

STATISTIKA

4. PREZENTACE



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

*Téma přednášky:
diskrétní pravděpodobnostní
modely*

- a) Stejněměrné rozdělení,*
- b) Binomické rozdělení,*
- c) Poissonovo rozdělení.*

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Náhodná veličina



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Náhodná veličina = soubor všech hodnot znaku + rozdělení pravděpodobnosti hodnot

- některé hodnoty se nabývají častěji než jiné → mají větší pravděpodobnost výskytu

- hodnoty znaku statistických jednotek se „generují“ podle

pravděpodobnostního rozdělení

Příklady diskrétní náhodné veličiny



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

1. Jistý hotel má 100 pokojů, celkový počet obsazených pokojů 1. července je náhodná veličina X s možnými hodnotami $x = 0, 1, 2, \dots, 100$
2. Počet zákazníků v supermarketu mezi 12 až 18 hod. je náhodná veličina X , která může **teoreticky** nabývat jakékoliv nezáporné celočíselné hodnoty $x \geq 0$

Příklady diskrétní náhodné veličiny



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

3. Rozdíl mezi počtem zákazníků ve dvou supermarketech (Kaufland, Tesco) v jednom dni je náhodná veličina X , jež může teoreticky nabýt jakékoliv celočíselné hodnoty

$$x = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

1. Diskrétní model pr-sti rozdělení: Stejnoměrné rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Diskrétní náhodná veličina X
nabývá právě k různých hodnot: $1, 2, 3, \dots, k$
se stejnou pravděpodobností

$$P(x) = \frac{1}{k}$$

pro $x = 1, 2, 3, \dots, k$

Stejněměrné rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k+1}{2}$

obecný vzorec: $E(X) = \sum_x xp(x)$

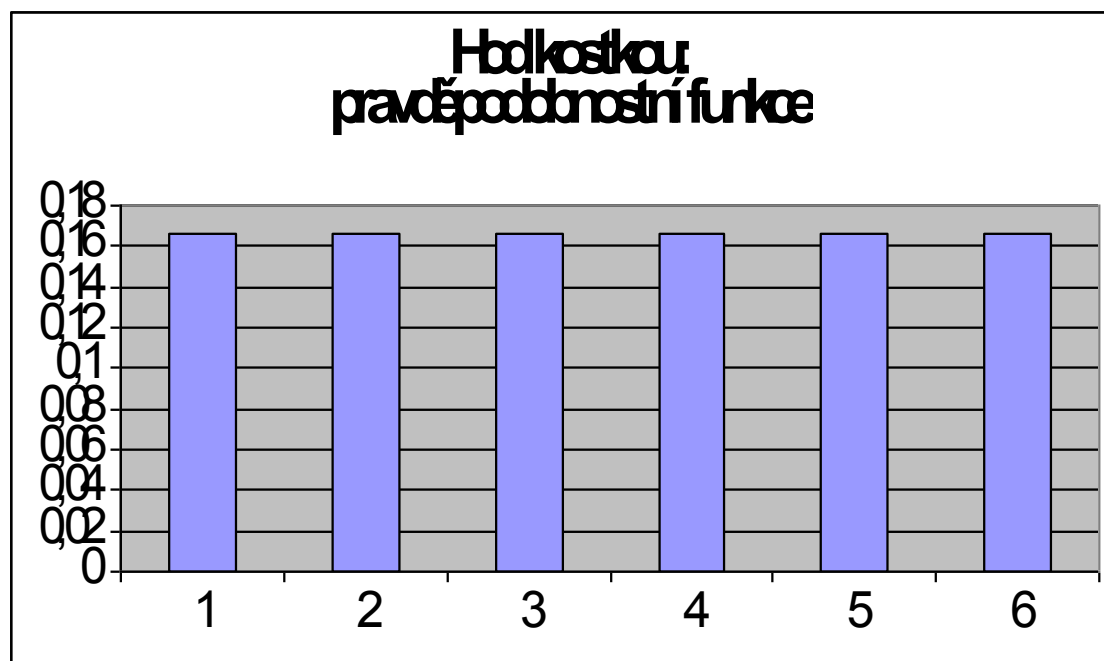
Rozptyl: $Var(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$

obecný vzorec: $Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x)$

Příklad – hod kostkou



- Střední hodnota: $E(X) = (6+1)/2 = 3,5$
- Rozptyl: $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2,92$





