EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY


| | |
|---|---|
| Název projektu | Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě |
| Registrační číslo projektu | CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400 |


# Dolování dat

# Statistika v kontextu dolování dat


Jan Górecki



SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

# Obsah přednášky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Typy statistických metod
- Kontingenční tabulky
- Regresní analýza
- Diskriminační analýza
- Shluková analýza

# Statistika

SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINÉ

- A formal science that deals with collection, analysis, interpretation, explanation and presentation of (usually numerical) data.

# Statistické metody

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- **Deskripční** – cílem je popsat základní charakteristiky daných dat
- **Konfirmační** – cílem je potvrdit resp. vyvrátit zkoumanou hypotézu
- **Explorační** – cílem je "objevit" možnou hypotézu, která je podporovaná daty

# Kontingenční tabulky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- zjišťování vztahu mezi dvěma kategoriálními veličinami

čtyřpolní tabulka

| | Úvěr ano | Úvěr ne | ∑ |
|---|---|---|---|
| Vysoký příjem | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $r_1$ |
| Nízký příjem | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $r_2$ |
| ∑ | $s_1$ | $s_2$ | n |

| příjem | úvěr |
|---|---|
| vysoký | ano |
| vysoký | ano |
| nízký | ne |
| nízký | ano |
| nízký | ano |
| nízký | ne |
| vysoký | ano |
| vysoký | ano |
| nízký | ne |
| vysoký | ano |
| nízký | ne |
| nízký | ano |

# Kontingenční tabulky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

## $\chi^2$ test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}\frac{(a_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}} = n \times \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}\frac{\left(a_{ij} - \frac{r_i \cdot s_j}{n}\right)^2}{r_i \cdot s_j}$$

pro $\chi^2 \geq \chi^2_{(R-1)(S-1)}(\alpha)$ předpokládáme závislost mezi X a Y

$o_{ij}$ …očekávané množství při platnosti hypotézy o nezávislosti veličin

# Regresní analýza

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

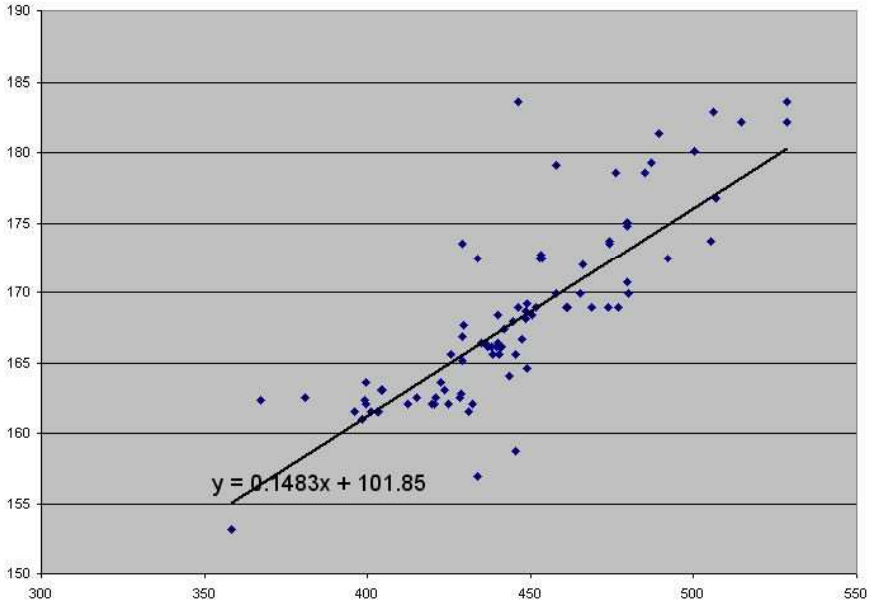
- zjišťování funkční závislosti jedné numerické (spojité) veličiny na jiných numerických veličinách

**lineární regrese pro dvě veličiny x a y:**

$y = \beta_1 x + \beta_0 + \varepsilon.$

Hodnoty koeficientů ($\beta_1$ a $\beta_0$) se zjišťují pomocí:

