \text{kde } D(f) = (0, \infty), \ \ H(f) = R.$$

Logaritmická funkce je inverzní k exponenciální funkci o tomtéž základu $a$. Pro $a > 1$ je to funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je to funkce klesající. Všimněte si, že jsme v definici vynechali základ $a = 1$. Je to proto, že příslušná exponenciální funkce $y = 1^x = 1$ je konstantní, a proto k ní inverzní funkce neexistuje.

**Obrázek 8-10: Graf rostoucí logaritmické funkce**




**Obrázek 8-11: Graf klesající logaritmické funkce**



**Poznámka.** Při numerických výpočtech užíváme logaritmické funkce se základem $a = 10$, píšeme zjednodušeně $y = \log x$. Tento **logaritmus** se nazývá **dekadický**. Jak bylo již řečeno dříve, často užíváme logaritmické funkce o základu $a = e$. Kvůli rozlišení ho píšeme $y = \ln x$ a tento logaritmus nazýváme **přirozeným logaritmem**.

Z vlastností exponenciální funkce plynou následující vlastnosti pro všechna přípustná $a$:

$$a^0 = 1, \qquad \log_a 1 = 0,$$
$$\log_a a = 1, \; \ln e = 1.$$

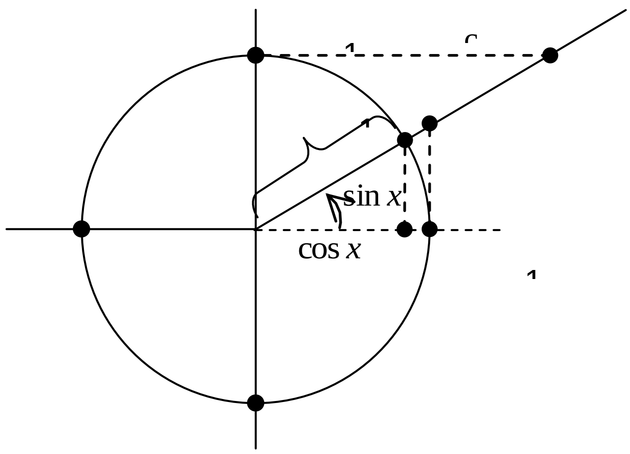
Velice často je využíván vztah $f^g = e^{g \ln f}$, kde $f$ je kladná funkce.

## Goniometrické funkce

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \operatorname{tg} x, \; y = \operatorname{cotg} x.$$

Definice těchto funkcí je založena na vztazích mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka v kružnici o poloměru 1, která je znázorněna na Obr. 8.12.

**Obrázek 8-12: Goniometrické funkce v jednotkové kružnici**




Při měření úhlů v rovině používáme dvě míry, stupňovou a obloukovou. Oblouková míra má větší využití při teoretických výpočtech.

Při stupňové míře je kružnice rozdělena na 360 **stupňů**, každý stupeň má 60 minut, každá minuta má 60 vteřin. Pokud měříme úhel v obloukové míře, pod velikostí úhlu rozumíme délku oblouku, který odpovídá úhlu v kruhové výseči v jednotkové kružnici. Jednotkou obloukové míry je **radián**. Budeme používat pouze obloukové míry úhlů.

Vztah pro přepočet stupňů na radiány: $1°[\text{stupeň}] = \dfrac{\pi}{180}$ rad [radiánů].

Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

**1.** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$

**2.** $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1,$

**3.** $\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$

**4.** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$

**5.** $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

**6.** $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

**Cyklometrické funkce** jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcím v intervalech, kde goniometrické funkce jsou ryze monotónní. Grafy těchto funkcí jsou znázorněny na Obr. 8.13.

**a)** Funkce $y = \sin x$ je rostoucí v intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesající v intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k$ je celé číslo. Zúžíme definiční obor funkce $y = \sin x$ na některý z těchto intervalů, konkrétně vybereme interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Na tomto intervalu je $y = \sin x$ ryze monotónní (rostoucí) funkcí a proto k ní existuje funkce inverzní, která se nazývá arkussinus.

**Cyklometrická funkce arkussinus** je funkce ve tvaru

$$y = \arcsin x, \quad \text{kde } D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \; H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce získáme překlopením funkce $y = \sin x$ v uvažovaném intervalu podle přímky $y = x$. Hodnota $y = \arcsin x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je číslo $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, jehož sinus je roven *x*, tj. $\sin y = x$. Platí:

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

**b) Cyklometrická funkce arkuskosinus** je funkce ve tvaru

$$y = \arccos x, \quad \text{kde } D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \; H(f) = \langle 0, \pi \rangle.$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Hodnoty $y = \arccos x$ jsou čísla z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, jejichž kosinus je roven *x*. Platí:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos 1 = 0.$$

**c) Cyklometrická funkce arkustangens** je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{kde } D(f) = R, \; H(f) = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Funkce je ohraničená, rostoucí v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y = -\frac{\pi}{2}$ a $y = \frac{\pi}{2}$. Hodnoty $y$ = arctg$x$ jsou čísla z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, jejichž tangens je roven $x$. Platí:

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

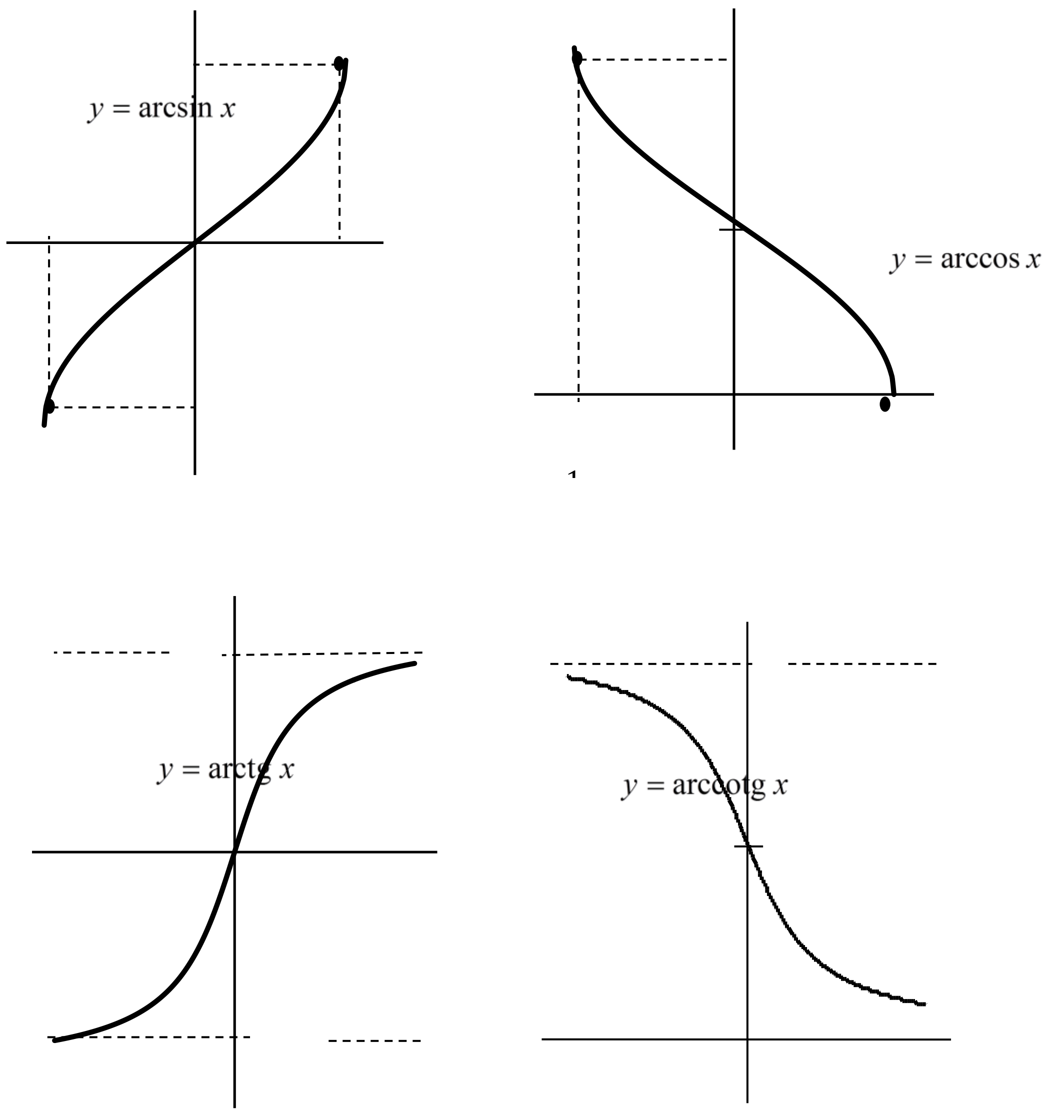
**d) Cyklometrická funkce arkuskotangens** je funkce ve tvaru

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad \text{kde} \quad D(f) = R, \quad H(f) = (0, \pi).$$

Funkce je ohraničená, klesající v celém $D(f)$. Graf funkce leží uvnitř pásu vytvořeného rovnoběžkami $y = 0$, $y = \pi$. Hodnoty $y$ = arccotg $x$ jsou čísla z intervalu $(0, \pi)$, jejichž kotangens je roven $x$. Platí:

$$\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

**Obrázek 8-13: Cyklometrické funkce**



## 8.3 Definiční obor funkce

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Určete definiční obor funkce $f(x) = ln(9 - x^2) + 4\sqrt{x - 1}$

***Řešení.***

$9 - x^2 > 0$
$(3 - x)(3 + x) > 0$
$x \in (-3;\ 3)$

$x - 1 \geq 0$
$x \geq 1$

Výsledek: $x \in < 1;\ 3)$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x - 2) + \frac{\sqrt[3]{x+4}}{x-2}$

***Řešení.***

$|x - 2| \leq 1$
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$1 \leq x \leq 3$
$x \in \langle 1;\ 3 \rangle$

$x - 2 \neq 0$
$x \neq 2$

Výsledek: $x \in < 1; 2) \ \cup \ (2; 3 >$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{5 + x}{\sqrt{x^2 - x - 12}} + log(x - 1)$$

***Řešení.***

$x^2 - x - 12 > 0$
$(x - 4)(x + 3) > 0$
$x \in (-\infty;\ -3) \cup (4;\ \infty)$

$x - 1 > 0$
$x > 1$

Výsledek: $x \in \ (4;\ \infty)$

## 8.4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Pro funkci $f(x)=3x^2-4$ vypočítejte:

**a.** $f(0)$, **b.** $f(a)$, **c.** $f(a+1)$, **d.** $f\left(\frac{1}{a}\right)$, stanovte $D(f)$,

**e.** $f(2x)$, **f.** $2f(x)$, **g.** $f(x^2)$, **h.** $[f(x)]^2$.

***Řešení.***

**a.** $f(0)=3\cdot 0^2-4=-4$,

**b.** $f(a)=3\cdot a^2-4=3a^2-4$,

**c.** $f(a+1)=3(a+1)^2-4=3a^2+6a-1$,

**d.** $f\left(\frac{1}{a}\right)=3\left(\frac{1}{a}\right)^2-4=\frac{3}{a^2}-4=3a^{-2}-4=\frac{3-4a^2}{a^2}$, $D(f)=R-\{0\}$.

**e.** Je to funkční hodnota v bodě 2*x*. $f(2x)=3\cdot(2x)^2-4=12x^2-4$

**f.** Funkční hodnota v bodě *x* je násobena dvěma.

$2f(x)=2(3x^2-4)=6x^2-8$

**g.** Funkční hodnota v bodě $x^2$. $f(x^2)=3(x^2)^2-4=3x^4-4$

**h.** Funkce je umocněna dvěma. Uvědomme si, že tuto skutečnost můžeme zapsat buď $[f(x)]^2$ nebo $f^2(x)$. Pak $f^2(x)=(3x^2-4)^2=9x^4-24x^2+16$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Pro funkci $y=\ln(e^x+2x)$ vypočítejte funkční hodnoty

**a.** v bodě $\sqrt{x}$, tzn. $f(\sqrt{x})$, **b.** v bodě $x+\Delta x$, tzn. $f(x+\Delta x)$,

**c.** v bodě $x^3$, tzn. $f(x^3)$, **d.** třetí mocninu funkce, tzn. $f^3(x)$,

**e.** druhou mocninu funkce v bodě $(2-x)$, tzn. $f^2(2-x)$.

***Řešení.***

**a.** $f(\sqrt{x})=\ln\left(e^{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right)$,

**b.** $f(x+\Delta x)=\ln\left(e^{x+\Delta x}+2(x+\Delta x)\right)=\ln\left(e^x e^{\Delta x}+2\Delta x+2x\right)$,

**c.** $f(x^3)=\ln\left(e^{x^3}+2x^3\right)$,

**d.** $f^3(x)=\ln^3\left(e^x+2x\right)=\ln\left(e^x+2x\right)\ln\left(e^x+2x\right)\ln\left(e^x+2x\right)$,

**e.** $f^2(2-x)=\ln^2\left(e^{2-x}+2(2-x)\right)=\ln\left(\frac{e^2}{e^x}-2x+4\right)=\left[\ln\frac{e^2}{e^x}-2x+4\right]^2$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Funkce $f(x) = 2x$ je definována na intervale $x \in \langle -4,2 \rangle$, funkce $g(x) = \dfrac{x}{3}$ je definována pro $x \in \langle -3,3 \rangle$.

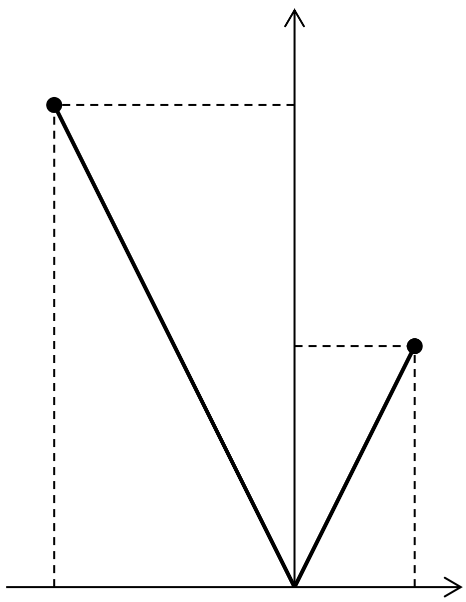
Určete funkční předpisy pro následující funkce a načrtněte jejich grafy.

**a.** $|f|$, **b.** $f + g$, **c.** $f - g$, **d.** $f.g$, **e.** $\dfrac{f}{g}$.

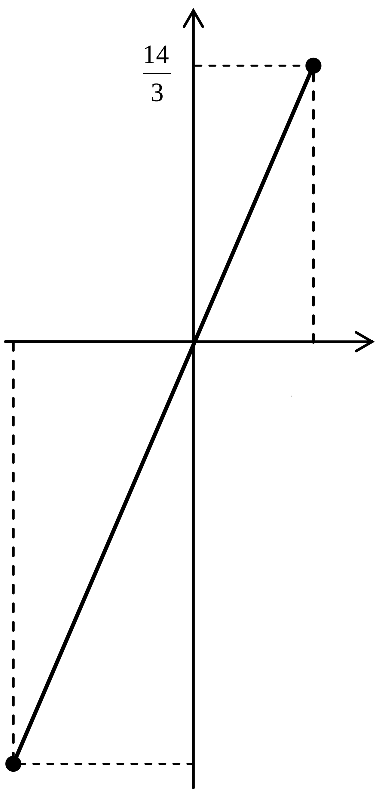
***Řešení.***

**a.** $f$ je lineární funkcí.
Platí $D(f) = D(|f|) = \langle -4,2 \rangle$.
Pro $x \in D(f)$ je $|f(x)| = 2|x|$, graf funkce je na obr. 8.14.

**Obrázek 8-14: Graf funkce** $|f(x)| = 2|x|$



**Obrázek 8-15: Graf funkce** $f + g = \dfrac{7}{3}x$



**b., c., d.** Definiční obor součtu, rozdílu a součinu dvou funkcí je průnikem definičních oborů jednotlivých funkcí, označme ho $D$.

Součet, rozdíl a součin funkcí *f* a *g* je definován na množině $D = \langle -4, 2\rangle \cap \langle -3, 3\rangle = \langle -3, 2\rangle$.

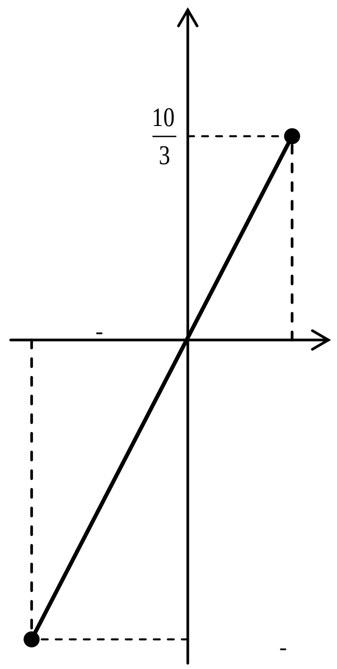
Funkční předpisy součtu, rozdílu a součinu:

Součet: $f + g = 2x + \frac{x}{3} = \frac{7}{3}x$, viz Obr. 8.15.

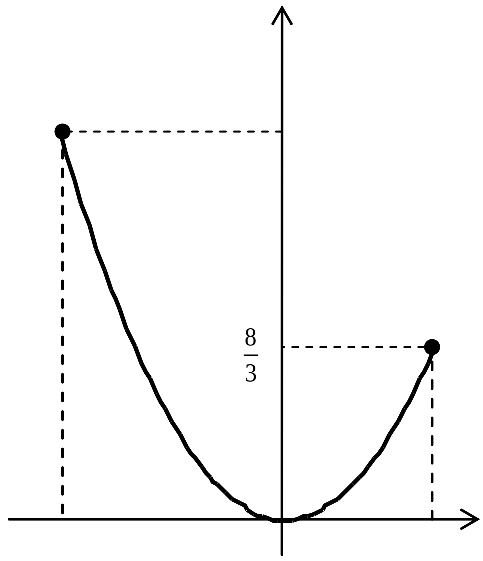
Rozdíl: $f - g = 2x - \frac{x}{3} = \frac{5}{3}x$, viz Obr. 8.16.

Součin: $f \cdot g = \frac{2}{3}x^2$, viz Obr. 8.17.

**Obrázek 8-16: Graf funkce** $f - g = \frac{5}{3}x$



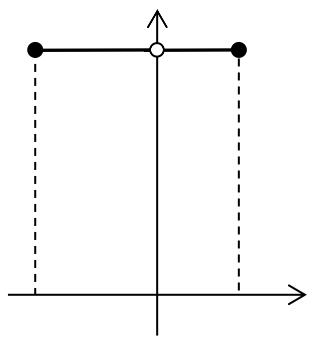
**Obrázek 8-17: Graf funkce** $f \cdot g = \frac{2}{3}x^2$




**e.** Definiční obor podílu funkcí je taktéž průnikem jednotlivých definičních oborů, ale na víc ve jmenovateli nesmí být nula, tj. $g(x) \neq 0,$ proto $x \neq 0$.

Podíl $\frac{f}{g}$ je definovaný na množině $D = \langle -4, 2\rangle \cap \{\langle -3, 0) \cup (0, 3\rangle\} = \langle -3, 0) \cup (0, 2\rangle$.

$\frac{f}{g} = \frac{2x}{\frac{x}{3}} = 6$, viz Obr. 8.18.



**Obr. 8-18: Graf funkce** $\frac{f}{g} = 6$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Rozhodněte, zda v intervalu $\left(-\infty;3\right\rangle$ existuje inverzní funkce k funkci $y=\sqrt{6-2x}$. Pokud ano, pak graficky znázorněte danou funkci a také funkci k ní inverzní.

***Řešení.***

Inverzní funkce existuje, pokud daná funkce je ryze monotónní.
Předpokládejme, že funkce je klesající, tzn., že pro libovolné argumenty $x_1, x_2$ z definičního oboru, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
Definiční obor funkce je interval $\left(-\infty,3\right\rangle$.
Pro každé $x < x_2$ z tohoto definičního oboru je:

$$-2x_1 > -2x_2$$

$$\sqrt{6-2x_1} > \sqrt{6-2x_2}\text{, takže } f(x_1) > f(x_2).$$

Potvrdili jsme, že funkce je klesající, tedy je ryze monotónní a inverzní funkce k ní proto existuje. Určíme ji tak, že z dané funkce vyjádříme $x$ jako funkci argumentu $y$.

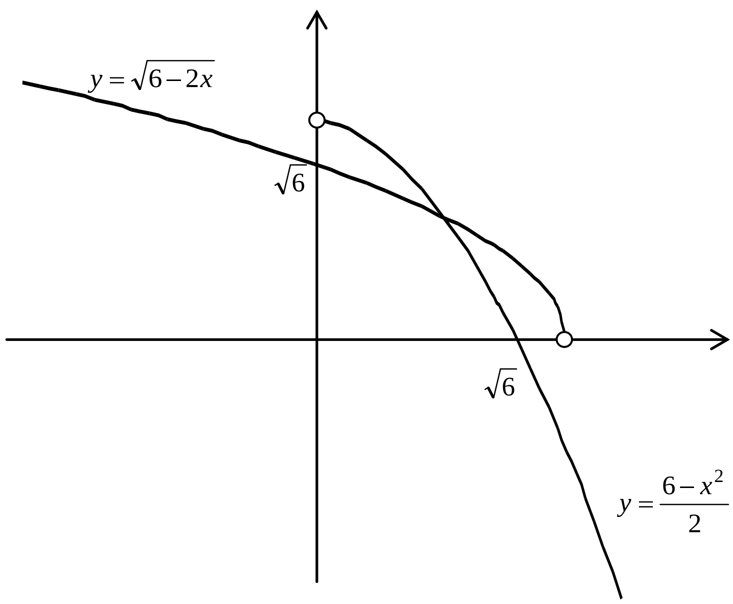
$$y=\sqrt{6-2x} \Rightarrow y^2 = 6-2x \Rightarrow x = \frac{6-y^2}{2}.$$

Následně provedeme formální záměnu proměnných. Tímto dostaneme rovnici inverzní funkce

$$y=\frac{6-x^2}{2}.$$

Definičním oborem inverzní funkce je interval $\left\langle 0;\infty\right)$, protože je to obor hodnot původní funkce.

