Spojitost a limita funkce

lze definovat :

a) pomocí okolí bodu (Cauchyova definice)

b) pomocí posloupností (Heineova definice)

Funkce f je **v bodě** $\boldsymbol{C} \in D(f)$ **spojitá**, jestliže

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(f)$$

platí

$$x_n \to C \Leftrightarrow f(x_n) \to f(C).$$

Funkce $\boldsymbol{f}$ **je spojitá**, jestliže je **spojitá v každém bodě svého definičního oboru**.

Poznámka.

a) Každá elementární funkce je spojitá v libovolném bodě svého definičního oboru.

b) Funkce $y = \dfrac{5x}{x-3}$ není spojitá v bodě $x =$.

Bolzanova věta

Nechť f je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje reálné číslo $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

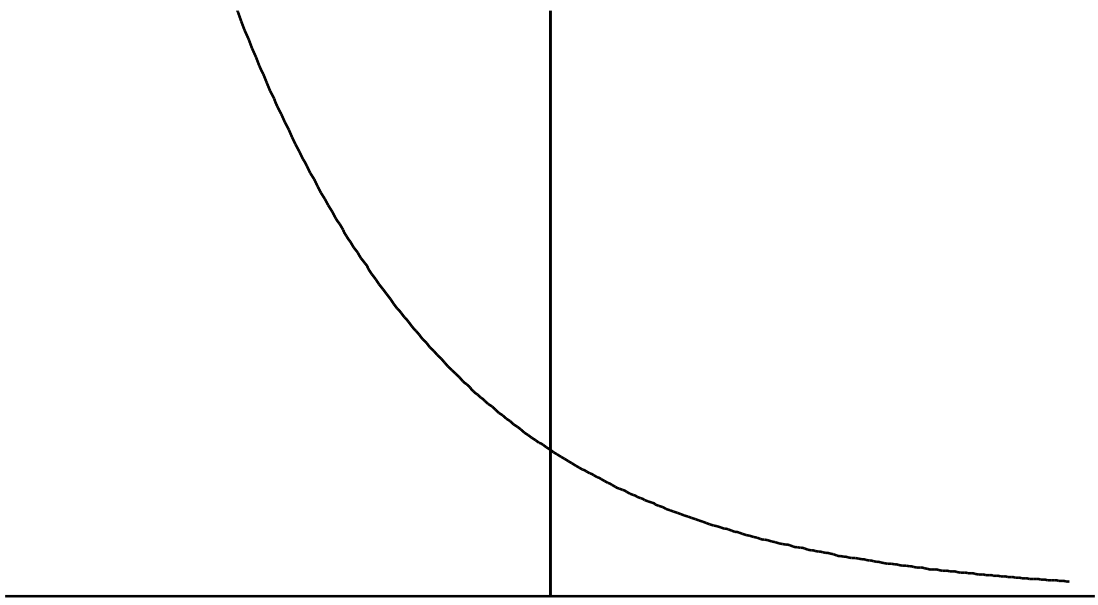
Weierstrassova věta

Nechť f je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom f nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ jak svého minima, tak i maxima.