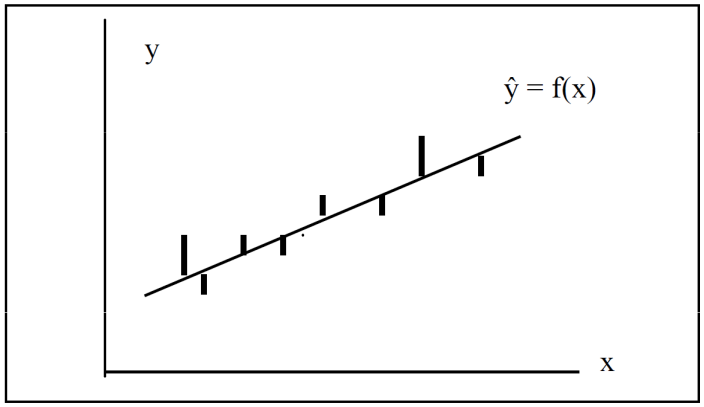
**Metoda nejmenších čtverců**



# Metoda nejmenších čtverců

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Tato metoda minimalizuje rozdíly mezi pozorovanou hodnotou *y* a očekávanou hodnotou $\hat{y}=f(x)$ spočítanou v tomto případě na základě funkce $\beta_1 x + \beta_0$




- uvažujeme druhou mocninu (kvadrát, čtverec) těchto rozdílů:

$$(y - f(x))^2$$

Úlohu pro *n* pozorování lze tedy formálně zapsat jako hledání

$$\underset{(\beta_0,\beta_1)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

# Diskriminační analýza

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- pro odlišení příkladů patřících do různých tříd

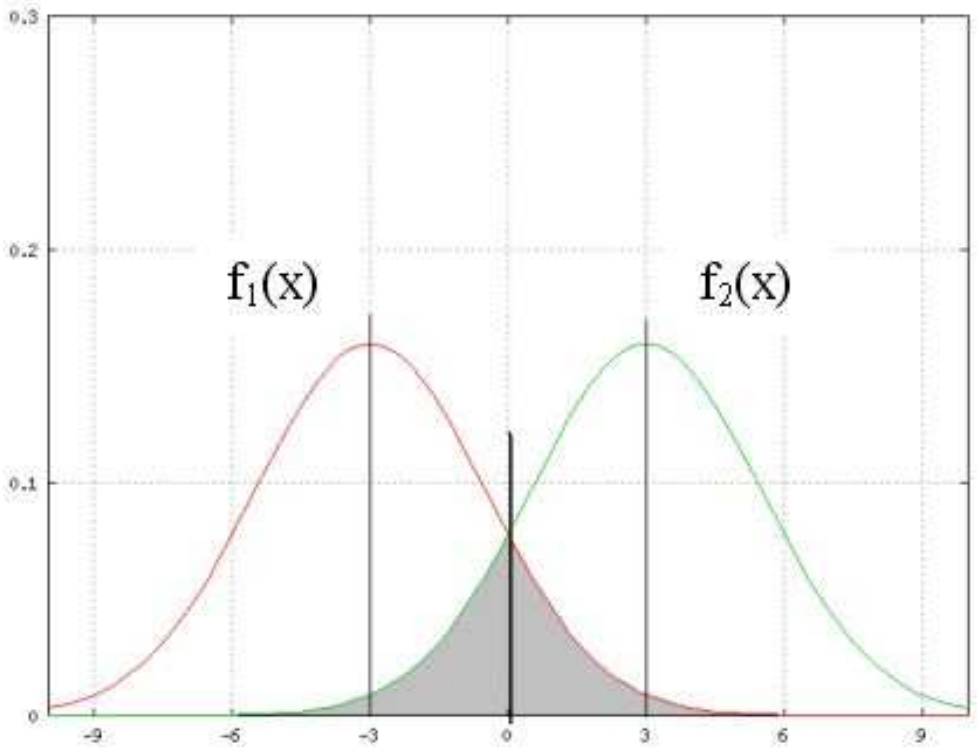
- Předpokládáme, že ke každé třídě (hodnotě nominální veličiny) $c_j$, j=1,…,R existuje (diskriminační) funkce $f_j$ taková, že

$$f_j(\mathbf{x}) = \max_i f_i(\mathbf{x})$$

právě když příklad $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ patří do třídy $c_j$.