**Obr. 8-18: Grafy vzájemně inverzních funkcí**



### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Rozhodněte, zda následující funkce jsou sudé nebo liché a stanovte jejich definiční obor.

**a.** $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$,

**b.** $h(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$.

***Řešení.***

**a.** $D(f) = R$, neboť $e^x > 0$ pro všechna $x \in R$. Dále platí:

$f(-x) = e^{-x} + \dfrac{1}{e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x} + e^x = f(x)$. Funkce je proto sudá.

**b.** Argument logaritmické funkce musí být vždy kladný, musí proto platit:

$$\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow x \in (-2;2).$$

Proto je $D(h) = (-2;2)$.
Zkoumejme, zda je funkce sudá nebo lichá:

$$h(-x) = \ln \frac{2-(-x)}{2-x} = \ln \frac{2+x}{2-x} = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1} = -\ln \frac{2-x}{2+x} = -h(x).$$

Funkce je na svém definičním oboru lichá.

## 8.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Odpovězte ano či ne?

**a)** Funkce $y = \ln x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.

**b)** Funkce $y = \sin x$ je ryze monotónní funkcí v celém svém definičním oboru.

**c)** Kvadratická funkce $y = x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty;0\rangle$.

**d)** Funkce $y = \sqrt{x}$ je inverzní funkcí ke kvadratické funkci $y = x^2$ v *R*.

**e)** Funkce $y = e^x$ je exponenciální funkcí.

**f)** Definičním oborem funkce $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$ je interval $\langle -2,2\rangle$.

**g)** Funkce $y = \dfrac{1}{x^6}$ je sudá a funkce $y = \dfrac{1}{x^9}$ je lichá.

**h)** Funkce $y = x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln x$ je složenou funkcí.

**i)** Definiční obory funkcí $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x}}$ a $g(x) = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{x \cdot \log x}$ jsou identické.

## PŘÍKLAD 2

Napište rovnici kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, je-li $f(-1) = 4,\ f(0) = 2,\ f(3) = 12$.

## PŘÍKLAD 3

Je dána funkce $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{2x^2 + 3}$. Vypočtěte $f(-1),\ f(5),\ f(a+1)$.

## PŘÍKLAD 4

Je dána funkce $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$. Určete: $f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

## PŘÍKLAD 5

Je dána funkce $f(x) = \log \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$. Vypočtěte $f(1), f(0),\ f(2-a^2)$.

## PŘÍKLAD 6

Rozhodněte, zda jsou následující funkce sudé nebo liché:

**a.** $f(x) = x^4 + 6x^2 - \cos 2x$

**b.** $f(x) = 3x^2 - \dfrac{5x^4 - 6}{3x^2 - 2}$

**c.** $f(x) = \sin x + \cos 3x$

## PŘÍKLAD 7

Určete definiční obor následujících funkcí:

**a.** $y = \arcsin(x-2)$ **b.** $y = \arccos\sqrt{2x}$ **c.** $y = \arcsin\dfrac{3x}{x+5}$

**d.** $y = (x-4)^{-1}\ln\left(x^2+4\right)^{-1}$ **e.** $y = 3\sqrt{2x - x^2}$

## 8.6 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)
a) ano
b) ne
c) ano

d) ne; kvadratická funkce není prostá a proto k ní neexistuje inverzní funkce v celém definičním oboru *R*.
e) ano
f) ano
g) ano
h) ne; je to součin čtyř základních funkcí.
i) ano, $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

2) $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$

3) 0,8 ; 25,094 ; $\dfrac{2(a+1)(a^3+3a^2+3a+3)}{2(a+1)^2+3}$

4) $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(2x_0 + 2\Delta x) - \operatorname{arctg}(2x_0)$

5) 0, $f(0)$ není definováno, $\log\dfrac{2-a^2}{|a|}$

6) **a.** sudá **b.** sudá **c.** ani sudá ani lichá

7) **a.** $x \in \langle 1,3\rangle$ **b.** $x \in \left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$ **c.** $x \in \left\langle -\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right\rangle$ **d.** $x \in R - \{4\}$ **e.** $x \in \langle 0,2\rangle$

# 9 LIMITA FUNKCE

K hlubšímu studiu funkcí je účelné zavést pojem spojité funkce. Existuje řada reálných situací, ve kterých malým změnám jedné veličiny často odpovídají malé změny jiné veličiny. Pojem spojitosti funkce a pojem limita funkce lze definovat dvěma způsoby: buď pomocí okolí bodu (Cauchyova definice) nebo pomocí posloupností (Heineova definice). V této publikaci je uveden druhý z uvedených způsobů. Tato část pojednává o reálných funkcích jedné reálné proměnné $f(x)$. Zavedeme značení $f(x) \equiv f$ ,definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit $D(f)$, výraz $x_n \to C$ znamená $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

## 9.1 SPOJITOST FUNKCE

O funkci $f$ můžeme říct, že je spojitá v bodě $C$, jestliže platí, že pokud se bod $x$ „blíží“ k bodu $C$, potom se hodnota $f(x)$ „blíží“ k číslu $f(C)$. Jak rozumíme pojmu „blížit se“?

### DEFINICE 1

O funkci $f$ řekneme, že je v bodě $C \in D(f)$ spojitá, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(f)$ platí ekvivalence:

$$x_n \to C \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n) \to f(C), \text{ neboli}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \text{ právě když } \lim_{n\leftarrow\infty} f(x_n) = f(c).$$

Platí následující věty:

### VĚTA 1

Nechť $f$, $g$ jsou spojité funkce v bodě $C$. Potom rovněž funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ $(g(C) \neq 0)$ jsou spojité v bodě $C$.

### VĚTA 2

Nechť funkce $g$ je spojitá v bodě $C$ a funkce $f$ je spojitá v bodě $d = g(C)$. Potom složená funkce $f \circ g$ , která je dána předpisem $y = f(g(x))$, je spojitá v bodě $C$.

## DEFINICE 2

Funkce $f$ je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou opět spojité funkce.

**Poznámka.**
**a.** Každá elementární funkce je spojitá v libovolném bodě svého definičního oboru.
**b.** Funkce $y = \dfrac{5x}{x-3}$ není spojitá v bodě $x = 3$.

## VĚTA 3 – BOLZANOVA VĚTA

Nechť $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ taková, že $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje reálné číslo $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Význam Bolzanovy věty je tento: Má-li spojitá funkce ve dvou různých bodech odlišné znaménko, pak existuje aspoň jeden bod mezi těmito body, v němž je funkce rovna 0.
Ještě jinak: Je-li graf spojité funkce v jednom bodě nad osou *x* a v jiném bodě pod osou *x*, potom existuje aspoň jeden bod mezi těmito body, v němž graf protíná osu *x*.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Použitím Bolzanovy věty dokažte, že rovnice $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ má v intervalu $(1, 2)$ aspoň jeden reálný kořen.

***Řešení.***
Označme funkci $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ a určíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $(1, 2)$. Dostáváme $f(1) = -4$, $f(2) = 10$. Podmínka Bolzanovy věty $f(a)f(b) < 0$ (tj. $f(1)f(2) = (-4).10 < 0$ ) je splněna, proto existuje bod $c \in (1, 2)$ takový, že $f(c) = 0$, tj. existuje reálné číslo $c \in (1, 2)$ takové, že $c^3 + 3c^2 - 2c - 6 = 0$.

## VĚTA 4 - DŮSLEDEK BOLZANOVY VĚTY

Nechť $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu $(a,b)$ taková, že nemá v intervalu $(a,b)$ žádný nulový bod. Potom funkce $f$ je stále kladná nebo stále záporná v intervalu $(a,b)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

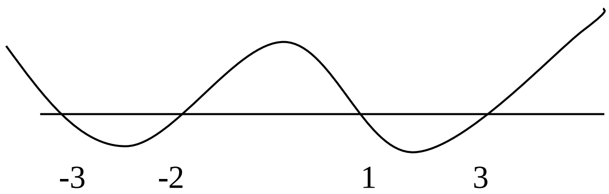
Řešte nerovnici $\dfrac{(x-1)(x^2-9)}{x+2} > 0$.

***Řešení.***

Označme funkci $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2-9)}{x+2}$.

Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $x \in \{1, 3, -3, -2\}$.
Vytvoříme pět intervalů $(-\infty,-3), (-3,-2), (-2,1), (1,3), (3,\infty)$. Funkce $f$ v každém z těchto intervalů vyhovuje předpokladům důsledku Bolzanovy věty, proto stačí vzít jeden bod a v něm zjistit znamení funkční hodnoty, protože funkce $f$ bude v celém intervalu nabývat funkčních hodnot stejného znamení.

Výsledek znázorníme graficky:




Řešením nerovnice je $x \in (-\infty,-3) \cup (-2,1) \cup (3,\infty)$.

## VĚTA 5 - WEIERSTRASSOVA VĚTA

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá v intervalu. Potom funkce $f$ nabývá v intervalu jak svého minima, tak i svého maxima vzhledem k intervalu.

**Poznámka.** Weierstrassova věta zaručuje existenci maxima i minima spojité reálné funkce jedné reálné proměnné v uzavřeném intervalu, ale nedává žádný návod, jak takové maximum nebo minimum určit.

## 9.2 LIMITA FUNKCE

Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Tato funkce je definovaná pro každé $x \neq 0$.

Sestavme tabulku:

| $x$ | $\pm 0{,}4$ | $\pm 0{,}2$ | $\pm 0{,}1$ | $\pm 0{,}08$ | $\pm 0{,}01$ | $\pm 0{,}001$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6,25 | 25 | 100 | 156,25 | 10 000 | 1 000 000 |

Z této tabulky můžeme intuitivně soudit, že pro $x$ „blížící se" k číslu 0 se funkční hodnoty „blíží" k nevlastnímu číslu $+\infty$. Tuto skutečnost zapíšeme: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$

Dříve než definujeme pojem limity funkce, definujme pojmy okolí bodu a hromadný bod množiny.

## DEFINICE 3

Nechť $C\in R$. Potom **okolím bodu $C$** nazýváme každý otevřený interval $(C-\varepsilon, C+\varepsilon)$, kde $\varepsilon>0$. Toto okolí značíme $O(C,\varepsilon)$ nebo $O(C)$. $\varepsilon$ nazýváme poloměrem tohoto okolí. Platí následující ekvivalence: $x\in(C-\varepsilon,C+\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |x-C|<\varepsilon.$

Okolím $O(C)$ bodu $C=+\infty$, resp. $C=-\infty$ rozumíme každý interval $\langle K,+\infty\rangle$, resp. $\langle -\infty,K\rangle$, kde $K\in R$.

## DEFINICE 4

Bod $C\in R^*=R\cup\{\pm\infty\}$ je **hromadným bodem množiny** $M\subset R$, jestliže v každém okolí bodu $C$ leží nekonečně mnoho bodů množiny $M$.

## VĚTA 6

Pro každou množinu $M\subset R$ a $C\in R^*$ jsou tato tři tvrzení ekvivalentní:

**a.** $C$ je hromadný bod množiny $M$,
**b.** v každém okolí bodu $C$ leží alespoň jeden bod množiny $M$,
**c.** existuje alespoň jedna číselná posloupnost v množině $M-\{C\}$, která má limitu $C$.

## DEFINICE 5

Nechť $C\in R^*$ je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$ funkce $f(x)$. Řekneme, že číslo $a\in R^*$ je **limitou funkce $f$** v bodě $C$, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in D(f)-\{C\}$ platí ekvivalence: $x_n\to C \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n)\to a.$

Zapisujeme $\lim\limits_{x\to C} f(x)=a$.

Jestliže $a\in R$ jedná se o **vlastní limitu**, pro $a=\pm\infty$ jde o **nevlastní limitu**.

Existence a hodnota limity funkce $f$ v bodě $C$ nezávisí dokonce ani na tom, zda je či není funkce $f$ v bodě $C$ definovaná.

## 9.3 Asymptoty funkce

### 9.3.1 Svislá asymptota

Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí: $\lim\limits_{x\to C} f(x)=\infty$. To znamená, že je-li limita funkce ve vlastním bodě ($x = C$) nevlastní, pak říkáme, že existuje **svislá asymptota** funkce a rozumíme jí přímku o rovnici $x = C$.

### 9.3.2 Vodorovná asymptota (asymptota bez směrnice)

Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, kde $a, b \in R$. To znamená, že je-li limita funkce v nevlastním bodě ($x = \infty$ nebo $x = -\infty$) vlastní, pak říkáme, že existuje **vodorovná asymptota** funkce a má rovnici $y=a$, resp. $y=b$.

### 9.3.3 Šikmá asymptota (asymptota se směrnicí)

Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ a současně $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=q$, kde $k, q \in R$. Pak říkáme, že existuje **šikmá asymptota**, která má rovnici $y=kx+q$. Uvedený vztah platí i v případě, že všude $+\infty$ zaměníme za $-\infty$.

**DEFINICE 6**

Symbolem $\lim\limits_{x\to C^+} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to C^-} f(x)$ označujeme **jednostrannou limitu funkce *f*** v bodě $C$ **zprava**, resp. **zleva**. $\lim\limits_{x\to C} f(x)$ nazýváme oboustrannou limitou funkce $f$ v bodě $C$.

Limita $\lim\limits_{x\to C} f(x)$ existuje právě tehdy, jestliže existuje $\lim\limits_{x\to C^+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to C^-} f(x)$, přičemž $\lim\limits_{x\to C^+} f(x) = \lim\limits_{x\to C^-} f(x)$. Pak platí $\lim\limits_{x\to C^+} f(x) = \lim\limits_{x\to C^-} f(x) = \lim\limits_{x\to C} f(x)$.

## 9.4 Věty o limitách funkce

**1.** Funkce $f$ má v hromadném bodě svého definičního oboru nejvýše jednu limitu.

**2.** Funkce $f$ je v bodě $C$ (hromadný bod definičního oboru $D(f)$) spojitá právě tehdy, když

$$f(C)=\lim_{x\to C} f(x).$$

**3.** Předpokládejme, že na neúplném okolí bodu $C \in R^*$ jsou definovány funkce $f, g, h$, pro které platí $f(x)\le g(x)\le h(x)$. Jestliže platí $\lim\limits_{x\to C} f(x)=\lim\limits_{x\to C} h(x)=a\in R^*$, potom existuje $\lim\limits_{x\to C} g(x)$ a rovná se číslu $a$.

**4.** Nechť *f, g* jsou dvě funkce a symbol $\bullet$ znamená libovolný ze symbolů $+, -, \cdot, :$ . Nechť $C \in R^*$ je hromadný bod definičního oboru $D(f \bullet g)$. Potom platí
$\lim_{x \to C}[f(x) \bullet g(x)] = \left[\lim_{x \to C} f(x)\right] \bullet \left[\lim_{x \to C} g(x)\right]$, jestliže výraz napravo má smysl.

**5.** Nechť $C \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí $\lim_{x \to C}|f(x)| = \left|\lim_{x \to C} f(x)\right|$, jestliže limita na pravé straně existuje.

**6.** Nechť $C \in R^*$ je hromadným bodem definičního oboru funkce dané rovnicí $y = \frac{1}{f(x)}$.

Potom platí ekvivalence: $\lim_{x \to C} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to C}|f(x)| = +\infty.$

## 9.5 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 8)$.

***Řešení.***

Označme funkci $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$. Tato funkce je v bodě $x = 1$ spojitá, proto limitu vypočteme jako funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$.

Dostáváme: $\lim_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 8) = 3.1^2 - 2.1 + 8 = 9.$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Z grafu funkce určeme limitu funkce v krajních bodech definičního oboru funkce:

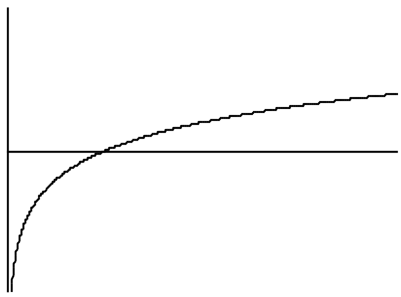
**a.** $y = log\, x$, **b.** $y = arctgx$, **c.** $y = arcsin\, x$,

**d.** $y = cos\, x$, **e.** $y = 2^x$, **f.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

***Řešení.***

**a.** Definiční obor funkce $y = log\, x$ je interval $(0, \infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$.
Protože limita $\lim_{x \to 0^-} \log x$ neexistuje, neexistuje ani $\lim_{x \to 0} \log x$.

**Obr. 9-1: Graf logaritmické funkce**

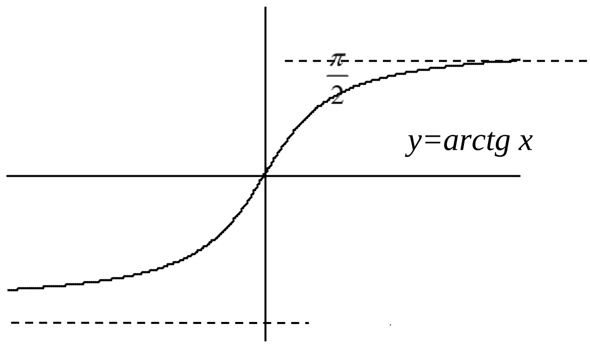


**b.** Definiční obor funkce $y = arctgx$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

Daná funkce má dvě vodorovné asymptoty o rovnicích $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

**Obr. 9-2: Graf funkce arkustangens *x***

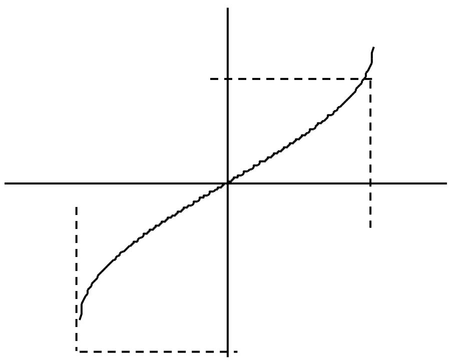



**c.** Definiční obor funkce $y = arcsin\,x$ je interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x\to-1^+} \arcsin x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^-} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

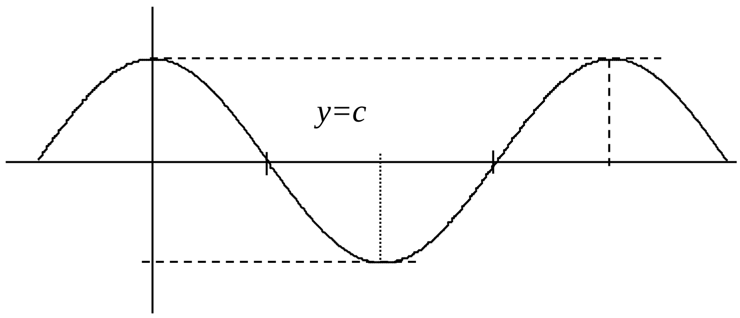
Protože jednostranné limity $\lim\limits_{x\to-1^-} \arcsin x$, $\lim\limits_{x\to1^+} \arcsin x$ neexistují, neexistují ani příslušné oboustranné limity funkce $y = arcsin\,x$.

**Obr. 9-3: Graf funkce arkussinus *x***



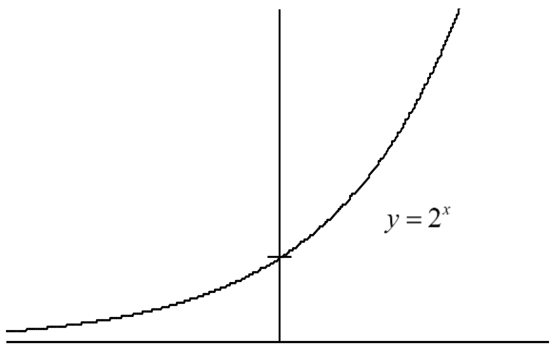
**d.** Definiční obor funkce $y = cos\,x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ neexistují, protože funkce je periodická v celém svém definičním oboru.

**Obr. 9-4: Graf funkce kosinus *x***




**e.** Definiční obor funkce $y = 2^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.
Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty$.
Funkce $y = 2^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0$.

**Obr. 9-5: Graf rostoucí exponenciální funkce**

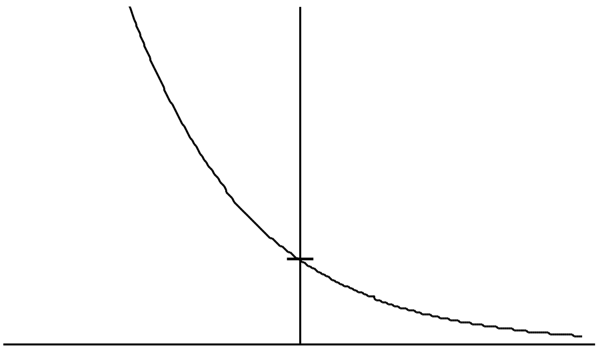



**f.** Definiční obor funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ jsou všechna reálná čísla $R = (-\infty, \infty)$.

Z grafu vidíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$.

Funkce $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ má vodorovnou asymptotu danou rovnicí $y = 0$.

**Obr. 9-6: Graf klesající exponenciální funkce**



Nyní uvedeme obecný vztah pro výpočet limit racionálních lomených funkcí, které již znáte z výpočtu limit posloupnosti.
Tento vztah budeme používat v dalším řešeném příkladu.
Nechť $k, m \in N; \quad a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_m \in R; \quad a_0, b_0 \neq 0.$
Pak platí následující tvrzení:

$$\textbf{I.}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ je-li } k = m, \\ 0, \text{ je-li } k < m, \\ \infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} > 0\right), \\ -\infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left(\dfrac{a_0}{b_0} < 0\right).. \end{cases}$$

$$\textbf{II.}\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ je-li } k = m, \\ 0, \text{ je-li } k < m, \\ \infty, \text{ je-li } (k > m) \wedge \left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0} > 0\right), \\ -\infty, \text{ je li} (k > m) \wedge \left((-1)^{k-m}\dfrac{a_0}{b_0} < 0\right). \end{cases}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte následující limity funkcí (jsou uvedeny v řešení tohoto příkladu). Je zde zachyceno všech osm případů, které mohou nastat. Řešení nekomentujeme, neboť se zde jedná pouze o určení stupně polynomu v čitateli a ve jmenovateli a jednoduchou úvahu.

