EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

9. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:

a) pravděpodobnost náhodného jevu,

b) vlastnosti pravděpodobnosti,

c) kombinatorika,

d) náhodná veličina (diskrétní, spojitá).

Náhodný pokus x náhodný jev

Příklady náhodného pokusu

- kolo štěstí, hod kostkou
- zjišťováni volebních preferencí polit. stran voličů
- zjišťování hodnoty nákupů zákazníků

Příklady náhodného jevu

- padne nejméně 80%, padne šestka
- volič preferuje VV (ODS, TOP09, ČSSD aj.)
- hodnota nákupu zákazníka je 126 Kč

Náhodný jev

- *Jev jistý* - musí nutně nastat
- *Jev nemožný* - za žádných okolností pokusu nastat nemůže
- Jev, který spočívá v nenastoupení jevu A, je *jevem opačným:*
- *Jevy neslučitelné -* nemohou současně nastat

Elementární jevy

Elementární jevy jsou takové jevy, které:

- v dané situaci nelze rozložit na dílčí jevy
- jsou neslučitelné
- množinu všech elementárních jevů nazýváme *jevový prostor*
- jeden z elementárních jevů musí vždy nastat

Jevový prostor

Vytváření nových jevů pomocí:

- ***Sjednocení*** jevů A a B označujeme $A \cup B$
- ***Průnik***, tj. jev představovaný současným výskytem jevů A a B, označujeme $A \cap B$

Příklady náhodného jevu

Na „kole štěstí“:

1. Padnutí **alespoň** 12% je jevem jistým, padnutí **méně než** 12% je jevem nemožným!
2. Jestliže padnutí **alespoň** 50% znamená jev *A*, potom padnutí **méně než** 50% je jevem opačným k jevu *A*, tedy jevem .

Příklady náhodného jevu

Při zjišťování věku zákazníků v marketu:

3. Věk zákazníka **nejvýše** 160 let je jevem jistým, věk zákazníka **více než** 160 let je jevem nemožným.
4. Jestliže věk zákazníka **nejvýše** 20 let je jev ***A***, potom věk zákazníka **alespoň** 21 let je jevem opačným k jevu ***A***, tedy jevem $\overline{A}$

Příklady jevového prostoru

5. Jevový prostor „kolo štěstí“ se skládá z 10 elementárních jevů, možnými výsledky je totiž padnutí 12,14,15,16,20,30,50,70,80,100 %
6. Jevový prostor věku dospělých zákazníků (v rocích) daného supermarketu je 18, 19, 20, ... … – neomezená množina elementárních jevů

POZOR!!!

Náhodný jev **může** být totožný s některým elementárním jevem, nebo může zahrnovat **více** elementárních jevů, např. padnutí sudého počtu ok je sjednocením trojice elementárních jevů (2, 4, 6)

Intuitivní pravděpodobnost

Míru možnosti nebo šance výskytu hromadného náhodného jevu udává číslo, které nazýváme *pravděpodobností* (Prst) tohoto jevu

Vlastnosti pravděpodobnosti

- Prst = číslo z intervalu mezi 0 a 1
- Jevu nemožnému se přiřazuje Prst = 0
- Jevu jistému Prst = 1
- Čím větší má jev pravděpodobnost, tím větší je šance, že jev nastane

Klasická pravděpodobnost

- Náhodný pokus má *n* elementárních jevů (tj. výsledků pokusu), které mají **stejnou pravděpodobnost** výskytu
- Jev *X* nastane tehdy, když nastane jeden z *m* předem stanovených příznivých výsledků
- Potom pravděpodobnost jevu *X* je dána podílem všech příznivých výsledků a všech možných výsledků:

$$Prst(X) = \frac{m}{n}$$

Příklad

V urně je 10 koulí, z toho 6 černých a 4 bílé:

a. Stanovte pravděpodobnost, že 1 vytažená koule bude bílá

b. Stanovte pravděpodobnost, že z 5 vytažených koulí budou 3 černé a 2 bílé

Řešení příkladu a)

Elementárním jevem je kterákoliv z vytažených koulí.

Počet všech elementárních jevů n = 10, počet příznivých jevů je m = 4, (bílé)

$$\boldsymbol{Prst} = 4/10 = 0{,}4$$

Řešení příkladu b)

Elementárním jevem je kterákoliv pětice vytažených koulí.

Počet všech elementárních jevů se rovná počtu všech kombinací 5 koulí vytažených z 10 koulí, tj.

$$n = \binom{10}{5} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = 252$$

což je počet **možných** výsledků!

Řešení příkladu b)

Počet příznivých výsledků je počet těch kombinací 5 koulí, kde 3 jsou černé (ze 6) a 2 bílé (ze 4),

tedy $m = \binom{6}{3} . \binom{4}{2}$ = 20.6 = 120

Hledaná pravděpodobnost *Prst* je podle vzorce:

$$Prst = \frac{120}{252} = 0{,}461 \text{ tj. } 46{,}1\%$$

Kombinatorika

Mějme n prvků (například písmen, koulí, lidí aj.)
Kolika způsoby je možné vytvořit skupinu o x prvcích, přičemž

1. **záleží** nebo 2. **nezáleží**

na pořadí prvků ve skupině?

ad 1. Variace (písmena: ano, ona…)
ad 2. Kombinace (tažená čísla ve sportce)
Prvky ve skupině se eventuálně mohou opakovat!?