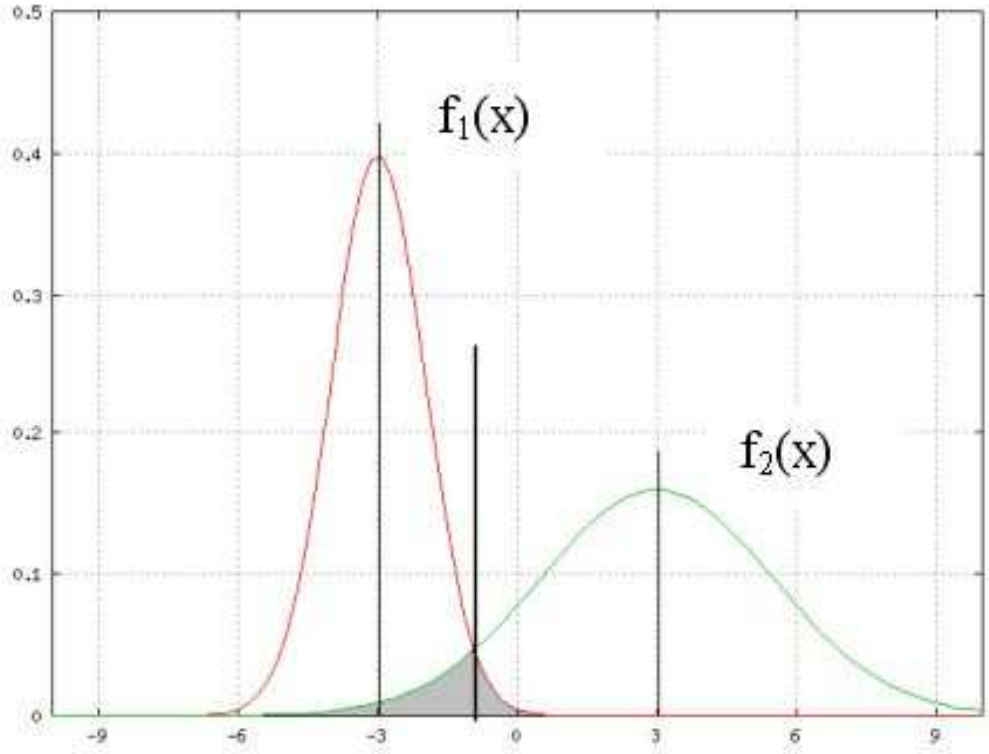
# $f_1$ i $f_2$ stejný rozptyl

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



# $f_1$ a $f_2$ různý rozptyl

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



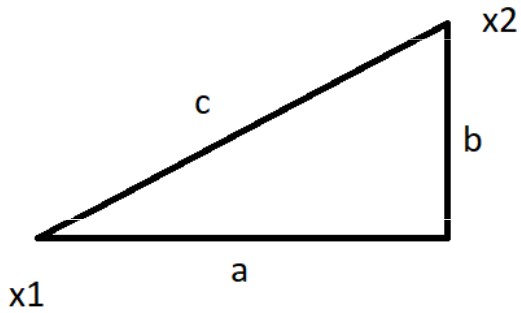
# Shluková analýza

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- slouží pro nalezení skupin (shluků) navzájem si podobných příkladů
- Např. dva příklady $\boldsymbol{x_1} = [x_{11},\ldots,x_{1m}]$ a $\boldsymbol{x_2} = [x_{21},\ldots,x_{2m}]$

Eukleidovská vzdálenost

$$d_E(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_{1j} - x_{2j})^2}$$

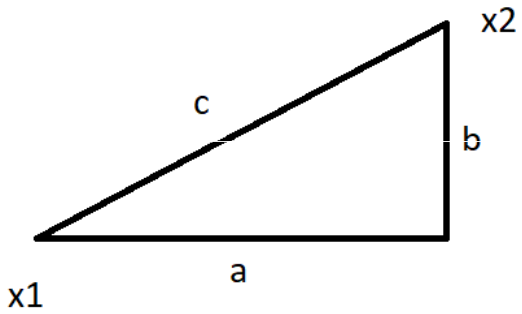



$d_E(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}) = c$

# Hammingova vzdálenost

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$d_H(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \sum_{j=1}^{m} |x_{1j} - x_{2j}|$$