***Řešení.***

**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x-3}{5+5x^4}=\dfrac{2}{5}$,  **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{5x^4-4x+2}=0$,

**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5}{5+x}=\infty$,  **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^4+2x}{x+8}=-\infty$,

**5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+3x-3}{2+5x^3}=\dfrac{4}{5}$,  **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-3}{2+5x^7}=0$,

**7.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{2+5x}=-\infty$,  **8.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4-3}{2-5x}=\infty$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Vypočtěte limity funkce v krajních bodech definičního oboru funkce. Určeme rovnice svislých, vodorovných a šikmých asymptot (pokud existují).

**a.** $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$,  **b.** $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$,  **c.** $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}$.

***Řešení.***

**a.** Definiční obor funkce $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$ je $x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty)$.

Vypočteme limity v nevlastních bodech: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+4}{x-3}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4}{x-3}=1$.

Dále vypočteme jednostranné limity:

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+4}{x-3}=$ (dosadíme do výrazu číslo 2,9 a zjistíme výsledné znamení, pokud dostaneme znaménko minus, resp. plus, je limita rovna nevlastnímu číslu $-\infty$, resp. $\infty$.)

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{+}{-}=-\infty.$

Podobně postupujeme u druhé jednostranné limity $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x+4}{x-3}$, kde dosadíme číslo 3,1 a dostáváme $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{+}{+}=+\infty.$

Protože se jednostranné limity nerovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+4}{x-3}$ neexistuje.

Svislá asymptota má rovnici $x=3$. Vodorovná asymptota má rovnici $y=1$.

Šikmá asymptota má rovnici:

$$y = kx + q, \text{kde} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left( f(x) - kx \right) = q, \quad \text{kde} \quad k, q \in R .$$

Dosadíme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+4}{x^2-3x} = 0,\ q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+4}{x-3} = 1.$

Šikmá asymptota má rovnici $y = 1$.

**b.** Definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ je $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$.

Vypočteme limity v nevlastních bodech: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{(x+1)^3} = 0,\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x+1)^3} = 0.$

Dále vypočteme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{(x+1)^3} = \text{(dosadíme do výrazu číslo } -1{,}1\text{)} = \frac{+}{-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{(x+1)^3} = \text{(dosadíme do výrazu číslo } -0{,}9\text{)} = \frac{+}{+} = \infty.$$

Protože se jednostranné limity nerovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ neexistuje.

Svislá asymptota má rovnici $x = -1$. Vodorovná asymptota má rovnici $y = 0$.
Vypočteme rovnici šikmé asymptoty:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^3 . x} = 0,\ q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^3} = 0.$$

Šikmá asymptota má rovnici $y = 0$.

**c.** Definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-4)^2}$ je $x \in (-\infty,4) \cup (4,\infty)$.

Vypočteme limity v nevlastních bodech: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{(x-4)^2} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-4)^2} = \infty.$

Dále vypočteme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to4^-} \frac{x^3}{(x-4)^2} = \text{(dosadíme do výrazu číslo 3,9)} = \frac{+}{+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to4^+} \frac{x^3}{(x-4)^2} = \text{(dosadíme do výrazu číslo 4,1 )} = \frac{+}{+} = \infty.$$

Protože se jednostranné limity rovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}$ existuje a je rovna $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}=\infty.$

Svislá asymptota má rovnici $x=4$. Vodorovná asymptota funkce neexistuje. Vypočteme rovnici šikmé asymptoty:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(x-4)^2.x}=1,$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-4)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^2-16x}{x^2-8x+16}=8.$$

Šikmá asymptota má rovnici $y=x+8$.

**Poznámka.** Funkce má svislé asymptoty v bodech, ve kterých není definována. Pokud jsou definičním oborem všechna reálná čísla, např. funkce $y=\sin x$, svislé asymptoty funkce neexistují. Všimněte si, že pokud existuje vodorovná asymptota, pak šikmá asymptota má stejnou rovnici jako je rovnice vodorovné asymptoty. Vodorovná asymptota je *speciální případ* asymptoty šikmé. Rovnice asymptot budeme potřebovat při zjišťování průběhu funkce jedné reálné proměnné.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Vypočtěte šikmé asymptoty funkce $f(x)=2x+arctg\,\dfrac{x}{2}$.

***Řešení.***

Postupujeme obdobně jako v předešlém příkladu:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+arctg\,\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x}\right)=2\pm\frac{\frac{\pi}{2}}{\pm\infty}=2.$$

Dále dostáváme pro $x\to\infty$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(2x+arctg\,\frac{x}{2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}arctg\,\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2},$$

pro $x\to-\infty$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+arctg\,\frac{x}{2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}arctg\,\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Funkce $f(x) = 2x + arctg\,\frac{x}{2}$ má dvě šikmé asymptoty o rovnicích $y = 2x + \frac{\pi}{2}$, $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Při výpočtu limity funkce typu $\frac{f(x)}{g(x)}$ dojdeme často k výrazu, kdy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, (výraz $\frac{0}{0}$) a hodnotu limity přímo nelze určit. Úpravu provádíme tak, že se snažíme zlomek krátit výrazem konvergujícím k nule. Vede k tomu například rozklad v součin mnohočlenů v čitateli i ve jmenovateli nebo použití identity $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$, pokud se ve výrazu $a - b$ vyskytují druhé mocniny.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x = 2$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x - 2)$ a nakonec dosadíme $x = 2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x = -1$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x + 1)$ a nakonec dosadíme $x = -1$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{4}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x=2$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů, krátíme výrazem $(x-2)$ a nakonec dosadíme $x=2$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x+2)}=\frac{7}{20}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x=0$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$. Rozšíříme zlomek výrazem $\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)$, potom krátíme výrazem $x$ a nakonec dosadíme $x=0$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3+x-3}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x=7$, dostaneme výraz $\dfrac{0}{0}$. Rozšíříme zlomek výrazem $\left(2+\sqrt{x-3}\right)$, potom krátíme výrazem $(x-7)$ a nakonec dosadíme $x=7$. Dostáváme:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)}{x^2-49}\frac{\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

***Řešení.***

Pokud do výrazu dosadíme $x=\infty$, dostaneme výraz $(\infty-\infty)$. Rozšíříme daný výraz výrazem $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$. Dostáváme funkci, ve které je stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, proto je limita rovna 0.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

Pokud při výpočtu limity funkce typu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dospějeme k výrazu, kdy $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 0 \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, (výraz $\dfrac{A}{0}$), jedná se zde o limitu nevlastní. Její existenci a výpočet provedeme pomocí jednostranných limit.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

***Řešení.***

Po dosazení $x=0$ dostáváme výraz $\left(\frac{1}{0}\right)$. Musíme proto počítat jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=(\text{dosadíme číslo } 0{,}1)=\frac{+}{+}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=(\text{dosadíme číslo } -0{,}1=\frac{+}{-}=-\infty.$$

Protože se jednostranné limity nerovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$.

***Řešení.***

Funkce $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ není v bodě $x=0$ definována. Proto budeme určovat jednostranné limity. Použijeme následující vztahy:

$$\lim_{x\to\infty}a^x=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=\infty \qquad \text{pro } 0<a<1,$$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=0 \qquad \text{pro } a>1.$$

Na základě uvedených vztahů a výsledku příkladu 14 můžeme psát:

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty,\qquad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

Protože se jednostranné limity nerovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ neexistuje.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 16

Vypočtěte limitu funkce bodech, ve kterých není funkce definována:

**a.** $f(x)=\frac{2}{x+1}$, **b.** $f(x)=\frac{x+3}{x^2}$.

***Řešení.***

**a.** Funkce $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ není definována v bodě $x=-1$.

Počítáme tedy limitu $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x+1}$. Po dosazení do výrazu $x=-1$, dostáváme výraz $\left(\dfrac{2}{0}\right)$ a proto počítáme příslušné jednostranné limity:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2}{x+1}= \text{(dosadíme číslo } -1{,}1\text{)} =\frac{+}{-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2}{x+1}= \text{(dosadíme číslo } -0{,}9\text{)} =\frac{+}{+}=\infty.$$

Protože se jednostranné limity nerovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x+1}$ neexistuje.

**b.** Funkce $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2}$ není definována v bodě $x=0$.

Počítáme tedy limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x^2}$. Po dosazení do výrazu $x=0$, dostáváme výraz $\left(\dfrac{3}{0}\right)$ a proto počítáme příslušné jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{x^2}= \text{(dosadíme číslo } -0{,}1\text{)} =\frac{+}{+}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{x^2}= \text{(dosadíme číslo } 0{,}1\text{)} =\frac{+}{+}=\infty.$$

Protože se jednostranné limity rovnají, výsledná limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x^2}$ existuje a je rovna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x^2}=\infty$.

V posledním příkladu využijeme definice Eulerova čísla:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k,\quad \text{kde}\quad k\in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 17

Vypočtěte následující limity:

**a.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, **b.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+4}{5x^2+7}\right)^{\frac{x^2}{2}+1}$.

***Řešení.***

**a.** Postupujeme následovně: nejprve do čitatele napíšeme výraz, který máme ve jmenovateli a upravíme tak, aby se hodnota čitatele nezměnila:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-1+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$$

(zlomek rozdělíme na dva zlomky)=

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=$$

(zavedeme substituci) =

$$\left|\frac{2}{2x+1}=\frac{1}{u}\quad\Rightarrow\quad x=u-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad (x\to\infty)\ \Rightarrow\ (u\to\infty)\right|$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+\frac{1}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\underbrace{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}}_{1}=e.$$

**b.** Postupujeme podobně jako v předešlé úloze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+4}{5x^2+7}\right)^{\frac{x^2}{2}+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+7-7+4}{5x^2+7}\right)^{\frac{x^2}{2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{5x^2+7}\right)^{\frac{x^2}{2}+1}=\exp\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]=e^{-\frac{3}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}}.$$

## 9.6 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Doplňte…

**a.** Funkce $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$ je nespojitá v bodech…

**b.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{1+6x^2}=\ldots$

**c.** Bolzanova věta zaručuje (při splnění předpokladů) existenci …… …… rovnice.

**d.** $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ nazveme nevlastní limitou, jestliže $\lim\limits_{x\to c}f(x)\in\ldots$

**e.** Nechť funkce $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné spojitá na intervalu $(a,b)$ taková, že nemá v intervalu $(a,b)$ žádný nulový bod. Potom funkce $f$ je stále ….. nebo stále ….. v intervalu $(a,b)$.

## PŘÍKLAD 2

Užitím Bolzanovy věty dokažte, že rovnice:

**a.** $x^3-10x-5=0$ má v intervalu $(2,\ 4)$ aspoň jeden reálný kořen,

**b.** $x^4-x^3-4x^2-4x+1=0$ má v intervalu $(0,\ 2)$ aspoň jeden reálný kořen,

**c.** $x^3-3x+1=0$ má v intervalu $(-2,\ -1)$ aspoň jeden reálný kořen,

**d.** $x^3-4x-5=0$ má v intervalu $(2,\ 3)$ aspoň jeden reálný kořen,

**e.** $2x^3+5x^2-7x-3=0$ má v intervalu $(-1,\ 0)$ aspoň jeden reálný kořen,

**f.** $x^4+2x^3-2x^2+2x+7=0$ má v intervalu $(-2,\ -1)$ aspoň jeden reálný kořen.

## PŘÍKLAD 3

Vypočtěte limity v krajních bodech intervalů, které tvoří definiční obor funkce $f(x)$ :

**a.** $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$,

**b.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,

**c.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$,

**d.** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$,

**e.** $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2}$,

## PŘÍKLAD 4

Vypočtěte limity funkce v daných bodech:

**a.** $f(x)=2x^4-x^2+3$ v bodech $-\infty,\ \ \infty$,

**b.** $f(x)=(x-1)^2(2-x)^3$ v bodech $-\infty,\ \ \infty$,

**c.** $f(x)=\dfrac{x^3-x}{1+3x-2x^3}$ v bodech $-1,\ \ 0,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

**d.** $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$ v bodech $3,\ \ -\infty,\ \ \infty,\ \ -2$,

**e.** $f(x)=\dfrac{2x^3+x+18}{x^3-4x}$ v bodech $0,\ \ -2,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

**f.** $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{8-x^3}$ v bodech $2,\ \ 0,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

**g.** $f(x)=\dfrac{3x^3-10x-4}{4-x^2}$ v bodech $2,\ \ -2,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

**h.** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ v bodech $3,\ \ -3,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

**i.** $f(x)=\dfrac{7x^2-5x-2}{3x^2+12x-15}$ v bodech $1,\ \ -5,\ \ -\infty,\ \ \infty$,

### PŘÍKLAD 5

Vypočtěte limity:

**a.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+7\right)$, **b.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$, **c.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$,

**d.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$, **e.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)$, **f.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-6}{5x^2-2}$,

**g.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4-x}{x+3}$, **h.** $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{2x^2-8}{-5+2x^2}\right)^{3x^2+2}$, **i.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-x-20}$,

**j.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $n\in N$, **k.** $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$, **l.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$.

## 9.7 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)

**a.** $x=1,\ x=-1$

**b.** $\dfrac{1}{2}$

**c.** reálného kořene

**d.** $\{-\infty,+\infty\}$

**e.** kladná, záporná

2) Dokažte, že je splněn předpoklad Bolzanovy věty $f(a).f(b)<0$.

3)

**a.** $D(f)=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$

**b.** $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\infty$

**c.** $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\infty$

**d.** $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$

**e.** $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=3,\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

4)

**a.** $\infty, \quad \infty$

**b.** $\infty, \quad -\infty$

**c.** $-\frac{2}{3}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$

**d.** $\frac{9}{5}, \quad -\infty, \quad \infty,$ neexistuje

**e.** neexistuje, $\frac{25}{8}, \quad 2, \quad 2$

**f.** $-\frac{1}{6}, \quad 0, \quad 0, \quad 0$

**g.** $-\frac{13}{2}$, neexistuje, $\infty, -\infty$

**h.** $-6, \quad 0, \quad -\infty, \quad \infty$

**i.** $\frac{1}{2}$, neexistuje, $\frac{7}{3}, \frac{7}{3}$

5)

**a.** 3

**b.** 0

**c.** $\frac{5}{3}$

**d.** 4

**e.** 0

**f.** 0

**g.** neexistuje

**h.** $e^{-\frac{9}{2}}$

**i.** $\frac{1}{36}$

**j.** $a$

**k.** $\frac{1}{10}$

**l.** $e^4$

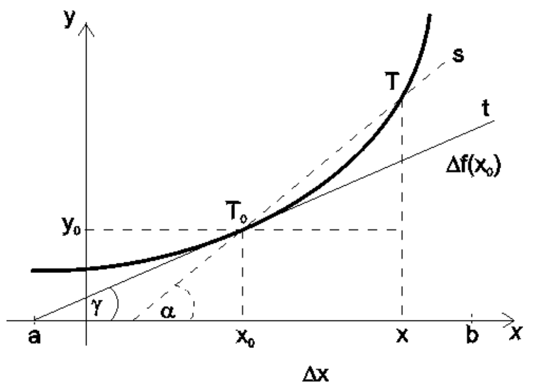
# 10 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Zkoumání mnoha přírodních i ekonomických jevů vede k závislostem vyjádřeným ve tvaru funkce jedné reálné proměnné. Derivace této funkce má zásadní význam pro popis příslušného jevu. Pojem derivace vznikl během druhé poloviny 17. století při řešení konkrétních geometrických a fyzikálních úloh. Tento pojem byl přesně definován v 19. století matematiky Cauchym a Bolzanem na základě jimi zpřesněného pojmu limity funkce.

## 10.1 POJEM DERIVACE FUNKCE

Uvažujme funkci $y = f(x)$ definovanou na otevřeném intervalu $M = (a,b)$. Zvolíme bod $x_0$ uvnitř intervalu *M*. Náš úkol bude určit směrnici tečny *t* ke křivce $y = f(x)$ v bodě $T_0 = [x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$. Za tímto účelem vedeme bodem $T_0$ sečnu *s*, která protíná křivku v dalším bodě $T = [x, f(x)]$, $x \in M$. Označíme $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Vše graficky znázorníme (Obr.10-1).

**Obr. 10-1: Derivace funkce**




Potom směrnice uvažované sečny je rovna

$$\operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

kde $\alpha(x)$ je velikost směrového úhlu přímky *s* v závislosti na *x*-ové souřadnici bodu *T*.

Přitom rozdíl $\qquad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \qquad (2)$

se nazývá **diference (přírůstek) funkce** $f$ v bodě $x_0$,

kdežto rozdíl $\qquad \Delta x = x - x_0 \qquad (3)$

se nazývá **diference (přírůstek) argumentu** $x$ v bodě $x_0$.

**Diferenční podíl** $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ je funkcí proměnné $\Delta x$, nikoliv $x_0$, které je pevné. Připomeňme, že je to směrnice sečny. Význam diferenčního podílu spočívá v tom, že charakterizuje relativní změnu hodnot funkce $y = f(x)$ vzhledem k změně hodnot argumentu. Funkce (1) není definována pro $\Delta x = 0$. Může ovšem mít v tomto bodě limitu.

## DEFINICE 1

Nechť funkce $y = f(x)$ je definována na otevřeném intervalu $M$ a nechť číslo $x_0 \in M$. **Derivací funkce** $\boldsymbol{f}$ **v bodě** $x_0$ nazýváme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Jinak řečeno: derivací funkce $y = f(x)$ v bodě $x_0$ nazýváme limitu diferenčního podílu $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ pro $\Delta x \to 0$.

Derivaci v bodě značíme nejčastěji $f'(x_0)$. Používají se též jiná označení, např. (podle Lagrangea) $y'(x_0), y'_{x_0}$ nebo (podle Cauchyho) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Pomocí definice derivace vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x = x_0$ a do výsledku dosaďte $x_0 = 5$.

***Řešení.***

Do vztahu (4) dosadíme uvedenou funkci.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Nakonec do výsledku dosadíme $x_0 = 5$: $f'(5) = 10$

### 10.1.1 VLASTNÍ A NEVLASTNÍ DERIVACE

Derivace je definována pomocí limity diferenčního podílu. Víme, že limita ve vlastním bodě (bod $x_0$ je vždy vlastní) může být vlastní, nevlastní (tj. $\infty$ nebo $-\infty$), nebo neexistuje. Objasníme pojmy vlastní a nevlastní derivace, ukážeme si, kdy derivace neexistuje.

Je-li limita (4) vlastní, pak říkáme, že $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ **vlastní derivaci.**

**Geometrický význam vlastní derivace:** směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v daném bodě $x_0$, tzn. $f'(x) = \operatorname{tg} \gamma$, kde $\gamma$ je úhel, který svírá tečna s osou *x*.

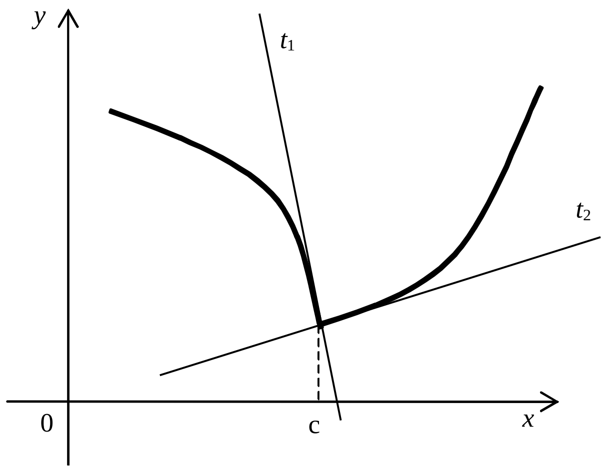
Je-li limita (4) nevlastní, pak říkáme, že $f(x)$ má v bodě $x_0$ **nevlastní derivaci.**
**Geometrický význam nevlastní derivace:** Tečna ke grafu funkce $f(x)$ je kolmá k ose *x*.
Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu, právě když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou si rovny. Obdobná věta platí pro derivace. Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ derivaci, právě když v tomto bodě existují obě jednostranné derivace a jsou si rovny.

### 10.1.2 JEDNOSTRANNÉ DERIVACE

**Derivaci zprava** funkce $y = f(x)$ v bodě $x_0$ nazýváme limitu zprava diferenčního podílu a označujeme jí $f'_+(x_0)$ resp. $y'_+(x_0)$, $\quad f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
**Derivaci zleva** funkce $y = f(x)$ v bodě $x_0$ nazýváme limitu zleva diferenčního podílu a označujeme jí $f'_-(x_0)$ resp. $y'_-(x_0)$, $\quad f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
**Geometrický význam jednostranné derivace:** směrnice tečny zprava resp. zleva ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x_0$.

Funkce na Obr. 10-2 nemá v bodě *c* derivaci, ovšem derivace zleva a zprava v tomto bodě existují. Jsou to směrnice přímek $t_1$ a $t_2$.

**Obr. 10-2: Jednostranné derivace funkce**



### 10.1.3 VZTAH MEZI DERIVACÍ A SPOJITOSTÍ FUNKCE V BODĚ

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě $x$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá. Obráceně, tvrzení neplatí. Existují funkce, které jsou spojité v daném bodě $x$ a nemají v tomto bodě derivaci. Např. funkce znázorněná na Obr. 10-2 v bodě $c$ spojitá, ale nemá v něm derivaci.

## DEFINICE 2

Nechť $M$ je množina všech bodů, ve kterých má funkce $f$ derivaci. Když ke každému číslu $x_0 \in M$ přiřadíme derivaci funkce $f$ v bodě $x_0 \in M$, dostaneme funkci, jejímž definičním oborem je množina $M$. Tuto funkci nazýváme derivací funkce f na množině $M$.

Derivaci na množině značíme: $y'(x),\ \ y',\ \ f'(x),\ \ f'$ nebo $\dfrac{dy}{dx}$.