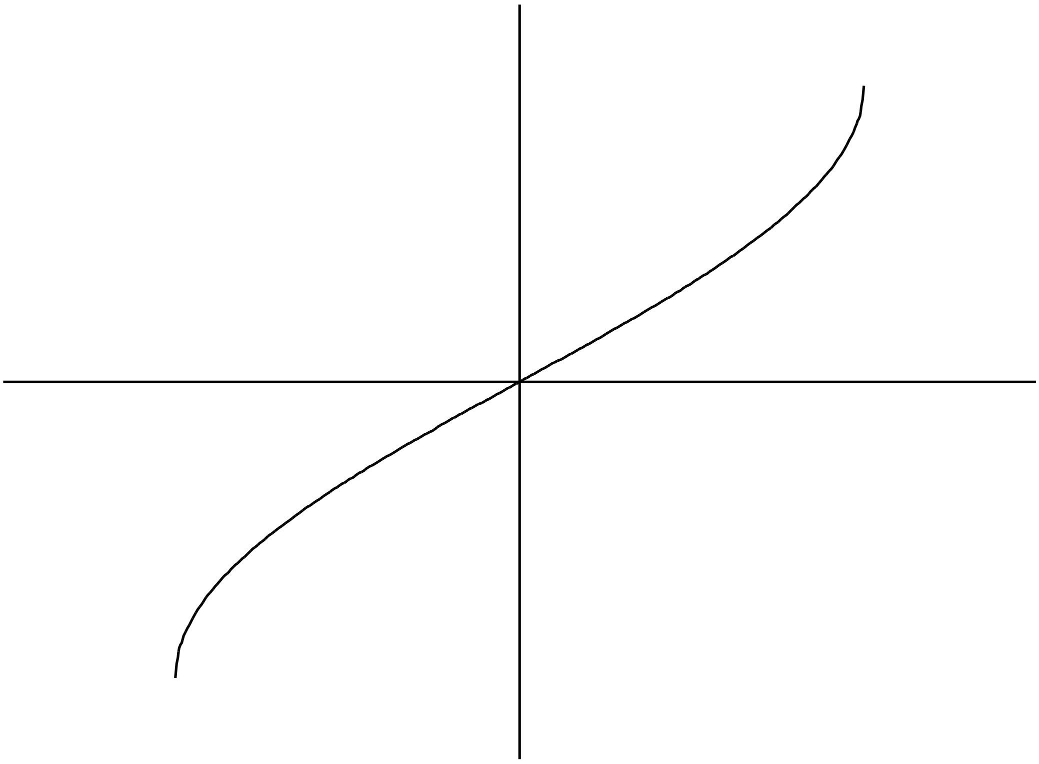
Limita funkce (příklady)

1) Z grafu funkce určeme limitu funkce v krajních bodech definičního oboru funkce:

a) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$



b) $y = \arcsin x$



2) a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(4x^2 - 3x + 18\right) =$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4x^2 - 3x + 18\right) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4x^2 - 3x + 18\right) =$

3)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_k(x)}{P_m(x)}=\begin{cases}0, & \text{je-li} \quad k<m,\\ \pm\infty, & \text{je-li} \quad k>m\\ \text{podíl } \ldots., & k=m\end{cases}$$

a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x-3}{1+5x^4}=$

b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{5x^4-4}=$

c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^5}{2+x}=$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-4x^4 + x}{x^2 + 8} =$

e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{2 + 5x^3} =$

f) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{2 + 5x^7} =$

g) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{1 + 6x} =$

h) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4 - 2}{2 - 7x} =$

4) výraz $\frac{0}{0}$

- úprava: rozklad v součin nebo použití vztahu

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

a)

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{}{}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{}{}=$$

b)

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+2x-1}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{}{}.$$

c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{}{} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1} \frac{}{} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

d)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{9-x}-2}{4-\sqrt{11+x}}=\frac{}{}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{9-x}-2\right)}{\left(4-\sqrt{11+x}\right)}\frac{}{}\frac{}{}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{}{}$$

5) výraz $\frac{k}{0} \Rightarrow$

jednostranné limity

(počítají se v bodech nespojitosti funkce)

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{5}{x-1} = \frac{}{}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{5}{x-1} = (\text{dosadíme } 1{,}1)$$

$$= \frac{}{} = ,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5}{x-1} = \text{(dosadíme 0,9)}$$

$$= \frac{}{} = -.$$

b) Dokažte, že $\lim_{x\to 0} \frac{5+x}{x^2} = \infty$**.**

6) definice Eulerova čísla:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Asymptoty funkce

***Svislá asymptota*:**

v bodech nespojitosti funkce,

$x = c$

Vodorovná asymptota:

je-li limita v <u>nevlastním</u> bodě <u>vlastní</u>,pak existuje **vodorovná asymptota** a má rovnici

$$y = a, \quad \text{resp.} \quad y = b.$$

Šikmá asymptota: $y = kx + q$

(počítáme, jestliže neex. vodorovná asymptota)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=q$$

Příklad.

Vypočtěte všechny asymptoty funkce:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$