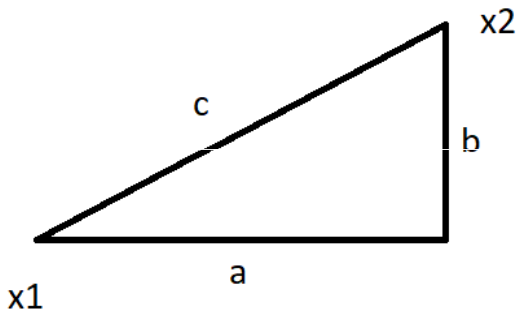



$$d_E(x_1,x_2) = a+b$$

# Čebyševova vzdálenost

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

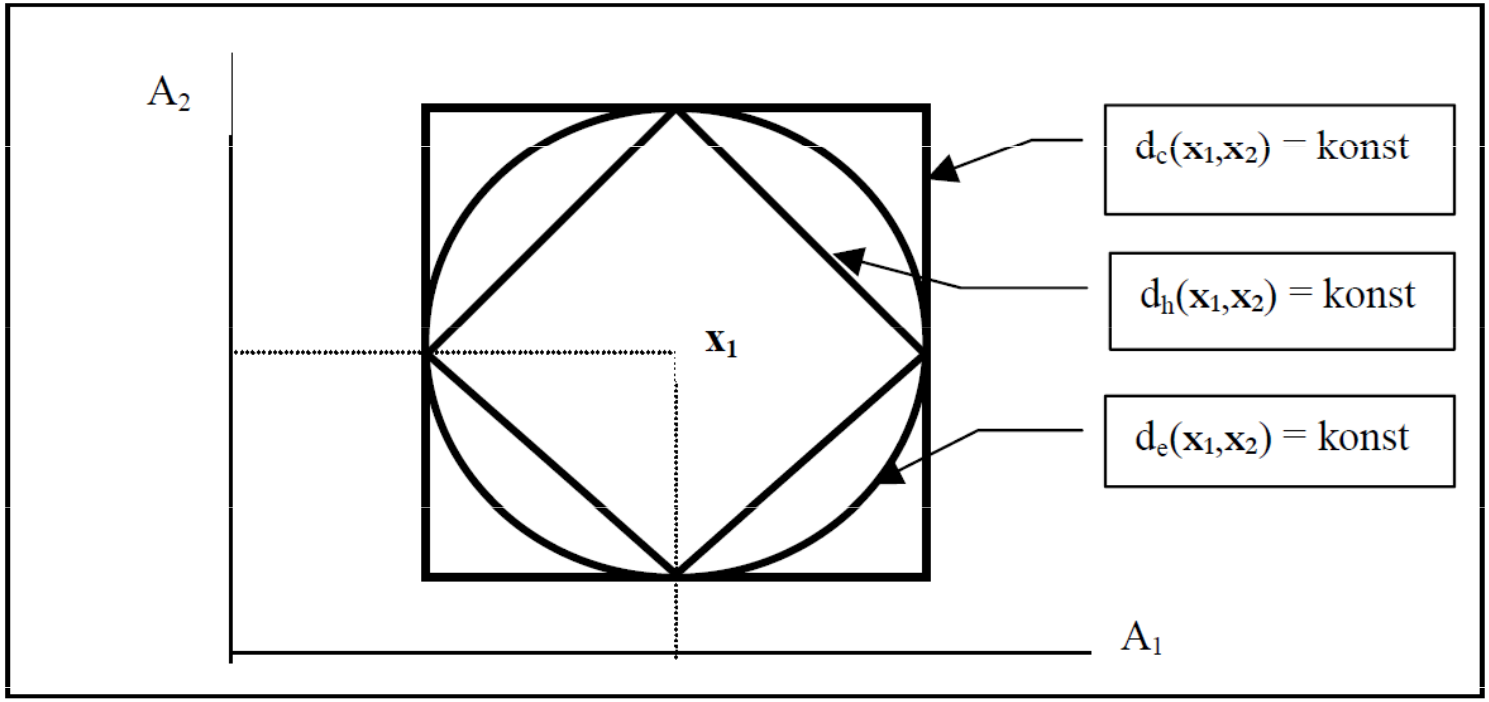
$$d_C(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \max_j |x_{1j} - x_{2j}|$$




$$d_E(x_1,x_2) = a$$

# Rozdíl mezi $d_H(x_1,x_2)$, $d_E(x_1,x_2)$ a $d_C(x_1,x_2)$ ve 2D

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ




Pozor: pro 1D všechny vzdálenosti splývají (dávají stejný výsledek)

# Normování

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Výše uvedené míry vzdálenosti závisí na měřítku veličin. Proto je třeba veličiny normovat
- Konkrétní hodnota se obvykle dělí nějakou jinou hodnotou:
  - směrodatnou odchylkou
  - rozpětím (max-min).

# Metody shlukové analýzy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- hierarchické shlukování,
- metoda *K*-středů (*K*-means clustering).