Derivaci funkce na množině $M$ určujeme jako derivaci v libovolném bodě. Nejprve utvoříme diferenční podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ v bodě $x$ a pak vypočteme limitu tohoto podílu v bodě $\Delta x = 0$. Tím dostaneme vzorec pro $f'(x)$, čili funkční předpis pro derivaci. Vyšetříme-li obor všech $x$, pro která jsou početní úkony určující derivaci proveditelné, dostaneme definiční obor funkce $f'(x)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Pomocí definice derivace vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^n \quad \text{pro} \quad n \in N \ \text{ a } \ x \in R.$$

***Řešení.***

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}. \tag{5}$$

Dvojčlen $(x+\Delta x)^n$ umocníme pomocí binomické věty :

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n,$$

dosadíme do (V) a provedeme krácení výrazem $\Delta x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

Analogicky jako u výpočtu limit, je výpočet derivací z definice často obtížný. Proto při praktických výpočtech derivací se opíráme o pravidla pro derivování a o znalost derivací základních elementárních funkcí. Pravidla pro výpočet derivací a vzorce pro derivace základních elementárních funkcí musíte znát nazpaměť.

### *10.1.4 PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ FUNKCÍ*

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace na intervalu $M \subset R$. Nechť $k$ je libovolná konstanta. Potom pro $x \in M$ platí:

**1.** $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$,

**2.** $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

**3.** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

**4.** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, pro $g(x) \neq 0$.

Máme k zapamatování tři pravidla (derivace součtu, součinu a podílu funkcí), jelikož vztah $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ je pouze zvláštním případem derivace součinu. Říkáme, že konstantu lze z derivovaného vztahu vytknout.

**Vzorce pro derivování elementárních funkcí**

V bodě $x$, který splňuje připojené podmínky, platí pro derivace uvedených funkcí tyto vzorce:

**(1)** $k' = 0$, $k$ – libovolná konstanta, $k \in R$,

**(2)** $(x^a)' = ax^{a-1}, x > 0, a \in R$,

**(3)** $(\sin x)' = \cos x$,

**(4)** $(\cos x)' = -\sin x$,

**(5)** $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x,\ \cos x \neq 0$,

**(6)** $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x), \sin x \neq 0$,

**(7)** $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0 \Rightarrow (e^x)' = e^x$,

**(8)** $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0 \ \Rightarrow\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$,

**(9)** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1,\ 1)$,

**(10)** $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1,\ 1)$,

**(11)** $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ x \in R$,

**(12)** $(\mathrm{arccotg}\, x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2},\ x \in R$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Derivujte funkci $y = x^6 + 3x^4 - 8x^2 + x + 23,\ x \in R$.

***Řešení.***

Kromě násobného užití vzorce **(2)** použijeme též pravidla **1.** a **2.**
$y' = 6x^5 + 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x \ + 1 = 6x^5 + 12x^3 - 16x + 1$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Derivujte funkci $y = \dfrac{8x^4 - 5}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\ x \in R.$

***Řešení.***

Konstantu $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ vytkneme před derivovaný výraz, dále použijeme postupně pravidlo **2.**, **1.** a vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(8x^4 - 5\right)' = \frac{32x^3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Derivujte funkci $y = \dfrac{2x^7 + 3x^6 - 2x^4 + 7x - 2}{2x^4},\quad x \neq 0$.

***Řešení.***

Čitatel dělíme jmenovatelem.

$$y = x^3 + 1{,}5x^2 - 1 + 3{,}5x^{-3} - x^{-4},$$
$$y' = 3x^2 + 3x - 10{,}5x^{-4} + 4x^{-5}.$$

Ověřte si, že stejný výsledek obdržíte použitím pravidla **4.** pro derivování podílu. Postup je ovšem zdlouhavější.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

Derivujte funkci $y = 3x\sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.

***Řešení.***

Funkci nejprve upravíme jako mocninu proměnné *x*, potom použijeme **(2)**.

$$y = 3x^{1+\frac{1}{4}} = 3x^{1,25},$$
$$y' = 3,75x^{0,25} = 3,75\sqrt[4]{x}.$$

Derivovaný výraz, pokud lze, vždy nejprve upravíme.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

Derivujte funkci $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}}$, $x \geq 0$.

***Řešení.***

Funkci *y* můžeme upravit takto: $y = x^{\frac{19}{12}}$. Pak použijeme vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{19}{12}x^{\frac{7}{12}} = \frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}.$$

V následujícím souboru pěti příkladů se naučíte používat vztahy pro derivaci součinu a podílu dvou funkcí. Vzorce a pravidla pro derivování musíte bezpečně ovládat!

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Derivujte funkci $y = x^2 \cos x, x \in R$.

***Řešení.***

Použijeme pravidlo **3.** pro derivaci součinu.

$$y' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Derivujte funkci $y = \dfrac{\sin x}{\ln x}, \quad x > 0,\ x \neq 1.$

***Řešení.***

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu. Všimněte si správného pořadí funkcí z čitatele a jmenovatele derivovaného zlomku: čitatel výsledku začíná derivací čitatele.

$$y' = \frac{(\sin x)' \ln x - \sin x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x \ln x - \sin x \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Derivujte funkci $y = \operatorname{cotg} x, \quad x \neq k\pi$ .

***Řešení.***

Použijeme základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi a pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Vzorec pro derivaci tg $x$ ověřte teď sami!

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Derivujte funkci $y = \dfrac{3x+8}{x^2+4}, x \in R$ .

***Řešení.***

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y' = \frac{3\left(x^2+4\right) - (3x+8)2x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{-3x^2 - 16x + 12}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Derivujte funkci $y = \dfrac{\ln 5}{x}, x \neq 0$.

***Řešení.***

Pro urychlení výpočtu funkci upravíme do součinového tvaru. Vytkneme konstantu $\ln 5$. Následně derivujeme $x^{-1}$. Jde o to, abychom podobné případy nederivovali jako podíl, ale jako součin. Derivování funkcí typu konstanta/výraz jako podílu je obecně mnohem pomalejší postup.

$$y = \ln 5 \cdot x^{-1}, \qquad y' = -\frac{\ln 5}{x^2}.$$

### *10.1.5 DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE*

Při řešení předchozích příkladů jsme vystačili s pravidly **1.** až **4.** pro derivace a se znalostmi vzorců **(1)** až **(12)** pro derivace základních elementárních funkcí. S tímto aparátem však nedovedeme derivovat zdaleka všechny funkce. Rozšířit možnosti derivování nám umožňuje následující věta (pravidlo) o derivaci složené funkce:

## VĚTA 1

Má-li funkce $u = g(x)$ derivaci v bodě $x_0$ a má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, potom $y = f(g(x))$ má derivaci v bodě $x_0$ a platí pravidlo derivování složené funkce:

**5.** $y'_{x_0} = \{f(g(x))\}'_{x_0} = f'(u_0)g'(x_0).$

Uvedenou větu lze symbolicky zapsat:

$$y'_x = f'_u \cdot g'_x \qquad \text{resp.} \qquad y'_x = f'_u \cdot u'_x \qquad \text{resp.} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Derivace složené funkce v bodě $x_0$ je tedy součinem dvou hodnot: hodnoty derivace „vnější“ funkce $f(u)$ podle $u$ v bodě $g(x_0)$ a hodnoty derivace „vnitřní“ funkce $g(x)$ podle $x$ v bodě $x_0$.

Ve třech následujících příkladech označíme vnitřní funkci $g(x)$ avšak pouze za účelem snadnějšího pochopení, která funkce je vnitřní a která vnější.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Derivujte funkci $y = \sin(x^4 + 5x^2 + 9), x \in R.$

***Řešení.***

Položíme $u = g(x) = x^4 + 5x^2 + 9, \quad f(u) = \sin u$, potom derivujeme

$$g'(x) = 4x^3 + 10x\,,$$
$$f'(u) = \cos u = \cos(x^4 + 5x^2 + 9)\,.$$

Použitím pravidla **5.** obdržíme postupně:

$$y' = f'(u)g'(x) = \cos u \cdot \left(4x^3 + 10x\right) = \left(4x^3 + 10x\right) \cdot \cos\left(x^4 + 5x^2 + 9\right).$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Derivujte funkci $y$:

**a.** $y = \left(x^2 - 1\right)^5, x \in R.$

Označme $g(x) = x^2 - 1 = u$, potom $f(u) = u^5$, podle pravidla **5.** obdržíme:

$$y' = \left(u^5\right)'\left(x^2 - 1\right)' = 5u^4 2x = 10x\left(x^2 - 1\right)^4.$$

**b.** $y = \sqrt{1 + x^2}, x \in R\,.$

Označme $1 + x^2 = u$, potom

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'\left(1 + x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

**c.** $y = \sin(ax + b), x \in R\,.$

Označme $ax + b = u$, potom

$$y' = (\sin u)' \cdot (ax + b)' = a\cos u = a\cos(ax + b).$$

**d.** $y = \ln\cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$

Označme $\cos x = u$, potom

$$y' = (\ln u)'(\cos x)' = \frac{1}{u}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\, x.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

Derivujte funkci $y = \mathrm{tg}^4\, 2x$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

***Řešení.***

Uvedená funkce vznikla složením tří funkcí. Pravidlo **5.** použijeme dvakrát: budeme derivovat funkci $y = tg^4 u$ jako funkci složenou a výsledek využijeme k výpočtu derivace původní funkce, rovněž jako funkce složené.

Označme $y = z^4$, $z = \mathrm{tg}\, u$, $u = 2x$, potom

$$\frac{dy}{dz} = 4z^3,$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\cos^2 u},$$

$$\frac{du}{dx} = 2,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dz}\frac{dz}{du}\right)\frac{du}{dx} = 4z^3\frac{1}{\cos^2 u}2 = 4\mathrm{tg}^3\, 2x\frac{1}{\cos^2 2x}2 = \frac{8\mathrm{tg}^3\, 2x}{\cos^2 2x} = \frac{8\sin^3 2x}{\cos^5 2x}.$$

V dalších příkladech již nebudeme zavádět nové proměnné a derivaci detailně rozepisovat. Složenou funkci budeme derivovat přímo.

Určení hodnoty derivace v daném bodě provedeme tak, že derivujeme funkci na množině a do výsledku dosadíme za $x$ hodnotu bodu. Definiční obor derivace určujeme obdobně jak definiční obor funkce a značíme $D(y')$:

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 16

Derivujte funkci $y$, určete hodnotu derivace v bodě $x = 0$ a definiční obor funkce $y'$.

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}},\ x < 1.$$

***Řešení.***

Funkci derivujeme jako podíl (pravidlo **4.**), pak výraz upravíme:

$$y' = \frac{(x+1)'\sqrt{1-x} - (1+x)\left(\sqrt{1-x}\right)'}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x} - (x+1)\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{1-x} =$$

$$= \frac{2(1-x) + x + 1}{2(1-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3-x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hodnota derivace funkce $y$ v bodě $x = 0$ je $y'(0) = \dfrac{3-0}{2(1-0)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{2}$.

Definiční obor funkce derivace: ve jmenovateli je druhá odmocnina, tj. argument odmocniny musí být kladný, odtud plyne $D(y') = (-\infty,1)$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 17

Derivujte funkci $y = x\sqrt{x^2+5}$, $x \in R$. Určete definiční obor funkce $y'$.

***Řešení.***

$$y' = \sqrt{x^2+5} + x\frac{1}{2}\left(x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{2x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Definiční obor funkce $y'$ je $D(y') = R$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 18

Derivujte funkci $y = \sin^2\left(3^{x+1}\ln x\right)$, $x > 0$. Určete definiční obor funkce $y'$.

***Řešení.***

Funkci derivujeme jako vícenásobně složenou funkci: $y = z^2$, $z = \sin u$, $u = 3^{x+1}\ln x$; vnitřní funkci pak derivujeme jako součin (pravidlo **3.**) s využitím vzorce **(7)**:

$$y' = 2\sin\left(3^{x+1}\ln x\right)\cdot\left(\sin\left(3^{x+1}\ln x\right)\right)' =$$

$$= 2\sin\left(3^{x+1}\ln x\right)\cdot\cos\left(3^{x+1}\ln x\right)\cdot\left(3^{x+1}\ln x\right)' =$$

(použijeme vzorec $2\sin x\cos x = \sin 2x$)

$$= \sin\left(2\cdot 3^{x+1}\ln x\right)\cdot\left(3^{x+1}\ln 3\ln x + 3^{x+1}\frac{1}{x}\right) = 3^{x+1}\sin\left(2\cdot 3^{x+1}\ln x\right)\cdot\left(\ln 3\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

Definiční obor funkce $y'$ je určen průnikem definičních oborů funkcí $3^{x+1}$ a $\ln x$.

$D(3^{x+1}) = R$, $D(\ln x) = (0,\infty)$, proto $D(y') = (0,\infty)$.

## 10.2 DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Nechť funkce $y = f(x)$ má na množině $M$ první derivaci $y' = f'(x)$.

**Druhou derivací** (nebo také derivací druhého řádu) funkce $f(x)$ na $M$ rozumíme funkci $\left(f'(x)\right)'$, tj. derivaci první derivace funkce.

Druhou derivaci funkce $y = f(x)$ značíme $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $y''$ nebo $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Třetí derivaci funkce $y = f(x)$ na $M$ definujeme jako derivaci druhé derivace a značíme ji $f^{(3)}(x)$ nebo $f'''(x)$, atd.

Nechť funkce $y = f(x)$ má na množině $M$ první derivaci až $(n-1)$-ní derivaci, $n = 2,3\dots$. Pak ***n*-tou derivací** (nebo také derivaci $n$-tého řádu) funkce $f(x)$ na $M$ rozumíme funkci $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ a značíme ji $f^{(n)}(x)$.

Pro derivaci vyšších řádů používáme označení: $f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x),\dots, f^{(n)}(x)$ nebo $y'', y''', y^{(4)},\dots, y^{(n)}$.

Platí zřejmě

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)',$$

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)', \dots, f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 19

Vypočtěte šestou derivaci funkce $y = x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 16x + 15$.

***Řešení.***

Podle definice derivace vyšších řádů postupně vypočítáme:

$y' = 5x^4 - 8x^3 + 8x - 16$,

$$y'' = 20x^3 - 24x^2 + 8,$$

$$y''' = 60x^2 - 48x,$$

$$y^{(4)} = 120x - 48,$$

$$y^{(5)} = 120,$$

$$y^{(6)} = 0.$$

## 10.3 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

## PŘÍKLAD 1

Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

**a.** $y = \sqrt[5]{x^2}$ **b.** $y = \dfrac{1}{x} - x + \ln 5$

**c.** $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}$ **d.** $y = x^3\sqrt{x}$

**e.** $y = (3\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2)$

**f.** $y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$ **g.** $y = \dfrac{3}{(3x-2)}$

**h.** $y = \dfrac{3x^2}{7x^5 - x + 2}$ **i.** $y = 2\dfrac{x+1}{x-1}$

**j.** $y = \left(\dfrac{1}{x} + 4\right)^4$ **k.** $y = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{\frac{13}{4}} + \dfrac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}} + 7^{\frac{3}{2}}$

## PŘÍKLAD 2

Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

**a.** $y=\sqrt{x}-\dfrac{5}{6\sqrt[5]{x^3}}-2\sqrt{x^3}$ **b.** $y=\dfrac{2}{x^3\sqrt{x}}$

**c.** $y=\dfrac{5}{2x^2-5x+1}$ **d.** $y=\dfrac{8x^3}{x^3+x-1}$

**e.** $y=\dfrac{5x^2+x-2}{x^2+7}$ **f.** $y=\dfrac{3}{(1-x^2)}$

**g.** $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$ **h.** $y=(7x^2-\dfrac{4}{x}+6)^6$

**i.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ **j.** $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2+1}$

**k.** $y=\dfrac{5}{\sin^3 2x}$ **l.** $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$

## PŘÍKLAD 3

Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

**a.** $y=e^{3x}$ **b.** $y=e^{\sin x}$

**c.** $y=e^{\cos^2 x}$ **d.** $y=\dfrac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$

**e.** $y=2\cdot 7^x-1$ **f.** $y=5\ln 10x$

**g.** $y=3\ln\dfrac{5}{x-2}$ **h.** $y=2\ln\dfrac{3}{x+\sqrt{x^2-4}}$

**i.** $y=\ln\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$ **j.** $y=\arcsin\sqrt{x^3}$

**k.** $y=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ **l.** $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$

## PŘÍKLAD 4

Vypočtěte první derivaci dané funkce a určete $D(y')$

**a.** $y=(10x^2-1)e^{3x}$ **b.** $y=3^x x^3$

**c.** $y=5\cdot 10^{3x}$ **d.** $y=\ln\dfrac{30}{x+3}$

**e.** $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ **f.** $y=\ln\left|\ln|x|\right|$

**g.** $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ **h.** $y=e^x\sqrt{1+x^2}$

**i.** $y = e^{\frac{x}{x+1}}$ **j.** $y = x^2 e^{-x^2}$

**k.** $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **l.** $y = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

## PŘÍKLAD 5

Vypočtěte druhou derivaci dané funkce.

**a.** $y = \operatorname{arctg} 2x$

**b.** $y = \ln\left(1+x^2\right)$

**c.** $y = xe^{\sin x}$

## PŘÍKLAD 6

Vypočtěte hodnotu druhé derivace dané funkce v daném bodě.

**a.** $y = \arcsin x$ v bodě $x = 0$

**b.** $y = \operatorname{tg}^2 x$ v bodě $x = 0$

**c.** $y = x(\ln x - 1)$ v bodě $x = 1$

## 10.4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)

**a.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}}$ **b.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{-1}{x^2} - 1$

**c.** $x \neq 0;\ y' = -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **d.** $x \geq 0;\ y' = \dfrac{7}{2}\sqrt{x^5}$

**e.** $y' = -3x^2 + 24 + \dfrac{14}{3}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{3}}$ **f.** $x \geq 0;\ y' = 24x^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

**g.** $x \neq \dfrac{2}{3};\ y' = -\dfrac{9}{(3x-2)^2}$

**h.** $7x^5 - x + 2 \neq 0;\ y' = \dfrac{-3x(21x^5 + x - 4)}{(7x^5 - x + 2)^2}$ **i.** $x \neq 1;\ y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

**j.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{-4}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + 4\right)^3$ **k.** $x > 0;\ y' = 7x^{\frac{4}{3}} - 13x^{\frac{9}{4}} - \dfrac{2}{7}x^{-\frac{3}{2}}$

2)

**a.** $x > 0;\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt[5]{x^8}} - 3\sqrt{x}$ **b.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{-7}{\sqrt{x^9}}$

**c.** $2x^2 - 5x + 1 \neq 0;\ y' = \dfrac{-20x + 25}{(2x^2 - 5x + 1)^2}$ **d.** $x^3 + x - 1 \neq 0;\ y' = \dfrac{8x^2(2x-3)}{(x^3 + x - 1)^2}$

**e.** $y' = \dfrac{-x^2 + 74x + 7}{(x^2+7)^2}$ **f.** $x \neq \pm 1;\ y' = \dfrac{6x}{(1-x^2)^2}$

**g.** $x > 0;\ y' = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$ **h.** $x \neq 0;\ y' = 6(14x + \dfrac{4}{x^2})(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6)^5$

**i.** $x > 1;\ y' = -\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^7}$ **j.** $x > 0;\ y' = \dfrac{3\left(1-3x^2\right)}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}$

**k.** $\sin 2x \neq 0; y' = -30\cos 2x \sin^{-4} 2x$

**l.** $\sin 2x \neq -1;\ \ y' = \dfrac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x}$

3)

**a.** $y' = 3e^{3x}$ **b.** $y' = e^{\sin x}\cos x$

**c.** $y' = -e^{\cos^2 x}\sin 2x$ **d.** $x > 0;\ y' = \dfrac{4x^2+1}{4x\sqrt{x}}e^x$

**e.** $y' = 2\cdot 7^x \ln 7$ **f.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{5}{x}$

**g.** $x \neq 2;\ y' = \dfrac{-3}{x-2}$ **h.** $|x| < 2;\ y' = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2-4}}$

**i.** $x \neq (2k+1)\pi,\ y' = -\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ **j.** $0 < x < 1;\ \mathrm{y}' = \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x^3}}$

**k.** $-1 \langle\ x\ \langle\ 1;\ y' = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ **l.** $y' = e^{3x}(30x^2 + 20x - 3)$

4)

**a.** $y' = 3^x x^2(x\ln 3 + 3)$ **b.** $y' = 15\cdot 10^{3x}\ln 10$

**c.** $x \neq -3;\ y' = -\dfrac{1}{x+3}$ **d.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

**e.** $x \neq \pm 1;\ y' = \dfrac{1}{1-x^2}$ **f.** $x \neq 0;\ x \neq 1;\ y' = \dfrac{1}{x\ln|x|}$

**g.** $\cos x \neq 0;\ y' = \dfrac{1}{\cos x}$ **h.** $y' = e^x\dfrac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

**i.** $x \neq -1,\ y' = e^{\frac{x}{1+x}}\dfrac{1}{(1+x)^2}$ **j.** $y' = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

**k.** $x \neq 0;\ y' = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ **l.** $y' = \dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

5)

**a.** $y'' = \dfrac{-16x}{\left(1+4x^2\right)^2}$ **b.** $y'' = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$ **c.** $y'' = e^{\sin x}\left(2\cos x + x\cos^2 x - x\sin x\right)$

6)

**a.** $y''(0) = -0{,}5$ **b.** $y''(0) = 2$ **c.** $y''(1) = 1$

# 11 UŽITÍ DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

Kapitola je rozdělena na čtyři části. První část se zabývá L´Hospitalovým pravidlem, které se používá při výpočtu limit funkce. Druhá část je věnována diferenciálu funkce, ve třetí části se seznámíme s Taylorovým polynomem a v poslední části budeme vyšetřovat průběh funkce.