Vzorce

Variace bez opakování: $V_x(n) = \frac{n!}{(n-x)!}$

V případě, že *n* = *x*, jedná se o permutace: $P(n) = n!$

Variace s opakováním: $V_x^{op}(n) = n^x$

Kombinace bez opakování: $C_x(n) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$

Kombinace s opakováním: $C_x^{op}(n) = \binom{n+x-1}{x}$

Příklad:

1. Kolik 3-písmenných slov lze vytvořit z písmen A, B, C, D, E ?

- Jedná se o variace s opakováním, neboť záleží na pořadí písmen a písmena se mohou ve slově opakovat

$$V_x^{op}(n) = n^x = 5^3 = 125$$

Příklad:

2. Kolika způsoby lze vytvořit 3-členné předsednictvo představenstva podniku ze 6 zvolených členů?

- Jedná se o kombinace bez opakování, neboť zde nezáleží na pořadí členů předsednictva a členové se přirozeně nemohou opakovat

$$C_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$$

Náhodná veličina

***Náhodná veličina* (NV)** = Číselný výsledek náhodného pokusu.

Výsledky - obecně různé vlivem náhodných činitelů mají různé pravděpodobnosti realizace

***Náhodná veličina* (NV)** = odpovídá kvantitativnímu znaku populačního souboru (je jeho **zobecněním**)

Rozdělení náhodné veličiny

je pravidlo (předpis), které každé číselné hodnotě nebo množině hodnot přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu.

Rozdělení náhodné veličiny

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny = úplné poznání NV:

- stanovení hodnot, jichž může NV nabývat
- znalost pravděpodobností, s nimiž NV nabývá určité hodnoty, nebo hodnoty z nějakého intervalu

Vyjádření rozdělení náhodné veličiny

1. **Pravděpodobnostní funkce**
   (typ diskrétní NV)
2. **Hustota pravděpodobnosti**
   (typ spojité NV)
3. **Distribuční funkce**
   (oba typy NV: diskrétní / spojitý)

Pravděpodobnostní funkce

$p(x)$ – každé hodnotě $x \in \boldsymbol{D}$ přiřazuje odpovídající pravděpodobnost:

$$p(x) = P(X = x)$$

$p(x)$ splňuje vztahy:

$$\sum_{x \in D} p(x) = 1 \qquad P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p(x)$$

- pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $[a,b] \subset \boldsymbol{D}$, je rovna součtu pravděpodobností hodnot z tohoto intervalu ($\boldsymbol{D}$ je množina diskrétních hodnot)

Hustota pravděpodobnosti

- **Hustota pravděpodobnosti** $f(x)$ *je* nezáporná funkce splňující podmínku:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

- **Celá plocha pod grafem funkce** $f(x)$ – nad osou x je rovna 1

Distribuční funkce

- **Distribuční funkce** $F(x)$ je definovaná na R vztahem:

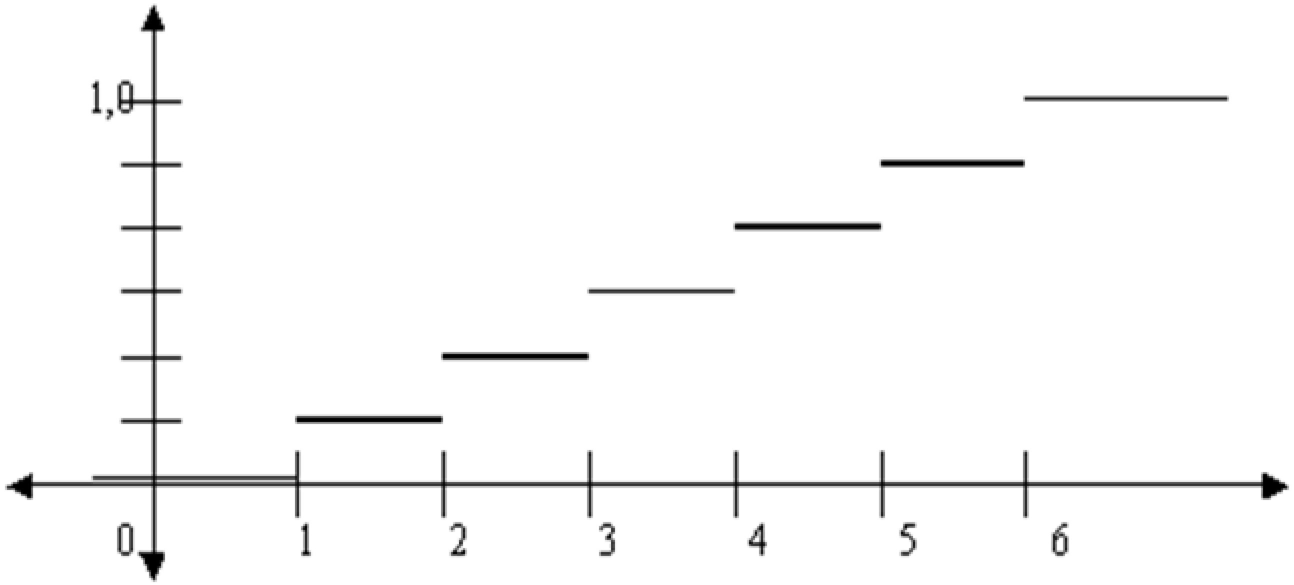
$$F(x) = P(X \leq x)$$

- $F(x)$ je neklesající funkce splňující:

$$lim\ F(x) = 0 \text{ pro } x \to -\infty$$
$$lim\ F(x) = 1 \text{ pro } x \to +\infty$$

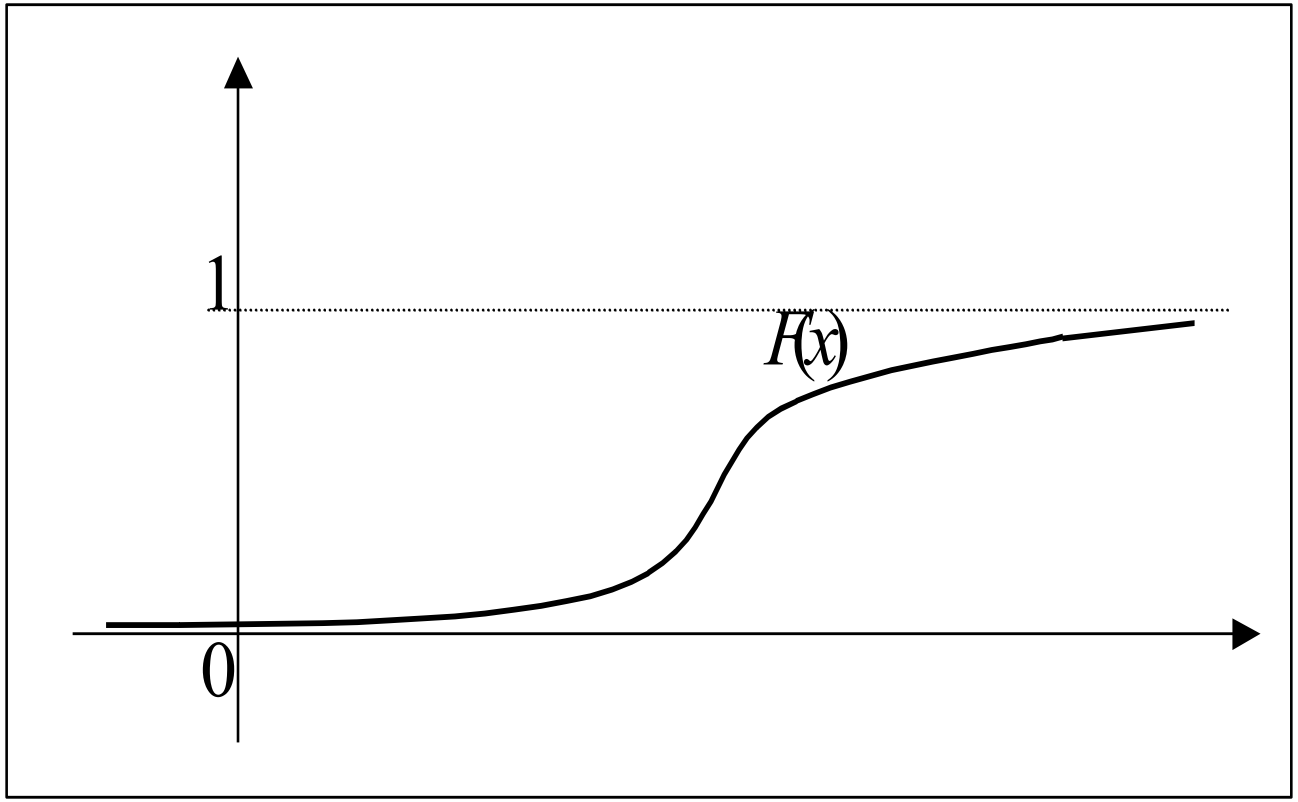
Příklad distribuční funkce pro diskrétní NV:
Hrací kostka

$$F(x) = P(X \leq x)$$



Distribuční funkce spojité NV

1. Neklesající spojitá funkce
2. Limity 0 a 1 pro $x \to \pm\infty$



Vztah mezi hustotou a distribuční funkcí

- Mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí platí následující vztahy: HP je ***derivací*** DF:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Naopak: distribuční funkce náhodné veličiny je ***neurčitým integrálem*** (primitivní funkcí) k hustotě pravděpodobnosti, tj.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Závěr přednášky

Děkuji Vám za pozornost !!!