# Hierarchické shlukování

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Při hierarchickém shlukování se obvykle postupuje metodou „zdola nahoru“. Začíná se tedy v situaci, kdy každý příklad tvoří jeden samostatný shluk. Postupně se pak jednotlivé shluky spojují, až skončíme s jedním shlukem obsahujícím všechny příklady

**Algoritmus hierarchického shlukování**

**Inicializace**

1. **urči vzájemné vzdálenosti mezi všemi příklady**
2. **zařaď každý přiklad do samostatného shluku**

**hlavní cyklus**

**1. dokud je vice než jeden shluk**

**1.1. najdi dva navzájem nejbližší shluky a spoj je**

**1.2. spočítej pro tento nový shluk jeho vzdálenost od ostatnich shluků**

# Vzdálenost mezi shluky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- *metoda nejbližšího souseda* - vzdálenost mezi shluky $U$ a $V$ je dána minimem ze vzdálenosti mezi jejich příklady

$$D(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \min_{k,l} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l),\ \mathbf{x}_k \in \mathbf{U},\ \mathbf{x}_l \in \mathbf{V}$$

- *metoda nejvzdálenějšího souseda* - vzdálenost mezi shluky $U$ a $V$ je dána maximem ze vzdálenosti mezi jejich příklady

$$D(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \max_{k,l} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l),\ \mathbf{x}_k \in \mathbf{U},\ \mathbf{x}_l \in \mathbf{V}$$

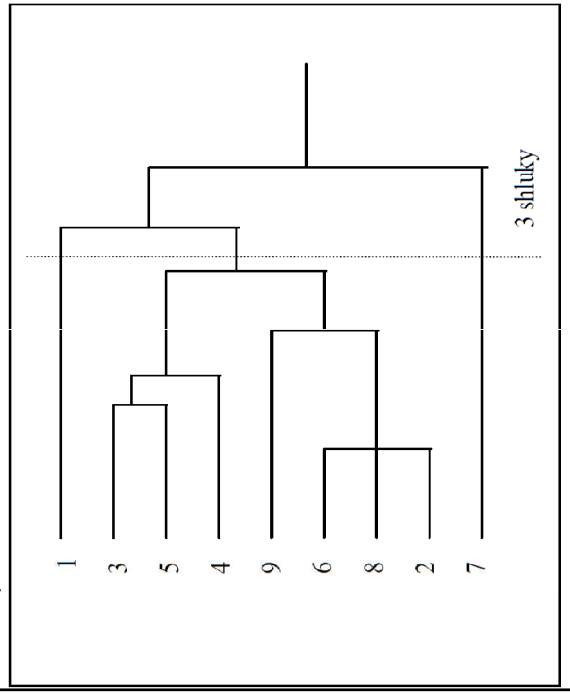
- *metoda průměrné vzdálenosti* - vzdálenost mezi shluky $U$ a $V$ je dána průměrem ze vzdálenosti mezi jejich příklady ($n_U$ je počet příkladů ve shluku **U** a $n_V$ je počet příkladů ve shluku **V**)

$$D(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \frac{1}{n_U n_V} \sum_{k=1}^{n_U} \sum_{l=1}^{n_V} d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_l)$$

# Dendrogram

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Proces hierarchického shlukování bývá zachycen v podobě tzv. dendrogramu. Ten ukazuje (odspoda nahoru) postupné spojováni shluků počínaje očíslovanými příklady. Optimální počet shluků zde není předem znám, odvodíme ho až rozborem výsledků – tak, že někde dendrogram „rozřízneme“

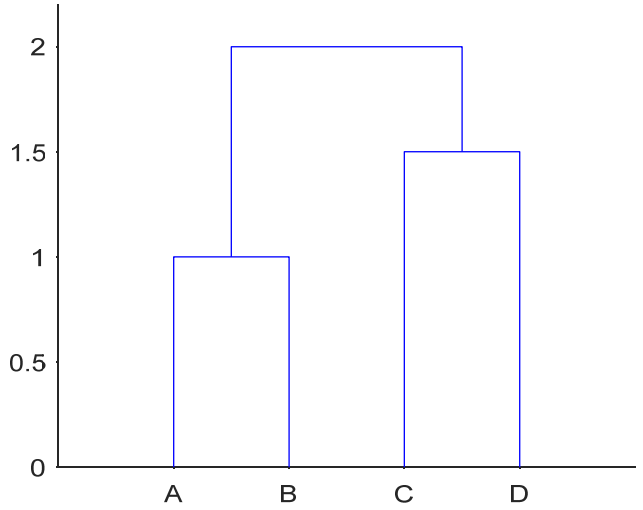


# Příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Jak proběhne hierarchické shlukování pro 4 jednorozměrné body
A = [0], B = [1], C = [3] a D = [4,5]
pro *eukleidovskou* vzdálenost a metodu *nejbližšího* souseda?