## 11.1 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je velmi účinným nástrojem při výpočtu limit funkcí v bodech, kde tyto funkce nejsou definovány, tj. v případě, že při výpočtu limit dospějeme k neurčitým výrazům typu:

$$\infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty^{0},\ 0^{0},\ 1^{\infty}.$$

Všechny neurčité výrazy lze převést na tvar $\frac{0}{0}$ popř. $\frac{\infty}{\infty}$. Pro limitu těchto dvou výrazů platí velmi praktická matematická věta, tzv. **L'Hospitalovo pravidlo**.

### VĚTA 1

Předpoklady:

**1.** Funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace v okolí bodu $c\in R$, kde je $g(x)\neq 0$.

**2.** $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ nebo
$\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=\lim\limits_{x\to c}|g(x)|=\infty$.

**3.** Existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tvrzení:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

Analogické věty platí i pro limitu zprava a zleva a taktéž pro případ, že bod $c$ je nevlastním bodem $+\infty$ nebo $-\infty$.

### 11.1.1 *Limity typu* $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x3^{x}}{2^{x}-1}$.

***Řešení.***

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot 3^x = f(0) = 0$ a také $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2^x - 1 = g(0) = 0$,

proto nemůžeme použít vztah $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}$, ale použijeme vztah (1).

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x + x3^x \ln 3}{2^x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

V dalších příkladech za jednotlivými výrazy bude v závorce uveden limitní typ.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}}{\ln \dfrac{x-1}{x+1}}$.

***Řešení.***

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}}{\ln \dfrac{x-1}{x+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}\dfrac{2}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2\left(x^2+1\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) == \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{2}{x^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

***Řešení.***

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-1}}{\sin^{-2} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \;= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x \cos x}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

## VĚTA 2

Když je $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ také typu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$ a funkce $f'(x)$, $g'(x)$ splňují předpoklady L'Hospitalova pravidla, potom platí:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Analogicky:

Pokud je $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ rovněž typu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$, funkce $f''(x)$ a $g''(x)$ splňují předpoklady L'Hospitalova pravidla, potom platí:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 4x}$.

***Řešení.***

Vztah (1) použijeme dvakrát:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{8\sin 4x\cos 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{4\sin 8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{32\cos 8x}=\frac{9}{32}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-x^2-2x-2}$.

***Řešení.***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-x^2-2x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2\cos x}{2e^x-2x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+2\sin x}{2e^x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+2\cos x}{2e^x}=-3.$$

### *11.1.2 Limity typu* $0 \cdot \infty$

Pokud je $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, potom $\lim\limits_{x \to c} \left[ f(x) g(x) \right]$ vypočítáme tak, že výraz $f(x)g(x)$ upravíme na tvar $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ nebo $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, čímž obdržíme typ $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Zvolíme způsob, který vyžaduje jednodušší derivování.

## **ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6**

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left( x - \dfrac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x$.

***Řešení.***

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = -1.$$

## **ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7**

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x$.

***Řešení.***

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - \sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left( \cos x \sin^2 x \right) = 0.$$

### 11.1.3 LIMITY TYPU $\infty - \infty$

V případě, že je $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, potom $\lim\limits_{x \to c}\left[f(x) - g(x)\right]$ vypočítáme tak, že výraz $f(x) - g(x)$ upravíme na podíl dvou funkcí, čímž danou limitu převedeme na typ $\dfrac{0}{0}$.

Úpravu provedeme následující postupem:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}. \qquad (2)$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

***Řešení.***

Nejprve funkci upravíme podle vztahu (2) a poté použijeme (1):

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\lim_{x \to 1}\frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

***Řešení.***

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0^+}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

### *11.1.4 Limity typu* $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}$

Pomocí známého vztahu:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \text{ pro } f(x) > 0 \qquad (3)$$

můžeme nevlastní limitu $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ upravit na jeden z typů limit, které jsme se již naučili v předešlých odstavcích řešit.

Ověřte si platnost vztahu (3) tím, že obě strany zlogaritmujete.

Platí $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

Vypočtěte $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

***Řešení.***
Upravte nejprve pomocí (3):

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^L.$$

Limitu L vypočítejte nejprve úpravou a pak použitím (1):

$$L = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Tedy $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^L = e^0 = 1$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

***Řešení.***

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^L. \quad L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Tedy $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^L = e^1 = e$.

## 11.2 DIFERENCIÁL FUNKCE

Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě $x$ derivaci $f'(x)$. Potom diference (přírůstek) $\Delta y$ funkce $f(x)$ v bodě $x$ odpovídající diferenci $\Delta x$ proměnné $x$ se definuje takto:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

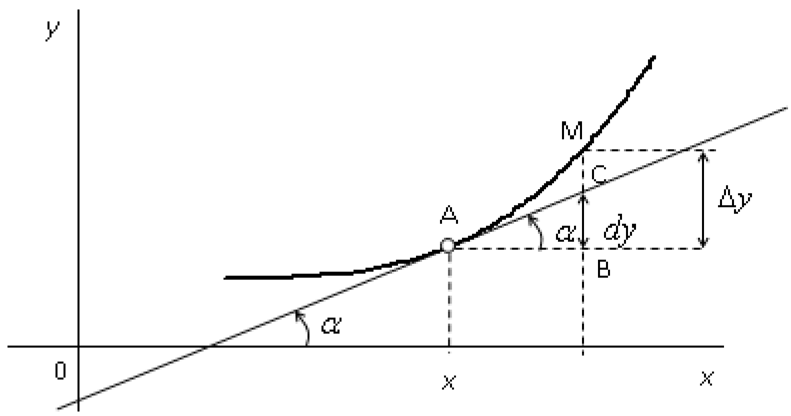
Lineární funkci $f'(x)\Delta x$ (proměnné $\Delta x$) nazýváme **diferenciálem funkce** $f(x)$ v bodě $x$ pro přírůstek $\Delta x$ a označujeme ji: $dy = f'(x)\Delta x.$ (4)

Místo $\Delta x$ píšeme také $dx$. Pro diferenciál funkce $f(x)$ v bodě $x$ pro přírůstek $\Delta x$ můžeme použít zápisy:

$$df(x) = f'(x)\Delta x, \quad dy = f'(x)dx, \quad df(x) = f'(x)dx.$$

**Grafické znázornění diferenciálu**:
Diferenciál funkce je přírůstek funkce měřený na tečně (Obr. 11-1), namísto skutečného přírůstku funkce $\Delta y = BM$. Je to vzdálenost bodů $BC$.

**Obr. 11-1: Diferenciál $dy$ a diference $\Delta y$ funkce**



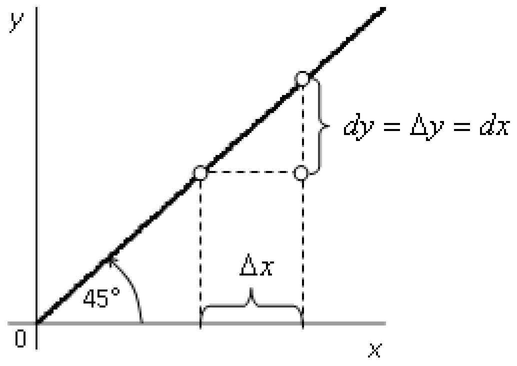

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

Stanovte diferenciál funkce $y = x$.

***Řešení.***

Funkce $y = x$ má derivaci $y' = 1$ a její diferenciál je proto $dy = dx = \Delta x,$ viz Obr. 11-2.

**Obr. 11-2: Diferenciál funkce** $y = x$




## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

Vypočtěte diferenciál funkce $y = \operatorname{arctg} 3x$ a určete jeho hodnotu pro $x = \frac{1}{3}$, $dx = 0{,}2$.

***Řešení.***

Podle (4) obdržíme $dy = d(\operatorname{arctg} 3x) = \frac{3}{1+9x^2}dx$. Jde o funkci o proměnných *x* a *dx*.

Hodnota diferenciálu v daném bodě a pro dané *dx* je reálné číslo *k*:

$$k = \frac{3}{1+9\frac{1}{9}}0{,}2 = 0{,}3.$$

Je-li $x = \frac{1}{3}$ a *dx* proměnná, pak diferenciál funkce *y* v tomto bodě je $dy = 1{,}5dx$.

Vidíte, že diferenciál funkce v bodě je lineární funkcí proměnné *dx*.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

Vypočtěte přibližnou hodnotu přírůstku funkce $y = x^3 - 5x + 50$ při změně argumentu *x* z hodnoty $x = 4$ na hodnotu $x = 4{,}001$.

***Řešení.***

Pro $x = 4$ diferenciál argumentu je: $dx = 4{,}001 - 4 = 0{,}001$.

Potom podle (4) diferenciál funkce je: $dy = y'dx = (3x^2 - 5)dx$.

V bodě $x = 4$ obdržíme $dy = 43dx$.

Pro $dx = 0{,}001$ je hodnota diferenciálu $k = 43 \cdot 0{,}001 = 0{,}043$.

Tato hodnota *k* vyjadřuje požadovaný přibližný přírůstek.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

Určete přírůstek $\Delta y$ a diferenciál $dy$ funkce

$f(x) = x^2 + 5x$ v bodě $x = 2$ pro přírůstek $\Delta x = 0{,}001$.

***Řešení.***

$$\Delta y = f(2+0{,}001) - f(2) =$$
$$= (2+0{,}001)^2 + 5(2+0{,}001) - 2^2 - 5\cdot 2 = 0{,}009001,$$
$$dy = f'(2)\cdot 0{,}001 = (2^2+5)0{,}001 = 0{,}009\,.$$

## 11.3 TAYLORŮV POLYNOM

Diferenciál funkce je nejjednodušším přibližným vyjádřením funkce $y = f(x)$. Nahrazuje tuto funkci v blízkosti daného bodu tečnou, tj. polynomem prvního stupně.

Taylorovy a Maclaurinovy věty používáme buď k výpočtu funkčních hodnot v okolí bodu *a* (resp. bodu 0), přičemž chceme danou funkci nahradit v okolí tohoto bodu polynomem. Protože u mnoha funkcí známe funkční hodnotu v počátku, tj. v bodě 0 a dovedeme zde snadno vypočítat též hodnoty derivací, používá se prakticky nejčastěji vzorec (7), viz dále.

## VĚTA 3 - TAYLOROVA VĚTA

Nechť funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu obsahujícím bod *a* derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{5}$$

$R_n(x)$ je tzv. Taylorův zbytek funkce *f*, pro který platí $\lim\limits_{x\to a} R_n(x) = 0$.

## DEFINICE 1

Polynom

$$T_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{6}$$

nazýváme **Taylorův polynom** funkce $f(x)$ v bodě *a*, v případě, že $n \to \infty$, hovoříme o Taylorově řadě.

**Poznámka.** Nebudeme se zabývat zbytkem Taylorova polynomu. Hodnotu funkce $f(x)$ nahradíme přibližně hodnotou získanou jako součet prvních *n* členů Taylorova polynomu.

## DEFINICE 2

Zvolíme-li v Taylorově polynomu $a = 0$, dostaneme tzv. **Maclaurinův polynom**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ \dots \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \tag{7}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 16

Určete Maclaurinův polynom pro funkci $f(x) = e^x$ a použitím prvních devíti členů rozvoje určete přibližnou hodnotu čísla *e*.

***Řešení.***

Pro funkci $f(x) = e^x$ platí $f^{(n)}(x) = e^x$. Potom také $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce (7) obdržíme vztah:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ \dots \ + \frac{x^8}{8!} .$$

Dosadíme-li do tohoto polynomu za $x = 1$, platí

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 1 + 1 + 0,5 + 0,166666 +$$
$$+0,041666 + 0,008333 + 0,001388 + 0,000198 + 0,000024 = 2,718275.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 17

Určete Maclaurinovy polynomy $T_1(f,0,x)$, $T_3(f,0,x)$ a $T_5(f,0,x)$ pro funkci $f(x) = \sin x$.

***Řešení.***

Maclaurinovy polynomy pro funkci $f(x) = \sin x$ určíme na základě vztahu (7). Dostáváme

$$T_1(\sin x, 0, x) = x,$$

$$T_2(\sin x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$T_5(\sin x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 18

Určete Taylorův polynom $T_n(f,a,x)$ funkce $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

***Řešení.***

Nejprve určíme derivace dané funkce do $n$-tého řádu v bodě $a$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x}, & f(a) &= \frac{1}{1+a},\\
f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f'(a) &= \frac{-1}{(1+a)^2},\\
f''(x) &= \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, & f''(a) &= \frac{1\cdot 2}{(1+a)^3},\\
f'''(x) &= \frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, & f'''(a) &= \frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+a)^4},\\
&\;\;\ldots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, & f^{(n)}(a) &= (-1)^n\frac{n!}{(1+a)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Získané hodnoty pak dosadíme do vzorce (6):

$$
\begin{aligned}
T_n &= \left(\frac{1}{1+x},a,x\right) = \frac{1}{1+a} - \frac{x-a}{(1+a)^2} + \frac{2!}{(1+a)^3}\frac{(x-a)^2}{2!} -\\
&- \frac{3!}{(1+a)^4}\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{n!}{(1+a)^{n+1}}\frac{(x-a)^n}{n!} =\\
&= \frac{1}{1+a} - \frac{x-a}{(1+a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1+a)^3} - \frac{(x-a)^3}{(1+a)^4} + \ldots + (-1)^n\frac{(x-a)^n}{(1+a)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

## 11.4 PRŮBĚH FUNKCE

Vyšetření průběhu funkce vyžaduje znalost všech předchozích kapitol matematické analýzy. Výklad v této kapitole je omezen na vyšetřování průběhů algebraických funkcí.

### *11.4.1 MONOTÓNNOST FUNKCE*

V teorii funkcí jsme definovali monotónnost funkce. Zjišťování monotónnosti funkce na daném intervalu pomocí dříve uvedených definicí je často neefektivní, proto tuto vlastnost funkce $f(x)$ v intervalu $J=(a,b)$ vyšetřujeme pomocí derivace funkce. Platí následující věta.

## VĚTA 4

Jestliže pro všechna *x* z intervalu $J=(a,b)$ je splněna nerovnost

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0, \\ f'(x)<0, \\ f'(x)\geq 0, \\ f'(x)\leq 0, \end{array}\right\} \text{ potom funkce } f \text{ je v tomto intervalu } \left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array}\right.$$

Vyřešením uvedených nerovnic určíme intervaly monotónnosti funkce $f(x)$ v intervalu $J\subset D(f)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 19

Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x)=x^3+6x^2-15x,\ x\in R$.

***Řešení.***

Zjistíme nejprve intervaly, v nichž platí $f'(x)>0$ a $f'(x)<0$.

$$f'(x)=3x^2+12x-15>0 \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,-5)\cup(1,\infty),$$

$$f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad x\in(-5,1)\,.$$

Podle věty 4 je funkce rostoucí v intervalu $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$ a klesající v intervalu $(-5,1)$. Funkce je spojitá v *R*, takže v bodě $x=-5$ musí mít lokální maximum, tzn., že v nějakém okolí bodu $x=-5$, tj. intervalu obsahující bod $x=-5$, je hodnota $f(-5)$ maximální ze všech hodnot, jež funkce nabývá na tomto intervalu. Analogicky v bodě *x* = 1 musí funkce mít lokální minimum. V případě této kubické funkce, na základě znalosti průběhu elementárních funkcí, stanovíme charakter grafu. Obecně výpočet extrému nemusí být tak jednoduchý. Proto pro jejich určení používáme postup uvedený v následujícím odstavci.

### *11.4.2 Lokální extrémy funkcí*

## DEFINICE 3

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou v bodě $x_0$ a jeho jistém okolí. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ **lokální minimum**, právě když existuje takové okolí $J\subset D(f)$ bodu $x_0$, že pro všechna $x\in J$ platí $f(x)\geq f(x_0)$.

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ **lokální maximum**, právě když existuje takové okolí $J\subset D(f)$ bodu $x_0$, že pro všechna $x\in J$ platí $f(x)\leq f(x_0)$.

Souhrnně se lokální minima a lokální maxima nazývají **lokální extrémy funkce.**

Dále budeme vyšetřovat, za jakých podmínek nastává v určitém bodě $x_0$ lokální extrém.

## DEFINICE 4

Bod $x_0$, ve kterém je $f'(x_0)=0$, se nazývá **stacionární bod funkce** $f(x)$.

## VĚTA 5

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ obě derivace $f'(x_0), f''(x_0)$ a nechť $x_0$ je stacionární bod, tj. $f'(x_0)=0$. Pak funkce $f(x)$ v bodě $x_0$:

- **a.** má lokální maximum, je-li $f''(x_0)<0$,
- **b.** má lokální minimum, je-li $f''(x_0)>0$.

Jestliže však $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, pak funkce $f(x)$ může mít (ale i nemusí) v bodě $x_0$ lokální extrém.

Např. u funkcí $f(x)=x^3, g(x)=x^4$ platí pro $x_0=0$ v obou případech $f'(0)=g'(0)=f''(0)=g''(0)=0$ a přitom funkce $g(x)=x^4$ má v bodě $x_0=0$ lokální minimum, kdežto funkce $f(x)=x^3$ v tomto bodě nemá extrém, neboť je rostoucí v celém definičním oboru. Nakreslete si tyto funkce!

Nyní nás zajímá, jak postupovat, když ve stacionárním bodě $x_0$ druhá derivace je nulová.

## VĚTA 6

Nechť funkce $f(x)$ má na okolí bodu $x_0$ spojitou derivaci řádu $n\geq 3$, přičemž platí

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)=B\neq 0.$$

Je-li číslo *n* liché, nemá $f(x)$ v bodě $x_0$ lokální extrém. Je-li však číslo *n* sudé, má $f(x)$ v bodě $x_0$:

- **a.** lokální maximum při $B<0$,
- **b.** lokální minimum při $B>0$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 20

Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5$.

***Řešení.***

Vypočteme derivace

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3),$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x.$$

Protože daná funkce $f(x)$ má všude v $R$ derivaci, může mít $f(x)$ lokální extrém jen ve stacionárních bodech, pro něž je $f'(x) = 0$.
Proto řešíme rovnici

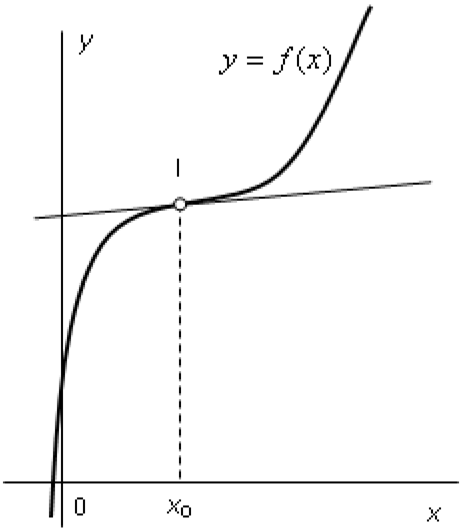
$$5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

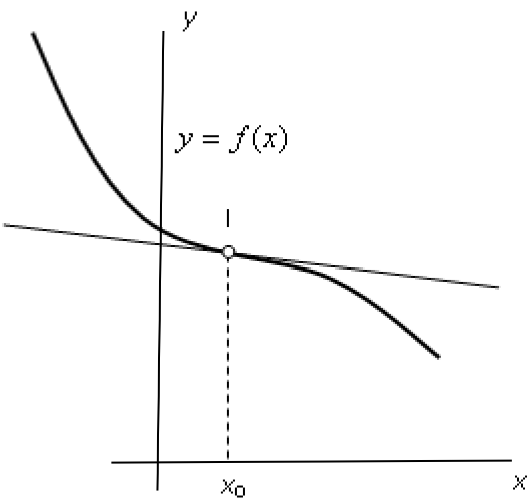
Dostaneme stacionární body $x_{1,2} = 0, x_3 = 1, x_4 = 3$.
Dále platí $f''(0) = 0, f''(1) = -10, f''(3) = 90$.
Podle věty 4. má $f(x)$ v bodě $x_3 = 1$ lokální maximum a v bodě $x_4 = 3$ lokální minimum.
Zbývá rozhodnout pomocí věty 5. o situaci v bodě $x_1 = 0$.
Protože $f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$, $f'''(0) = 30 = B$, nemá $f(x)$ extrém ve stacionárním bodě $x_1 = 0$.

### 11.4.3 INFLEXNÍ BODY FUNKCE

Inflexní bod funkce je bod v němž - znázorněno geometricky - graf funkce přechází z jedné strany své tečny na druhou. Je to na Obr. 11-3 bod I, v němž se funkce $f(x)$ mění z funkce konvexní na konkávní nebo obráceně. Říkáme také, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ **inflexi**.

**Obr. 11-3: Inflexní bod funkce**



Nyní nás bude zajímat, za jakých podmínek je bod $x_0$ **inflexním bodem**.

## VĚTA 7

Je-li $x_0$ inflexním bodem funkce $f(x)$ a existuje-li druhá derivace $f''(x_0)$, potom platí : $f''(x_0) = 0$.

## VĚTA 8

Je-li $f''(x_0) = 0$ a mění-li $f''(x)$ při přechodu přes bod $x_0$ znaménko, pak má funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ inflexi.

## VĚTA 9

Je-li $f''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = A \neq 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ inflexi.

Tzn. má-li funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ nulové všechny derivace počínaje druhou až do určité derivace sudého řádů (včetně), potom $x_0$ je inflexním bodem funkce $f(x)$, pokud bezprostředně následující derivace lichého řádu je nenulová.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 21

Určete inflexní body a intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ konvexní nebo konkávní.

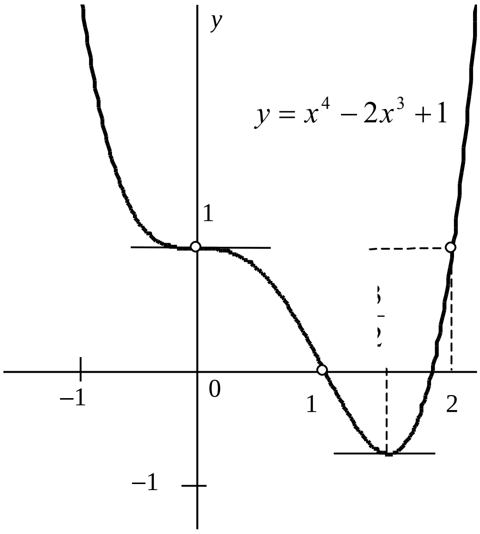
***Řešení.***

**1.** Určení inflexních bodů:
Nejprve vypočteme derivace

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1),$$
$$f'''(x) = 24x - 12.$$

Dále řešíme rovnici $f''(x) = 12x(x-1) = 0$.
Řešením dostaneme $x$-ové souřadnice bodů, ve kterých může existovat inflexe: $x_1 = 0, x_2 = 1$.
V těchto bodech určíme hodnotu třetí derivace: $f'''(0) = -12,\ f'''(1) = 12$.
V obou případech jsou třetí derivace nenulové, proto body $I_1[0,1], I_2[1,0]$ jsou inflexními body (Obr. 11-4).

**Obr. 11-4: Inflexní body funkce**




**2.** Určení intervalů, na nichž je daná křivka konvexní nebo konkávní:
Nejprve řešíme nerovnice $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$.

**a.** $f''(x) = 12x(x-1) > 0.$

Funkce je konvexní v intervalu $(-\infty,0)$ a také v intervalu $(1,\infty)$.

**b.** $f''(x) = 12x(x-1) < 0$ .

Funkce je konkávní pro $(0,1)$.

### *11.4.4 Konvexnost a konkávnost funkce*

Obdobně jako monotónnost funkce, tak i konvexnost a konkávnost jsme definovali v kapitole věnované funkcím. Prakticky ji ovšem budeme vyšetřovat v závislosti na znaménku druhé derivace funkce podle níže uvedené věty.

## VĚTA 10

Jestliže v intervalu $J = (a,b)$ platí nerovnost:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, \\ f''(x) < 0, \end{array}\right\} \text{ pak funkce } f \text{ je v tomto intervalu } \left\{\begin{array}{l} \text{konvexní,} \\ \text{konkávní.} \end{array}\right.$$

Řešením uvedených nerovnic určíme intervaly, na kterých funkce je konvexní nebo konkávní.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 22

Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ konvexní nebo konkávní.

***Řešení.***
Vypočteme nejprve druhou derivaci funkce a pak vyřešíme příslušné nerovnice:

$$f''(x) = 6x + 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2,$$
$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalu $(-2, \infty)$ a konkávní v intervalu $(-\infty, -2)$.

### *11.4.5 POSTUP PŘI VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE*

Cílem je sestrojení grafu funkce. Nejdříve zjistíte následující údaje:

**1.** definiční obor funkce a body nespojitosti funkce,
**2.** sudost či lichost funkce,
**3.** průsečíky se souřadnicovými osami,
**4.** intervaly monotónnosti funkce a lokální extrémy,
**5.** intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce a inflexní body,
**6.** asymptoty grafu funkce.

V následujících řešených příkladech budeme používat toto označení význačných bodů v grafu funkce:

- průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami: $\mathrm{X}[x,0]$, $\mathrm{Y}[0,y]$,
- lokální maximum, resp. lokální minimum funkce $\overline{\mathrm{V}}[x,y]$, $\underline{\mathrm{V}}[x,y]$,
- inflexní bod $\mathrm{I}[x,y]$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 23

Vyšetřete průběh $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3$.

***Řešení.***

**1.** $D(f) = R$, funkce nemá body nespojitosti, neboť je součtem dvou spojitých funkcí v *R*.

**2.** Sudost, lichost funkce: $f(-x) = \dfrac{(-x)^4}{4} + (-x)^3 = \dfrac{x^4}{4} - x^3$.

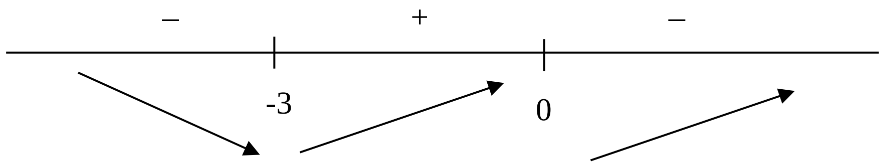
Protože $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, není funkce sudá ani lichá.

**3.** Průsečíky grafu funkce s osou $x$ nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$, tj. $\dfrac{x^4}{4} + x^3 = 0$.

Hledané kořeny této rovnice jsou $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, proto $\mathrm{X}_1[0,0]$, $\mathrm{X}_2[-4,0]$.
Průsečíky s osou $y$ (tj. pro $x = 0$): $\mathrm{Y}[0,0] = \mathrm{X}_1[0,0]$, tj. graf prochází počátkem souřadnic souřadnicového systému.

**4.** Intervaly monotónnosti funkce a její lokální extrémy zjistíme na základě 1. derivace funkce: $f'(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$ .
Nulové body funkce $f'(x)$ vyneseme na číselnou osu. Ve vzniklých intervalech zjistíme její kladnost či zápornost a šipkami znázorníme, zda daná funkce je v příslušném intervalu rostoucí nebo klesající.

Stacionární body: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -3.$




Funkce $f(x)$ má v bodě $x = -3$ lokální minimum, bod $x = 0$ je bodem inflexním (obojí potvrdíme pomocí druhé derivace funkce).

**5.** Určíme inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce:

$$f''(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)\ .$$

Potvrzení lokálního maxima v bodě $x = -3$:

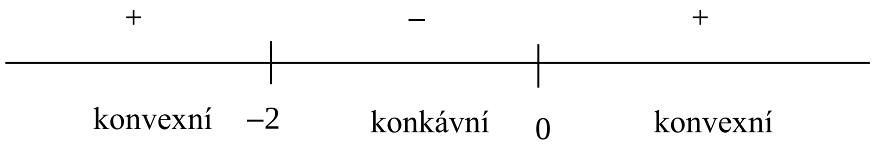
$$f''(-3) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{V}}\left[-3, -\frac{27}{4}\right].$$

Inflexní body jsou nulové body druhé derivace funkce:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2 \ \Rightarrow\ \mathrm{I}_1[0,0], \mathrm{I}_2[-2,-4].$$

Mezi těmito dvěma inflexními body je však rozdíl. V bodě $\mathrm{I}_1$ (tedy pro $x = 0$) je $f'(x) = 0$, tzn., že tečna v tomto bodě má směrnici $k = 0$, což znamená, že je rovnoběžná s osou $x$. V bodě $\mathrm{I}_2\,(x = -2)$ je $f'(x) = 4 > 0$, tzn. , že směrnice tečny $k = 4 > 0$, tedy tečna je šikmá (rostoucí).

Nyní nulové body 2. derivace opět vyneseme na číselnou osu a ve vzniklých intervalech vyznačíme její kladnost či zápornost a na podkladě toho zapíšeme, ve kterém intervalu je zadaná funkce konvexní či konkávní:




**6.** Asymptoty

**a.** Rovnoběžné s osou *y*
Tyto asymptoty neexistuje, protože zadaná funkce nemá body nespojitosti.

**b.** Šikmé asymptoty

Rovnice asymptoty je $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} \left( f(x) - kx \right),$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(x+4)}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{4}{x}\right)}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{4}{x}\right)}{4} = \pm\infty .$$

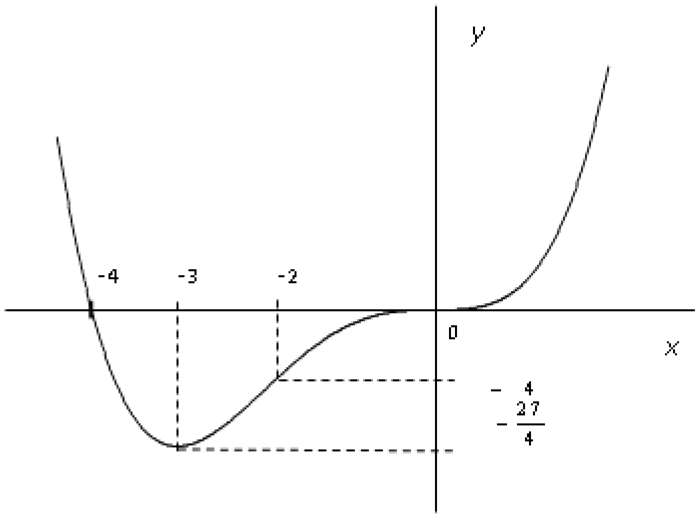
Protože $k$ není reálné číslo, rovněž tato asymptota neexistuje.

**c.** Rovnoběžné s osou $x$

Jelikož $k \neq 0$ vodorovná asymptota neexistuje.

Na základě výše určených údajů sestrojíte již snadno graf zadané funkce, viz Obr. 11-5.

**Obr. 11-5: Graf funkce**




## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 24

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ .

***Řešení.***

**1.** $D(f) = R$, body nespojitosti neexistují.

**2.** $f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Funkce je lichá, její graf je symetrický podle počátku souřadnicového systému.

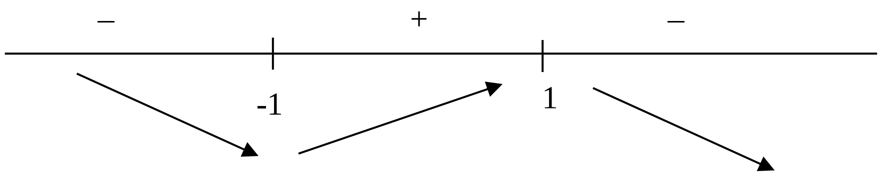
**3.** $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}=0 \Rightarrow x=0$.

Existuje jediný průsečík s osou *x* a *y*, a to $[0,0]$.

**4.** $f'(x)=\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Stacionární body: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$.

Monotónnost funkce a lokální extrémy:




**5.** $f''(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=$

$$=\frac{2x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(1+x^2)^3}.$$

Lokální extrém:

$$f''(-1)=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \underline{V}\left[-1,-\frac{1}{2}\right],$$

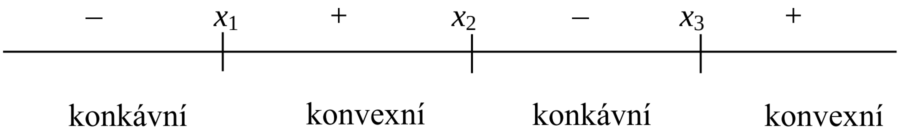
$$f''(1)=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow \overline{V}\left[1,\frac{1}{2}\right].$$

Inflexní body:

$$f''(x)=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{3}, x_2=0, x_3=\sqrt{3} \quad \text{potom}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right],\ \mathrm{I}_2[0,0],\ \mathrm{I}_3\left[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

Konvexnost a konkávnost funkce:




**6.** Asymptoty

**a.** Rovnoběžné s osou *y* neexistují, protože funkce nemá body nespojitosti.

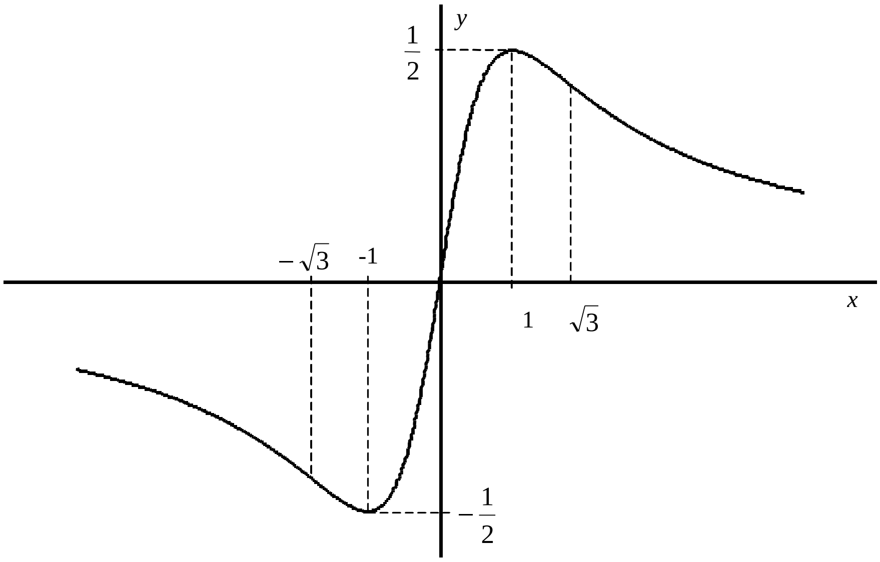
**b.** Šikmé ( $y = kx + q$ ): $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left( \frac{x}{1+x^2} - 0 \cdot x \right) = 0 .$$

Funkce má vodorovnou asymptotu o rovnicí $y = 0$.

Graf funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ ,viz Obr. 11- 6.

**Obr. 11-6: Graf funkce**




## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 25

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{5(x-2)}{x^2}$ .

***Řešení.***

**1.** $x \neq 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ .

Bod $x = 0$ je bodem nespojitosti funkce (graf bude tvořen dvěma samostatnými křivkami oddělenými svislou asymptotou v bodě $x = 0$ ).

**2.** $f(-x) = \dfrac{5(-x-2)}{(-x)^2} = \dfrac{-5(x+2)}{x^2}$ .

$f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ funkce není ani sudá ani lichá.

**3.** $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{5(x-2)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$.

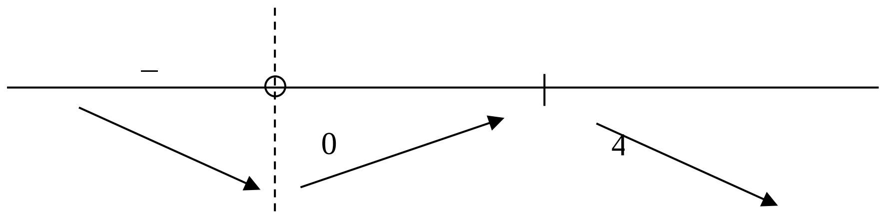
Průsečík s osou $x$: $\mathrm{X}[2,0]$.

Průsečík s osou $y$, tj. $\mathrm{Y}[0,y]$, neexistuje, protože $x \neq 0$.

**4.** $f'(x) = \dfrac{5\left(x^2-(x-2)2x\right)}{x^4} = \dfrac{5(4-x)}{x^3}$.

Stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$.

Monotónnost funkce a lokální extrémy:

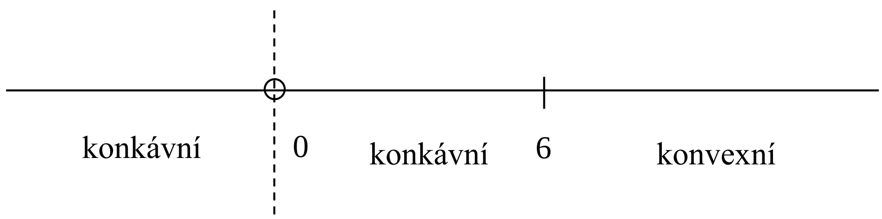



**5.** $f''(x) = \dfrac{5\left(-x^3-(4-x)3x^2\right)}{x^6} = \dfrac{5\cdot 2(x-6)}{x^4}$.

Lokální maximum: $f''(4) = -\dfrac{5}{64} < 0 \Rightarrow \overline{\mathrm{V}}\left[4, \dfrac{5}{8}\right]$.

Inflexní bod : $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \mathrm{I}\left[6, \dfrac{5}{9}\right]$.

Konvexnost a konkávnost funkce:




**6.** Asymptoty

**a.** Rovnoběžné s osou $y$: protože bod $x = 0$ je bodem nespojitosti funkce, je přímka $x = 0$ svislou asymptotou dané funkce a nutno zjistit jednostranné limity funkce v tomto bodě:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{5(x-2)}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5(x-2)}{x^2} = -\infty.$$

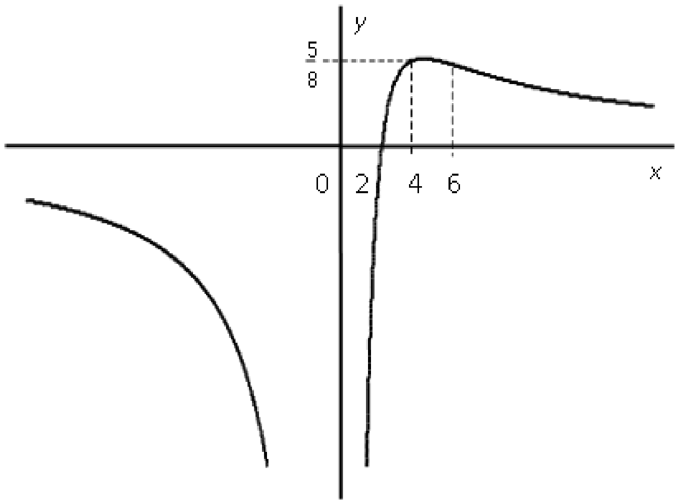
**b.** Šikmé $(y = kx + q)$: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{5(x-2)}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5(x-2)}{x^3} = 0$,

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5(x-2)}{x^2} - 0\cdot x\right) = 0.$$

Funkce má vodorovnou asymptotu o rovnici $y = 0$.

Graf funkce $f(x) = \dfrac{5(x-2)}{x^2}$, viz Obr. 11-7.

**Obr. 11-7: Graf funkce**




## 11.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Použitím L'Hospitalova pravidla vypočtěte limity:

**a.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2-3x+1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$

**c.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin 2x}$ **d.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$

**e.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$ **f.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$

**g.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}, a>0, b>0$ **h.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$

**i.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi-x}-e^{\sin x}}{\pi-x-\sin x}$ **j.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x-1}$

**k.** $\lim\limits_{x\to a}(\arcsin(x-a)\operatorname{cotg}(x-a))$ **l.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

**m.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left((\pi - 2x)\operatorname{tg} x\right)$ **n.** $\lim\limits_{x \to 1^+} \left((1-x)\ln(1-x)\right)$

**o.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left((\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x\right)$ **p.** $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

**q.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ **r.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$

## PŘÍKLAD 2

Vypočtěte diferenciál *dy* v daném bodě pro zadané *dx*:

**a.** $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ v bodě $x = \dfrac{\pi}{3}$ pro $dx = 0{,}01$

**b.** $y = \sin 3x$ v bodě $x = \dfrac{\pi}{6}$ pro $dx = \dfrac{\pi}{360}$

**c.** $y = 3x^2$, $x = 1$, $dx = 0{,}1$

**d.** $y = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$, $x = 0$, $dx = 0{,}2$

## PŘÍKLAD 3

Určete lokální extrémy funkcí. Symbolem $\overline{\mathrm{V}}$, resp. $\underline{\mathrm{V}}$ označujeme ve výsledcích lokální maximum, resp. lokální minimum funkce.

**a.** $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 4$

**b.** $f(x) = x^3 + x + 1$

**c.** $f(x) = -x^3 + x^2$

**d.** $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3$

## PŘÍKLAD 4

Určete inflexní body funkce $f(x)$ a intervaly, v nichž je tato funkce konvexní nebo konkávní.

**a.** $f(x) = x^5 - 10x^2 + x + 3$

**b.** $f(x) = e^x + x^2 + x^4$

**c.** $f(x) = 2x^2 + \ln x, \quad x > 0$

**d.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1$

## PŘÍKLAD 5

Vyšetřete průběhy funkcí:

**a.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

**b.** $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^4 - 4x^3 + 8\right)$

**c.** $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

## 11.6 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a.** | 10 | **b.** | 1 | **c.** | 0 | **d.** | 0,05 |
| **e.** | 2 | **f.** | $\frac{1}{3}$ | **g.** | $\ln\frac{a}{b}$ | **h.** | $\sqrt{2}$ |
| **i.** | 1 | **j.** | 0,5 | **k.** | 1 | **l.** | $-\frac{1}{6}$ |
| **m.** | 2 | **n.** | 0 | **o.** | 0 | **p.** | 1 |
| **q.** | 1 | **r.** | $e^3$ | | | | |

2)

**a.** $dy = -0{,}0693$ **b.** $dy = 0$ **c.** $dy = 0{,}6$ **d.** $dy = -2$

3)

**a.** $\overline{\mathrm{V}} = (-6,-50), \underline{\mathrm{V}} = (-2,-82)$ **b.** lokální extrémy neexistují

**c.** $\overline{\mathrm{V}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right), \underline{\mathrm{V}} = (0,0)$ **d.** $\underline{\mathrm{V}}\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$

4)

**a.** inflexní bod $x = 1$; konvexní v $(1,\infty)$; konkávní v $(-\infty,1)$

**b.** inflexní bod neexistuje, konvexní v $R$

**c.** inflexní bod $x = \frac{1}{2}$; konvexní v $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; konkávní v $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

**d.** inflexní bod neexistuje; konvexní v $(-1,1)$; konkávní v $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

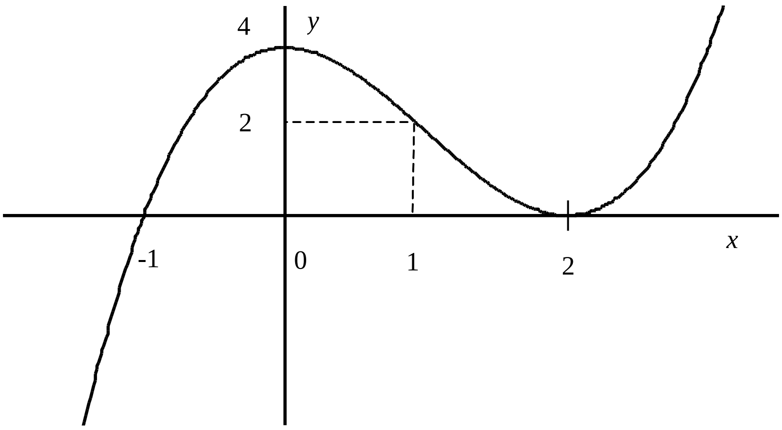
5) **a.** $D(f) = R$, ani sudá, ani lichá

$X_1[-1,0]$, $X_2[2,0]$, $Y[0,4]$

$\overline{\mathrm{V}}[0,4]$, $\underline{\mathrm{V}}[2,0]$, $\mathrm{I}[1,2]$

asymptotyneexistují , viz Obr 11-8.