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| B | | | | |
| C | | | | |
| D | | | | |



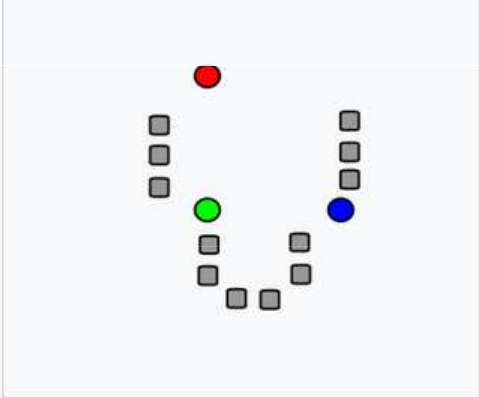
# Metoda *K* –středů - Algoritmus

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

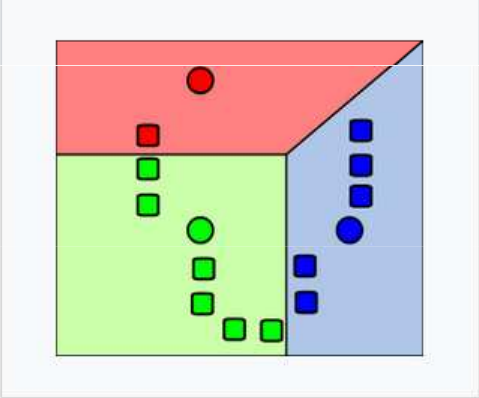
1. urči centroidy pro všechny shluky v aktuálním rozkladu (v prvním opakování zcela náhodně)
2. pro každý příklad **x**
   - 2.1. urči vzdálenosti $d(\mathbf{x},\mathbf{c}_k)$, k=1,…,K kde $\mathbf{c}_k$ je centroid *k*-tého shluku
   - 2.2. urči centroid $\mathbf{c}_l$ tak, že $d(\mathbf{x},\mathbf{c}_l) = \min_k d(\mathbf{x},\mathbf{c}_k)$
   - 2.3. není-li **x** součástí shluku *l* (k jehož centroidu $\mathbf{c}_l$ má nejblíže) přesuň **x** do shluku *l*
3. došlo-li k nějakému přesunu potom jdi na 1, jinak konec

# Ukázka algoritmu K-středů

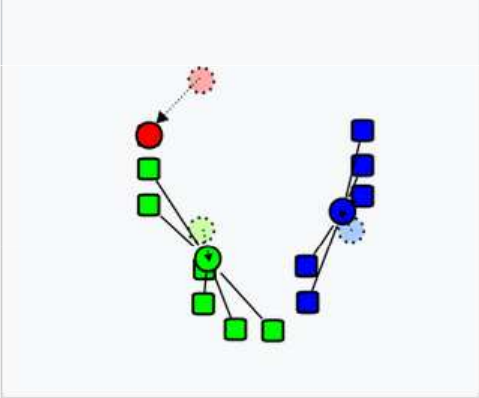
SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



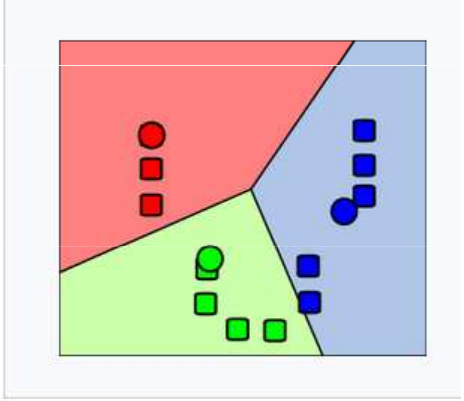
1. *k* výchozích centroidů (zde je *k*=3) se náhodně umístí v prostoru dat (shlukované objekty šedé, centroidy barevné)



2. Objekty se přiradí nejbližším centroidům, čímž vznikne *k* shluků. Centroidy tak definují Voroného teselaci prostoru.



3. Přepočtou se centroidy shluků tak, aby šlo o těžiště objektů, jež patří do těchto shluků.



4. Kroky 2 a 3 se opakují, dokud nedojde k ustálení (konvergence).

# Děkuji za pozornost

Některé snímky převzaty od:

prof. Ing. Petr Berka, CSc. berka@vse.cz