**Obr. 11-8: Graf funkce**



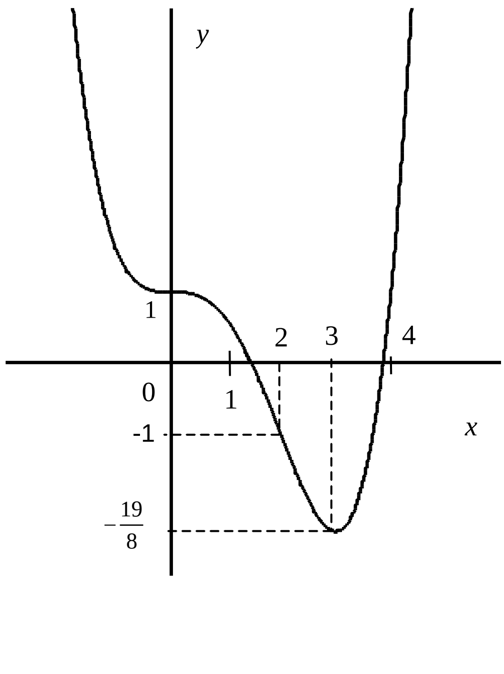

**b.** $D(f) = R$, ani sudá, ani lichá

$X_1[a,0] \wedge a \in (1,2)$, $X_2[b,0] \wedge b \in (3,4)$, $Y[0,1]$

$\underline{V}\left[3,-\frac{19}{3}\right]$, $I_1[0,1]$, $I_2[2,-1]$

asymptoty neexistují, viz Obr. 11-9.

**Obr. 11-9: Graf funkce**



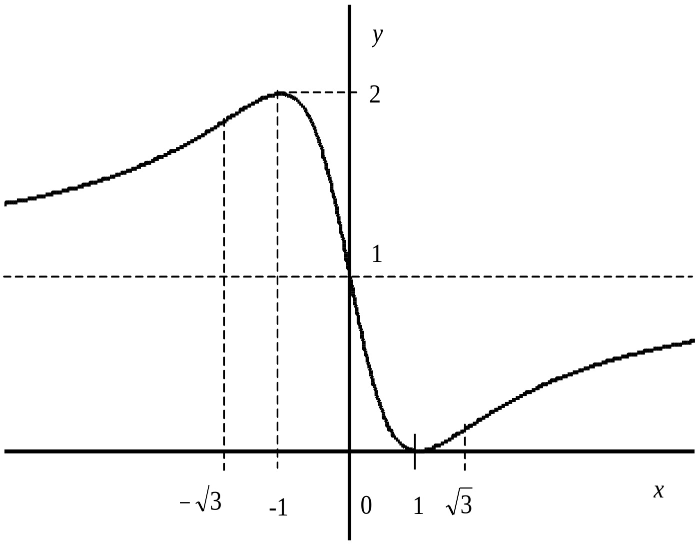

**c.** $D(f) = R$, ani sudá, ani lichá

$X[1,0]$, $Y[0,1]$

$\overline{V}[-1,2]$, $\underline{V}[1,0]$, $I_1[0,1]$, $I_2\left[-\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $I_3\left[\sqrt{3},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

asymptoty: $y = 1$, viz Obr. 11-10.

**Obr. 11-10: Graf funkce**



# 12 INTEGRÁLNÍ POČET

Základní úlohou diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné bylo určení funkce $f'(x)$, která je derivací dané funkce $f(x)$ pro všechna $x$ na daném intervalu. V integrálním počtu je základní úloha, kterou budeme nejprve řešit, obrácená. K dané funkci $f(x)$ budeme hledat takovou funkci $F(x)$, jejíž derivací je daná funkce $f(x)$.

## DEFINICE 1

Říkáme, že funkce $f(x)$ je derivací funkce $F(x)$ v množině $J \subset R$, jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in J .$$

Takovou funkci $F(x)$ nazýváme **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ v množině $J$.

Úkolem integrování je k dané funkci *f* najít primitivní funkci *F*, jejíž derivací je funkce *f*. Tento proces je mnohem obtížnější než derivování.
Již znáte vzorce k derivování součinu a podílu funkcí, znáte postup pro derivování složené funkce. Obecný postup pro integrování součinu (podílu) funkcí a složené funkce však neexistuje.
Existují funkce, které nemají primitivní funkce. Avšak většina funkcí, s nimiž se v běžné praxi setkáváme, primitivní funkce má, jako například spojité funkce.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Ukažte, že funkce $F(x) = \operatorname{tg} x$ jeprimitivní funkcí k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ v množině $J = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

***Řešení.***

Skutečně, platí

$$F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x) \text{ pro každé } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z.$$

Tato rovnost platí pro všechna $x \in J$. Je tedy funkce $F$ skutečně primitivní funkcí k funkci $f$ v množině $J$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Ukažte, že funkce $F(x)=x^2e^{3x}$ a $\widetilde{F}(x)=2+x^2e^{3x}$ jsou primitivními funkcemi k funkci $f(x)=e^{3x}\left(3x^2+2x\right)$ v intervalu $\left(-\infty,\infty\right)$.

***Řešení.***

Platí $F'(x)=2xe^{3x}+3x^2e^{3x}=e^{3x}\left(2x+3x^2\right)$ pro $x\in\left(-\infty,\infty\right)$, to znamená, že funkce $F$ je primitivní k funkci $f$ v tomto intervalu.
Dále platí $\widetilde{F}'(x)=0+F'(x)=f(x)$ pro $x\in\left(-\infty,\infty\right)$, proto je i funkce $\widetilde{F}$ primitivní k funkci $f$ v intervalu $\left(-\infty,\infty\right)$.

## 12.1 NEURČITÝ INTEGRÁL

## DEFINICE 1

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu $J$ nazýváme **neurčitým integrálem** funkce $f(x)$ v intervalu $J$ a značíme jej symbolem $\int f(x)dx$ .

Neurčitým integrálem funkce $f(x)$ na intervale $J$ nazýváme její libovolnou primitivní funkci v intervalu $J$.
Symbol $\int$ se nazývá **integrační znak**, funkce $f(x)$ se nazývá **integrand.** Tato proměnná se nazývá **integrační proměnná.**
Symbol $dx$ patří k integračnímu znaku: integrační znak píšeme vždy na začátku, symbol $dx$ na konci integrálu. Je nutné ještě poznamenat, že symbol $dx$ nemá nic společného s diferenciálem.

Je-li funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ v intervalu $(a,b)$, pak píšeme

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Konstanta $C$ se nazývá **integrační konstanta**.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Uvažujte o integrálu $\int\frac{1}{x}dx$ v množině $J=\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\infty\right)$.

***Řešení.***

Z diferenciálního počtu víme, že platí

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ pro } x \in (0,\infty) \quad \text{a} \quad [\ln(-x)]' = \frac{1}{x} \text{ v množině } J = (-\infty, 0).$$

Funkce $\frac{1}{x}$ tedy má integrál v množině *J* a platí

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \text{ v } (0,\infty) \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \text{ v množině } J = (0,\infty).$$

Souhrnně to lze napsat takto: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $J = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Vypočtěte integrál $\int \cos x dx$ .

***Řešení.***

Najdeme nejprve primitivní funkci integrandu. Z diferenciálního počtu víte, že platí $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in R$. Funkce $\sin x$ je tedy primitivní funkcí k funkci $\cos x$ v $R$, a proto $\int \cos x dx = \sin x + C$, $J = R$.

## 12.2 Pravidla pro výpočet integrálu, základní vzorce a jejich užití

U integrálů jsou k dispozici následující **integrační pravidla**:

Když $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $\quad \int g(x)\, dx = G(x) + C$,

pak pro integraci součtu nebo rozdílu funkcí platí vztah

**1.** $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$

Pro integraci funkce s multiplikační konstantou *k* platí vztah

**2.** $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx = kF(x) + C$, kde $k \neq 0$.

Integrál lineární kombinace funkcí je roven lineární kombinaci integrálů těchto funkcí, pokud příslušné integrály existují.

Tento výsledek často používáme při praktickém integrování. Máme-li např. integrovat součet několika funkcí, stačí integrovat jednotlivé sčítance a vypočtené integrály sečíst. Pokud lze, pak integrand rozkládáme v součet jednodušších funkcí, které pak integrujeme člen za členem (provedeme nejprve například součin polynomů, goniometrické funkce upravíme podle známých vzorců apod.).

**Základním integračním vzorcům** se taky říká tabulkové vzorce. Ve všech následujících vzorcích značí $C$ libovolnou konstantu a $J$ značí integrační obor.

**(1)** $\int 0dx = C, \quad J = R$.

**(2)** $\int kdx = kx + C$ pro každou konstantní funkci $k$, $J = R$.

**(3)** $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \in N$, $J = R$.

**(4)** $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \in R, \quad \alpha \neq -1,$ $J$ závisí na $\alpha \in R$.

**(5)** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $J = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

**(6)** $\int e^x dx = e^x + C$, $J = R$.

**(7)** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $J = R$.

**(8)** $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $J = R$.

**(9)** $\int \cos x dx = \sin x + C$, $J = R$.

**(10)** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$, $J = R - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in Z \right\}$.

**(11)** $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$, $J = R - \{ k\pi \mid k \in Z \}$.

**(12)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$, $J = (-1, 1)$.

**(13)** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$, $J = R$.

**(14)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$, $J = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

**(15)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C$, $J = R$.

**Příklady použití základních vzorců**

Vypočtěte následující integrály.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

$I = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$ .

***Řešení.***

$$I = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = 3\int x^2 dx - 4\int x dx + \int 1 dx =$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + x + C_3 = x^3 - 2x^2 + x + C \text{ , } J = R \text{ .}$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6

$I = \int \frac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x} dx.$

***Řešení.***

Definiční obor integrandu je $D(f) = (0, \infty)$, integrand je v něm spojitý a tedy integrovatelný. Čitatele integrandu vydělíme jmenovatelem, tím dostaneme tvar vhodný pro integraci a dále postupujeme stejně jak v předchozím příkladu.

$$I = \int \frac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x} dx = \int \left( x - x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{x} \right) dx = \int x dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2\int \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2\right) + 2(\ln x + C_3) = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x} + 2\ln x + C.$$

Integrační obor $J = (0, \infty)$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7

$I = \int (2e^x + 3.4^x)dx.$

***Řešení.***

Integrujeme v $R$. Postupujeme podobně jako v předchozích příkladech.

$$I = \int (2e^x + 3.4^x)dx = 2\int e^x dx + 3\int 4^x dx =$$

$$= 2\left(e^x + C_1\right) + 3\left(\frac{4^x}{\ln 4} + C_2\right) = 2e^x dx + \frac{3}{\ln 4}.4^x + C.$$

Integrační obor $J = R$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8

**a.** $I = \int \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx = x^3 + x^2 + x + C$.

Integrační obor $J = R$.

**b.** $I = \int \left(x^2 - 3\right)^2 dx = \int \left(x^4 - 6x^2 + 9\right) dx = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 9x + C$.

Integrační obor $J = R$.

**c.** $I = \int \left(1 - x^3\right)^2 x dx = \int \left(x - 2x^3 + x^6\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$.

Integrační obor $J = R$.

**d.** $I = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$.

Integrační obor $J = R - \{0\}$.

**e.** $I = \int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) dx = ax + b\ln|x| - \frac{c}{x} + C$.

Integrační obor $J = R - \{0\}$.

**f.** $I = \int \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} dx = \int \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

Integrační obor $J = R - \{0\}$.

**g.** $I = \int \frac{x^3 + 2x - 3}{x^4} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C$.

Integrační obor $J = R - \{0\}$.

**h.** $I = \int \sqrt[n]{x} dx = \int x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{n+1} x^{1+\frac{1}{n}} + C = \frac{n}{n+1} x \cdot \sqrt[n]{x} + C, n \neq -1$.

Integrační obor $J = \langle 0, \infty)$.

**i.** $I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{n-1} x^{1-\frac{1}{n}} + C = \frac{n}{n-1} \frac{x}{\sqrt[n]{x}} + C, n = 1$.

Integrační obor $J = R^+$.

**j.** $I = \int 5x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx = 5\int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{5.3}{10} x^{\frac{10}{3}} + C = \frac{3}{2} x^3 \cdot \sqrt{x} + C$.

Integrační obor $J = R$.

**k.** $I=\int x\sqrt{2px}dx=\sqrt{2p}\int x^{\frac{3}{2}}dx=\sqrt{2p}\,\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{2px}+C,\ p>0,$

Integrační obor $J=\langle 0,\infty)$.

**l.** $I=\int\sqrt[n]{x^m}dx=\int x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{n}{n+m}x^{\frac{m}{n}+1}+C=\frac{n}{n+m}x\cdot\sqrt[n]{x^m}+C,\ n\neq -m$.

Integrační obor $J=\langle 0,\infty)$.

**m.** $I=\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{\frac{5}{3}}dx=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C=\frac{3}{8}x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}+C.$

Integrační obor $J=R^+$.

**n.** $I=\int\left(3e^x-\frac{1}{x}\right)dx=3e^x-\ln|x|+C.$

Integrační obor $J=R-\{0\}$.

**o.** $I=\int(2e^x+2^x+3^x)dx=2e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C.$

Integrační obor $J=R.$

**p.** $I=\int\left(10e^x+3e^x+\frac{1}{x^2}\right)dx=13e^x-\frac{1}{x}+C.$

Integrační obor $J=R-\{0\}$.

**q.** $I=\int(3\cos x-5\sin x)dx=3\sin x+5\cos x+C.$

Integrační obor $J=R.$

**r.** $I=\int\left(\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx=-\cos x+2\operatorname{tg}x+C.$

Integrační obor $J=R-(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in Z.$

**s.** $I=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-2\cos x+\sin x\right)dx=-\operatorname{cotg}x-2\sin x-\cos x+C.$

Integrační obor $J=R-k\pi,\ k\in Z.$

## VĚTA 1

Pokud argumentem tabulkového integrálu není pouhé $x$, ale lineární funkce $ax+b, a\neq 0$ platí vzorec

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\ .$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9

$$I=\int \frac{dx}{x+5}\;.$$

***Řešení.***

$$\int \frac{dx}{x+5}=\frac{1}{1}\ln|x+5|+C=\ln|x+5|+C,\;\; J=(-\infty,-5)\cup(-5,\infty).$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10

$$I=\int \sin(-5x+8)dx.$$

***Řešení.***

$$\int \sin(-5x+8)dx=-\frac{1}{5}\left[-\cos(-5x+8)\right]+C=\frac{1}{5}\cos(-5x+8)+C\,,\;\; J=R\,.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 11

$$I=\int \frac{dx}{x^2+3}.$$

***Řešení.***

Víte, že platí $\int \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x+C,\; J=\;R\,.$

Vhodnou úpravou jmenovatele $x^2+3$ převedeme počítaný integrál na integrál tohoto tvaru. Stručně: Místo čísla 3 potřebujeme číslo 1, místo proměnné $x$ může být lineární funkce. Potřebnou úpravu vložíme mezi dvě svislice.

$$I=\int \frac{dx}{x^2+3}=\left| x^2+3=3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)=3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]\right|=$$

$$=\int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C,\;\; J=\;R\,.$$

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 12

$I = \int \frac{dx}{3x^2+5}$.

***Řešení.***

Protože chceme, aby koeficientem u $x$ ve jmenovateli bylo číslo 1, vytkneme ze jmenovatele číslo 3.

$$I = \int \frac{dx}{3x^2+5} = \left| 3x^2+5 = 3\left(x^2+\frac{5}{3}\right) = 3\left[x^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2\right] \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + C,\ J = R.$$

## 12.3 INTEGRACE SUBSTITUČNÍ METODOU

### VĚTA 2

**Substituce typu $t = g(x)$**

Nechť v otevřeném intervalu $J_1$ existuje primitivní funkce k funkci $f(x)$. Nechť funkce $g(x)$ má v otevřeném intervalu $J$ derivaci a nechť pro všechna $x \in J_1$ platí $t = g(x) \in J$. Pak v otevřeném intervalu $J_1$ platí

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

### VĚTA 3

**Substituce typu $x = g(t)$**

Nechť funkce $x = g(t)$ má v otevřeném intervalu $J_1$ derivaci $g'(t) \neq 0$. Nechť funkce $t = g^{-1}(x)$ definovaná v otevřeném intervalu $J$, je funkcí inverzní k funkci $x = g(t)$ v intervalu $J_1$. Jestliže v intervalu $J_1$ existuje primitivní funkce k funkci $f(g(t))g'(t)$, pak v intervalu $J$ platí

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 13

$I = \int \sin^6 x \cos x dx$ .

***Řešení.***

Integrace má předepsaný tvar substituce typu $t = g(x)$, složená funkce je $\sin^6 x$, její vnější funkce je $t^6$ a vnitřní je $\sin x$. Protože derivací vnitřní funkce je funkce $\cos x$, která je obsažena v integrandu, zavedeme substituci

$$t = \sin x \;\Rightarrow\; dt = \cos x \, dx .$$

$$I = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{7}\sin^7 x + C, \quad x \in R .$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 14

$I = \int x^2 e^{-x^3} dx$ .

***Řešení.***

Nejdříve upravíme daný integrál $I = -\frac{1}{3}\int \left(-3x^2\right) e^{-x^3} dx$ a zavedeme substituci

$t = -x^3 \;\Rightarrow\; dt = -3x^2 dx$ .

$$I = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C, \quad x \in R .$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 15

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0.$ .

***Řešení.***

$x = at \;\Rightarrow\; dx = a\, dt$ .

$$I = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a, a) .$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 16

$$I=\int\frac{x}{1+x^2}dx.$$

***Řešení.***

$$t=1+x^2\Rightarrow dt=2x\,dx\Rightarrow x\,dx=\frac{1}{2}\,dt.$$

$$I=\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C,\ x\in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 17

$$I=\int\frac{x^9}{1+x^{10}}\,dx.$$

***Řešení.***

$$t=1+x^{10}\ \Rightarrow\ 10x^9dx=dt.$$

$$I=\int\frac{x^9}{1+x^{10}}\,dx=\frac{1}{10}\int\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{10}\ln|t|+C=\frac{1}{10}\ln\left(1+x^{10}\right)+C,\ x\in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 18

$$I=\int\frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx.$$

***Řešení.***

$$I=\int\frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx=\int\frac{x^4}{1+\left(x^5\right)^2}\,dx.$$

$$t=x^5\ \Rightarrow\ 5x^4dx=dt.$$

$$I=\int\frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x^5+C,\ x\in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 19

$I = \int (x^2+1)^4 x dx$ .

***Řešení.***

$t = x^2 + 1 \Rightarrow\ 2xdx = dt$ .

$$I = \int (x^2+1)^4 xdx = \frac{1}{2}\int t^4 dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + C = \frac{(x^2+1)^5}{10} + C\,,\ x \in R.$$

## 12.4 INTEGRACE METODOU PER PARTES

Touto metodou integrujeme některé součiny funkcí.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$, mají v otevřeném intervalu $J$ spojité derivace. Potom podle pravidla pro derivování součinu máme

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrujeme obě strany rovnice a obdržíme

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\ .$$

Převedením jednoho z integrálů na levou stranu obdržíme vztah pro integraci metodou per partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

nebo

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 20

$I = \int \ln x\, dx$ .

***Řešení.***

Zvolíme $f(x) = \ln x,\ g'(x) = 1$. Potom $f'(x) = \frac{1}{x}$ , $g(x) = x$ . V intervalu $(0,\infty)$ obě funkce mají spojité derivace.

$$I = \int \ln xdx = x\ln x - \int \frac{1}{x} xdx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C\,,\ x \in R^+.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 21

$I=\int x\ln x\,dx$.

***Řešení.***

Zvolíme $f(x)=\ln x, \quad g'(x)=x$.

Potom $f'(x)=\dfrac{1}{x}, \qquad g(x)=\int g'(x)dx=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}$.

V intervalu $(0,\infty)$ obě funkce mají spojité derivace.

$$I=\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\,,\ x\in R^+.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 22

$I=\int \operatorname{arctg} xdx$.

***Řešení.***

Zvolíme $f(x)=\operatorname{arctg} x, \quad g'(x)=1$. Potom $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx, \quad g(x)=x$.

$$I=\int \operatorname{arctg} xdx=\int 1\cdot\operatorname{arctg} xdx=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\operatorname{arctg} x-I_1\,.$$

Jelikož platí $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\ =\ln|f(x)|$, proto $\displaystyle I_1=\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1$.

Po dosazení $I_1$ do $I$ obdržíme $\quad\displaystyle I=\int\operatorname{arctg} xdx=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C, \quad x\in R$.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 23

$I=\int x\sin xdx.$

***Řešení.***

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{matrix} f'=\sin x & f=-\cos x \\ g=x & g'=1\end{matrix}\right|=$$

$$=(-\cos x)x-\int(-\cos x)1dx=-x\cos x+\int\cos xdx==-x\cos x+\sin x+C,\ \ x\in R.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 24

$I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

***Řešení.***

Zaveďme substituci $\sqrt{x} = t$, potom $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \int 2t \operatorname{arctg} t\,dt = 2\int t \operatorname{arctg} t\,dt = 2I_1$.

Integrál $I_1$ počítáme metodou per partes.

$$f'(t) = t,\quad f(t) = \frac{t^2}{2},\ g(t) = \operatorname{arctg} t,\ g'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$I_1 = \int t \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{t^2}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \frac{t^2}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}(t - \operatorname{arctg} t) + C_1.$$

Funkce $t = \sqrt{x}$, která je definována v intervalu $\langle 0, \infty)$ je inverzní funkcí k funkci $x = t^2$ definované v intervalu $\langle 0, \infty)$.

$$I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = 2I_1 = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C,\quad x \in \langle 0, \infty).$$

V následujícím příkladu použijeme integraci per partes převedením na rovnici pro výpočet hledaného integrálu.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 25

$I = \int e^x \sin x\,dx$.

***Řešení.***

Zvolíme $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$.
Potom $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$.

$$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_1. \qquad (*)$$

$I_1 = \int e^x \cos x\,dx$ opět počítáme metodou per partes.

Zvolíme $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$.
Potom $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$.
$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$.

Tento výsledek dosadíme do (*).

$$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + I_1 = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$$
$$= e^x (\sin x - \cos x) - I$$

Obdrželi jsme rovnici $I = e^x (\sin x - \cos x) - I$ .

Řešením této rovnice pro neznámou $I$ obdržíme hledaný integrál

$$I = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C , \; x \in R.$$

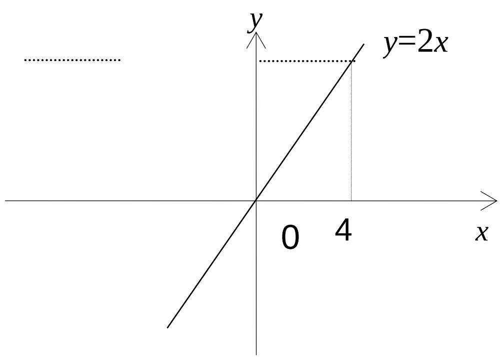
## 12.5 Určitý integrál

K pojmu určitého integrálu dospěli matematikové mimo jiné při řešení geometrického problému, totiž při výpočtu obsahu rovinného obrazce.

### ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 26

Vypočtěte obsah trojúhelníku, který je omezen přímkami $y = 2x$, $x = 4$ a osou $x$.

***Řešení.***




Ze vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{1}{2} a v_a$, kde $a$ je strana trojúhelníku, $v_a$ je výška na stranu $a$, dostáváme po dosazení $S = \frac{1}{2} 4.8 = 16 j^2$. Symbolem $j^2$ máme na mysli jednotky čtvereční, např. $cm^2$ .
Jak uvidíte později, obsah daného trojúhelníku lze vypočítat pomocí určitého integrálu.

**Newton-Leibnizův vzorec pro výpočet určitého integrálu**

## DEFINICE 2

Nechť funkce *f(x)* je spojitá v intervalu <*a*,*b*> a má v (*a*,*b*) primitivní funkci (neurčitý integrál) *F*(*x*) spojitou v <*a*,*b*>. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Výpočet určitého integrálu se takto převádí na určení primitivní funkce, do níž se za proměnnou dosadí postupně horní a dolní mez integrálu a výsledné hodnoty (v uvedeném pořadí) se odečtou.

**Základní vlastnosti určitého integrálu**

Pro integrovatelné funkce *f* a *g* platí:

**1.** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**2.** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a > b)$

**3.** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (c \in \langle a,b \rangle)$

**4.** $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

**5.** $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 27

Vypočtěte $\int_1^3 (2x + 3x^2)\,dx.$

***Řešení.***

Funkce $f(x)=2x+3x^2$ je spojitá a tedy v intervalu <1,3> integrovatelná. Její primitivní funkce $F(x) = x^2 + x^3$ je spojitá a tedy platí

$$\int_1^3 (2x+3x^2)\,dx = [x^2 + x^3]_1^3 = (9+27)-(1+1) = 34.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 28

Vypočtěte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$.

***Řešení.***

Protože funkce $f(x) = \cos x$ je spojitá, a tedy integrovatelná v intervalu $<0, \frac{\pi}{2}>$ a má spojitou primitivní funkci $F(x) = \sin x$, platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 29

Substituční metodou řešte určitý integrál $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

***Řešení.***

Nejprve vypočteme integrál neurčitý a pak si uvedeme dvě možnosti, jak lze postupovat dále.

$$\int \frac{1+\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ xdt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{x} xdt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + c$$

Nyní máme dvě možnosti:

**1.** Integrální meze nepřepočítáváme

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(1+\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(1+\ln e)^2}{2} - \frac{(1+\ln 1)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

**2.** Integrální meze přepočteme na základě zavedené substituce:

$$\left| \begin{array}{lll} x = 1 & \Rightarrow & t = 1 + \ln 1 = 1 \\ x = e & \Rightarrow & t = 1 + \ln e = 2 \end{array} \right|$$

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 30

Metodou per partes řešte určitý integrál $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

***Řešení.***

Nejprve vypočteme integrál neurčitý a pak použijeme Newton-Leibnizův vzorec pro výpočet určitého integrálu.

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}x - \int\left(-e^{-x}\right)dx =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c\,.$$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^1 = -e^{-1}2 - \left(-e^0\right) = -\frac{2}{e} + 1\,.$$

### 12.5.1 *UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU V GEOMETRII*

V této části se věnujeme výpočtu obsahu rovinného obrazce a objemu rotačního tělesa. Pomocí určitého integrálu lze vypočítat také délku oblouku rovinné křivky (rektifikace křivky) nebo obsah rotační plochy (komplanace).

#### Obsah rovinného obrazce

Nechť *E* je elementární oblast, která je definována jako množina uspořádaných dvojic [*x*, *y*], kde $a \le x \le b;\quad 0 \le y \le f(x)$, přičemž funkce *f*(*x*) je spojitá v intervalu <*a*,*b*>. Potom pro obsah této elementární oblasti platí

$$S = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Je-li však elementární oblast *E* v <*a*,*b*> omezena dvěma křivkami *f*(*x*) a *g*(*x*), tedy $g(x) \le y \le f(x)$, přičemž obě funkce *f*(*x*), *g*(*x*) jsou v intervalu <*a*,*b*> spojité, potom pro její obsah platí

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx\,.$$

Nyní se vraťme k řešenému příkladu 26 v této kapitole a vypočítáme obsah daného trojúhelníku pomocí výše uvedeného vztahu. Funkce $f(x) = 2x,\quad g(x) = 0$ (osa *x*), dolní mez *a* je rovna 0 a horní mez *b* je rovna čtyřem.

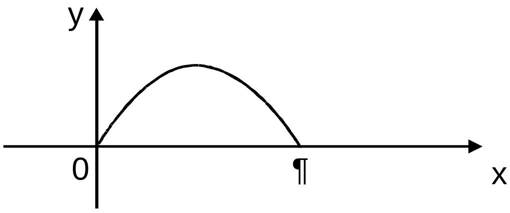
Dosazením do vztahu $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ dostáváme:

$$S = \int_0^4 (2x - 0)dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^4 = \left[x^2\right]_0^4 = 16 - 0 = 16j^2\,.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 31

Vypočtěte obsah plochy omezené osou $x$ a grafem funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

***Řešení.***



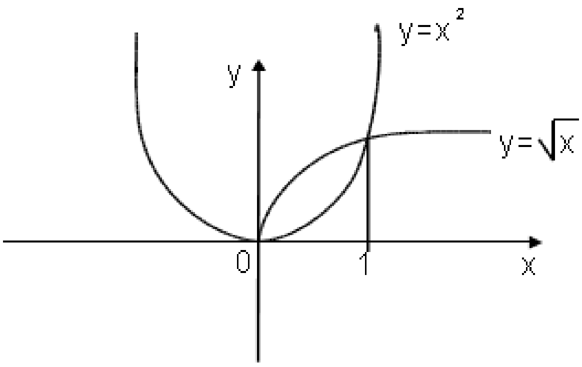

Vypočteme tedy hodnotu určitého integrálu, což je obsah dané plochy:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 32

Vypočtěte obsah plochy omezené grafy funkcí $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2$ .

***Řešení.***




Nerovnost $0 \le x^2 \le \sqrt{x}$ platí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 33

Vypočtěte obsah plochy omezené osou $x$ a grafem funkce $f(x) = x^2 - 3x + 2$ na intervalu $\langle 0, 3\rangle$.

***Řešení.***

Uvedenou parabolu jistě dokážete sami graficky znázornit.
Pokud jste to dokázali, pak vidíte, že $f(x) \geq 0$ na $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$ a $f(x) \leq 0$ na $\langle 1, 2\rangle$.

$$S = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \frac{11}{6}.$$

### Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vzniká rotací rovinného obrazce kolem osy rotace, jež je hraniční přímkou poloroviny, v níž obrazec leží. Na toto rotační těleso se můžeme dívat také jako na těleso, které je omezeno plochou vzniklou rotací hraniční křivky daného obrazce kolem osy rotace.
Jako osu rotace volíme obvykle osu $x$. Při této rotaci obíhá bod $[x, y]$ kružnici o poloměru $y$ a středu $[x,0]$.

Vztah pro výpočet objemu tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti $E$, jež je množinou uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x \in \langle a, b\rangle$, $\quad 0 \leq g(x) \leq y \leq f(x)$ kolem osy $x$ je:

$$V(A) = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx .$$

Nezapomeňme, že funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojité a nezáporné.

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 34

Vypočtěte objem rotačního kužele, který má výšku 5cm a vznikne rotací přímky $y = x$ kolem osy $x$.

***Řešení.***

Nejprve se pokuste graficky znázornit daný trojúhelník, který bude rotovat kolem osy $x$ a tím se vytvoří rotační kužel.

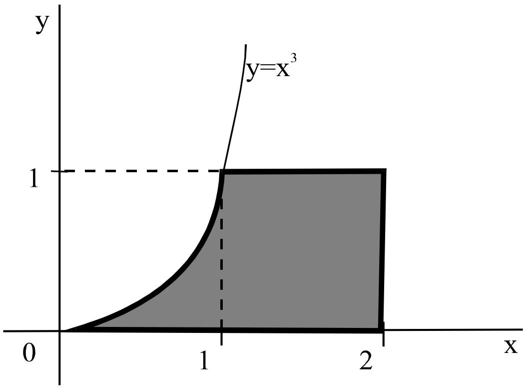
$$V = \pi \int_0^5 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{125}{3}\pi .$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 35

Určete objem tělesa vzniklého rotací kolem osy $x$ obrazce ohraničeného křivkami $y = x^3, y = 1, x = 2, y = 0$.

***Řešení.***

Objem daného rotačního tělesa se rovná součtu objemu rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$ v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a objemu rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = 1$ v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ kolem osy $x$.




$$V(A) = \pi \int_0^1 \left(x^3\right)^2 dx + \pi \int_1^2 1^2\, dx = \pi \left( \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^1 + [x]_1^2 \right) = \pi \left( \frac{1}{7} + 2 - 1 \right) = \frac{8}{7}\pi.$$

## ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 36

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $y = x^2,\ y^2 = x$ kolem osy $x$.

***Řešení.***

Vypočteme průsečík funkcí $y = \sqrt{x},\ y = x^2$, tj. řešíme rovnici: $x^2 = \sqrt{x}$. Danou rovnici umocníme $x^4 = x$ a dále upravujeme: $x^4 - x = 0$

$$x\left(x^3 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Dosadíme do výše uvedeného vztahu pro objem:

$$V = \pi \int_0^1 \left[ \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

## 12.6 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

### PŘÍKLAD 1

Vypočtěte neurčité integrály:

a. $\int x^5 dx$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

c. $\int \frac{x^3+1}{x^2} dx$

d. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) dx$

e. $\int \left[\frac{1}{x^2} - \left(\sqrt{3}\right)x + \sqrt[3]{(8x)}\right] dx$

f. $\int \frac{dx}{-x+1} dx$

g. $\int (2x-1)^3 dx$

h. $\int \cos\left(\frac{3}{5}x - 1\right) dx$

i. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$

j. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$

k. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

l. $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

m. $\int \arccos x \, dx$

n. $\int x \arcsin x \, dx$

o. $\int \sin(\ln x) dx$

p. $\int (x + \sin x)^2 dx$

q. $\int \left(x^2+3x-16\right)(2x+3) dx$

r. $\int \left(x^2+4x-1\right)^4 (x+2) dx$

s. $\int x\sqrt{4-x^2} dx$

t. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

### PŘÍKLAD 2

Řešte určité integrály:

a. $\int_0^1 xe^x dx$,

b. $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ ,

c. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$,

d. $\int_0^\pi x \sin 2x dx$,

e. $\int_1^e x \ln x dx$,

f. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^2 \cos x dx$,

g. $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$,

h. $\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{4-x^2} dx$,

i. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+4} dx$.

## PŘÍKLAD 3

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = f(x)$ a osou $x$ v daném intervalu:

**a.** $y = \frac{1}{3}x^2$, $\quad x \in \langle -2, 2 \rangle$,

**b.** $y = \sqrt{x+1}$, $\quad x \in \langle -1, 3 \rangle$,

**c.** $y = \frac{1}{x}$, $\quad x \in \left\langle \frac{1}{4}, 1 \right\rangle$.

## PŘÍKLAD 4

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = f(x)$ a osou $x$:

**a.** $y = 4 - x^2$,

**b.** $y = 5x - x^2$,

**c.** $y = x^2 - x - 2$.

## PŘÍKLAD 5

Vypočtěte obsah obrazce omezeného danými křivkami:

**a.** $y = x^2 - 2x, \quad y = x$,

**b.** $y = -x^2 + 4x - 2, \quad x + y - 2 = 0$,

**c.** $y = x^3, \quad y = 4x$,

**d.** $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0$,

**e.** $y = x^2 - 2x - 2, \quad y = -x^2 + 4x - 2$,

**f.** $y = \frac{x^3}{3}, \quad y = x^2$.

## PŘÍKLAD 6

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného danou křivkou a osou $x$ v daném intervalu kolem osy $x$:

**a.** $x - 2y - 4 = 0, \quad x \in \langle 0, 4 \rangle$,

**b.** $y = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$,

**c.** $y = \frac{8}{x^2}, \quad x \in \langle 2, 4 \rangle$.

## PŘÍKLAD 7

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného danými křivkami kolem osy $x$:

**a.** $y = x^2, \quad y^2 = x,$

**b.** $y = x^2, \quad y = 1 - x^2,$

**c.** $y = x^2, \quad y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2,$

**d.** $y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{4 - x}, \quad y = 0.$

## 12.7 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

1)

**a.** $\dfrac{x^6}{6} + C$ v $R$

**b.** $2\sqrt{x} + C$ v $R$

**c.** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + C$ v $(0, \infty)$ nebo v $(-\infty, 0)$

**d.** $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln x + C$ v $(0, \infty)$

**e.** $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x^{4/3} + C$ v $(0, \infty)$ nebo v $(-\infty, 0)$

**f.** $-\ln\left|-x + 1\right| + C$ v $(1, \infty)$ nebo v $(-\infty, 1)$

**g.** $\dfrac{1}{8}(2x - 1)^4 + C$ v $R$

**h.** $\dfrac{5}{3}\sin\left(\dfrac{3}{5}x - 1\right) + C$ v $R$

**i.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x + 1) + C$ v $R$

**j.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{3x - 1}{\sqrt{5}} + C$ v $R$

**k.** $3\operatorname{arctg}(2x - 1) + C$ v $R$

**l.** $x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$ v $R$

**m.** $x\arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$ v $(-1, 1)$

**n.** $\dfrac{1}{4}(2x^2 - 1)\arcsin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$ v $(-1, 1)$

**o.** $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$ v $R^+$

**p.** $\dfrac{x^3}{3} - 2x\cos x + 2\sin x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$ v $(-\infty, \infty)$

**q.** $\frac{1}{2}\left(x^2+3x-16\right)^2$ v $(-\infty,\infty)$

**r.** $\frac{1}{10}\left(x^2+4x-1\right)^5+C$ v $(-\infty,\infty)$

**s.** $-\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}+C$ v $\langle -2,2\rangle$

**t.** $\sqrt{x^2-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}+C$ v $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ nebo v $(-\infty,0)$

2) **a.** $1$ **b.** $\pi^2-4$ **c.** $-\frac{2}{e}+1$

**d.** $\frac{\pi}{2}$ **e.** $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$ **f.** $2-2\pi-\frac{\pi^2}{4}$

**g.** $2\ln 2-\ln 3$ **h.** $\frac{5}{2}\ln 3-2$ **i.** $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$

3) **a.** $\frac{16}{9}$ **b.** $\frac{16}{3}$ **c.** $\ln 4$

4) **a.** $\frac{32}{3}$ **b.** $\frac{125}{6}$ **c.** $\frac{9}{2}$

5) **a.** $\frac{9}{2}$ **b.** $\frac{9}{2}$ **c.** $8$

**d.** $\frac{15}{2}-8\ln 2$ **e.** $9$ **f.** $\frac{9}{4}$

6) **a.** $\frac{16}{3}\pi$ **b.** $\frac{\pi^2}{2}$ **c.** $\frac{7}{3}\pi$

7) **a.** $\frac{3}{10}\pi$ **b.** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$ **c.** $\frac{256}{15}\pi$ **d.** $4\pi$

# ZÁVĚR

Studijní opora Kvantitativní metody je určena studentům prvního ročníku bakalářského studia.

V učebnici je obsažen stručný výklad teoretické části učiva včetně mnoha praktických příkladů. Kontrolní otázky, úlohy k textu a závěrečné úlohy ke každé kapitole vám pomohou zkontrolovat, zda jste probíranou látku správně pochopili a ověří vaše znalosti.

Studijní opora z Kvantitativních metod by Vám měla pomoci ve vašem studiu a usnadnit přípravu na úspěšné vykonání zkoušky z tohoto předmětu. V případě vašeho hlubšího zájmu o danou problematiku doporučujeme prostudovat další literaturu z této oblasti.

# SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. BARTSH,H.J. *Matematické vzorce.* 2.vyd.Praha: SNTL,1987.

2. GODULOVÁ, Marie, Jaroslav RAMÍK a Radmila STOKLASOVÁ. *Kvantitativní metody A: matematika : distanční studijní opora*. Vyd. 1. Karviná: Slezská univerzita v Opavě, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 2004, 319 s. ISBN 80-724-8260-2.

3. GODULOVÁ, Marie, Ivana JANŮ a Radmila STOKLASOVÁ. *Příklady k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky: matematika : distanční studijní opora*. Vyd. 2., rozš. Karviná: Slezská univerzita, Obchodně podnikatelská fakulta, 2000, 189 s. ISBN 80-724-8065-0.

4. JIRÁSEK, František a Josef BENDA. *Matematika pro bakalářské studium*. Vyd. 1. Praha: Ekopress, 2006, 506 s. ISBN 80-869-2902-7.

5. KAŇKA, Miloš. *Vybrané partie z matematiky pro ekonomy*. 1.vyd. Praha: VŠE, 1998, 231 s. ISBN 80-707-9537-9.

6. KLŮFA, Jindřich. *Matematika pro studenty VŠE*. Vyd. 1. Praha: Ekopress, 2011, 188 s. ISBN 978-808-6929-743.

7. MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL. *Matematika pro studenty ekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 272 s. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3260-2.

8. MULTANOVÁ, Linda a Eva TRYSKOVÁ. *Ekonomická matematika*. Vyd. 1. Ostrava: Vysoká škola podnikání, 2007, 168 s. ISBN 978-80-86764-67-2.

9. PAPULA, Lothar. *Mit zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik ... und 307 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen*. 10., erw. Aufl. Braunschweig [u.a.]: Vieweg, 2001. ISBN 35-289-4236-3.

10. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 1991, 608 s. ISBN 80-719-6196-5.

11. REKTORYS, Karel. Přehled užité matematiky I. 6. přepr.vyd. Praha: Prometheus, 1995, 720 s. ISBN 80-858-4992-5.

12. REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky II*. 6. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995, xxxii, 874 s. ISBN 80-858-4962-3.

13. ROMMELFANGER, Heinrich. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* 5. Aufl. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl, 2002. ISBN 38-274-1191-2.

# PŘÍLOHA Č. 1

**Průběžný test**

1. Graficky znázorněte množiny A, B, $\overline{A} \cap B$, kde **5b**
$A = \{(x, y) \in R^2;\, x^2 + y^2 > 4\}, \quad B = \{(x, y) \in R^2;\, y \geq -x + 3\}.$

2. Řešte maticovou rovnici $AX = B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ **4b**

3. Je dána posloupnost $a_n = \dfrac{-3n + 4}{n + 5}$.

Určete $a_1 =$ $\quad$ $, a_2 =$ $\quad$ $, a_3 =$ $\quad$ , $\lim a_n =$ $\quad$ $, \sup P =$ $\quad$ $, \inf P =$
Načrtněte graf. **6b**

4. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$ **5b**

5. Určete parametr $a \in R$ tak, aby byla matice $A$ regulární :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 - a \\ 3 + a & -2 \end{pmatrix}$$ **4b**

6. Načrtněte graf funkce $y = -3x + 4$ a určete tyto limity
$\lim\limits_{x \to \infty} (-3x + 4) = .....$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 1} (-3x + 4) = ......$ **3b**

7. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - 2n + 4}{6 - n^4} =$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5^n - 6^{n+1}}{1 + 6^{n-1}} =$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^4 + 2n + 5}} =$ **3b**

# PŘÍLOHA Č. 2

**Zkouškový test**

1. (Každá tato podotázka je hodnocena: 3 body)

a) Vypočtěte součin: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

b) Načrtněte graf funkce $y = x^2$ a vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 =$

c) Vypočtěte: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} =$

d) Vypočtěte určitý integrál: $\int_1^2 x^2 dx =$

e) Vypočtěte inflexní body funkce $y = x^3 - 3x^2 + 6$. **15b**

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 2 \\ x \quad\ + z &= 3. \end{aligned}$$

**5b**

3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3x - x^2} =$  b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot 5^x}{3^x - 1} =$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{16-x^2} =$  d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-4}{16-x^2} =$ **12b**

4. Vypočtěte definiční obor funkce $f(x) = \frac{4\arccos(x-2)}{\sqrt{9-x^2}}$ **6b**

5. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

$A^{-1} =$  $A.A^{-1} =$ **5b**

$\det A =$  $A^T =$

6. Napište rovnice lineární funkce $y = ax + b$, která prochází body $[-1; 1]$, $[-3; 7]$. Vypočtěte průsečíky se souřadnicovými osami a načrtněte graf. **8b**

7. Je dána posloupnost: $a_n = \dfrac{n+6}{n+2}$. Určete max, min, inf, sup a určete, zda je omezená.
   Načrtněte graf této posloupnosti pro $n =$ 1, 2, 3.

Max = ..........., Min=............, Inf=............, Sup=............. JE x NENÍ omezená **9b**

8. Určete parametr tak, aby matice $A = \begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix}$ byla singulární. **5b**

9. Pro funkci $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$ vypočtěte $f''(0) =$..... a určete D(f) = ………..

$f'(x) =$

**5b**

$f''(x) =$