2. Model: Binomické rozdělení

n pokusů s alternativním rozdělením,
celkem x krát úspěch a $n-x$ krát neúspěch,
 p pravděpodobnost úspěchu

Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$P(x | n; p) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

pravděpodobnost, že při n -krát opakovaném
alternativním procesu nastane x krát úspěch a $n-x$ krát neúspěch

Charakteristiky binomického rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- Střední hodnota: $E(X) = n.p$
- Rozptyl: $Var(X) = n.p.(1-p)$
- Směrodatná odchylka: $\sigma(X) =$

Příklad



Je známo, že při epidemii chřipky onemocní každý třetí student, tj. pravděpodobnost onemocnění je $1/3 = 0,333$, tj. $p = 1/3$.

Zjistěte pravděpodobnost, že ve studijní skupině s 20 studenty onemocní každý druhý

$$n = 20, p = 1/3, x = 10 \Rightarrow P(10 | 20; 1/3) =$$

$$= \frac{20!}{10! \cdot 10!} 0,333^{10} \cdot 0,667^{10} = 20 \cdot 0,333 = 0,092 \quad (9,2 \%)$$

$$E(X) = 20 \cdot 1/3 = 6,67$$

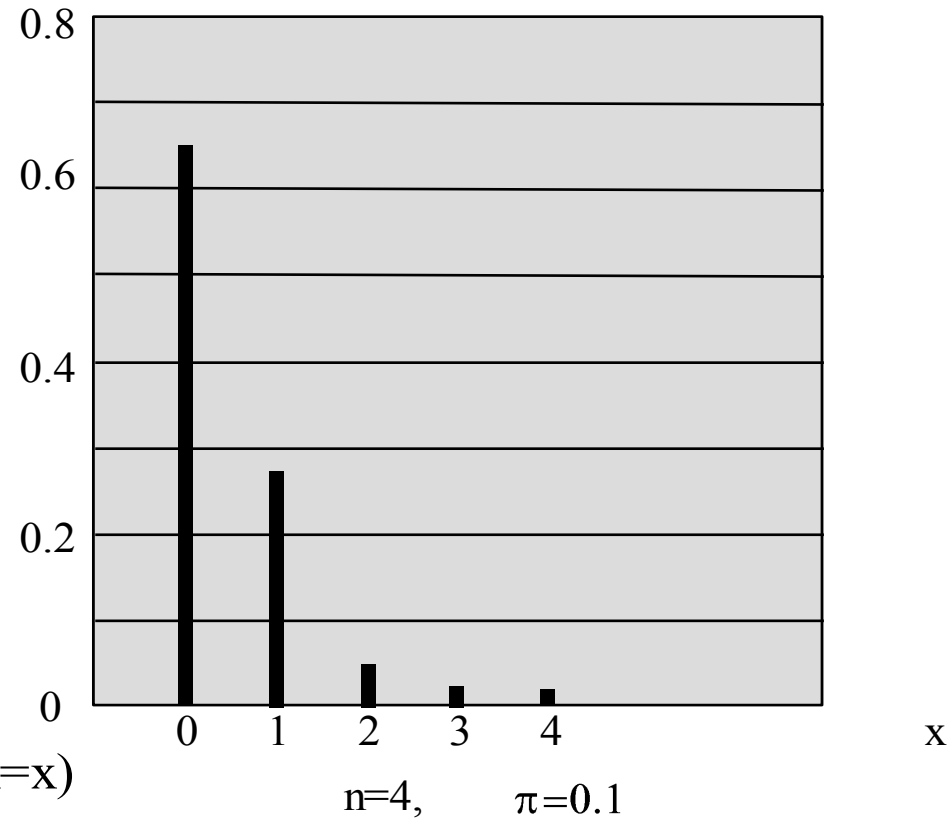
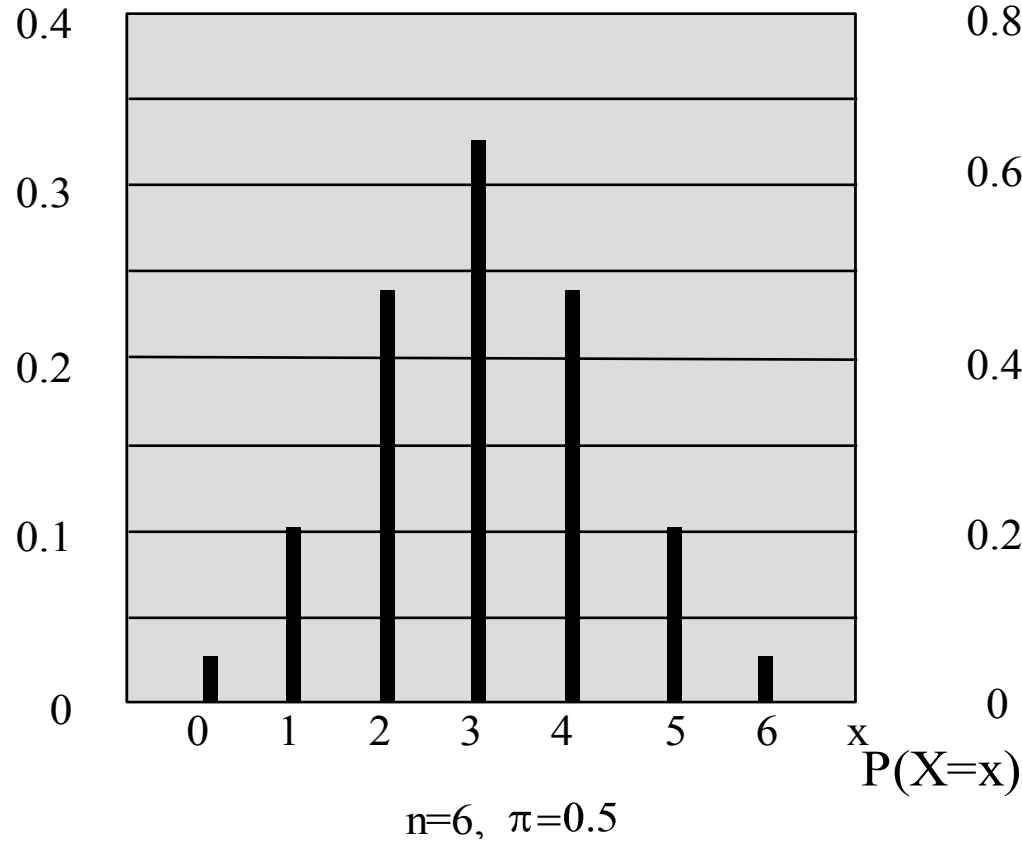
$$Var(X) = 20 \cdot 1/3 \cdot 2/3 = 4,44$$

$$\sigma(X) = 2,11$$

Binomické rozdělení – různé parametry



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



3. Model: Poissonovo rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například:

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu,
- zákazníci přicházející do prodejny,
- automobily zastavující u benzínového čerpadla.

Takové jevy vznikají v tzv.

Poissonově procesu !!!

Poissonovo rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- X - náhodná veličina = počet výskytu jevu
Poissonova procesu
v daném časovém intervalu délky t
(např. za 1 minutu, 1 hodinu apod.)
- + rozdělení pr-stí počtu výskytů
(tj. s jakou pr-stí nastane v daném čas.
intervalu určitý počet výskytů jevu)

Vlastnosti Poissonova procesu



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

3 vlastnosti:

1. Počet výskytu jevu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu
2. Střední hodnota počtu výskytu jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu
3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu



Vlastnosti Poissonova rozdělení

- Pravděpodobnost výskytu x jevů Poissonova procesu X :

$$P(x | \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

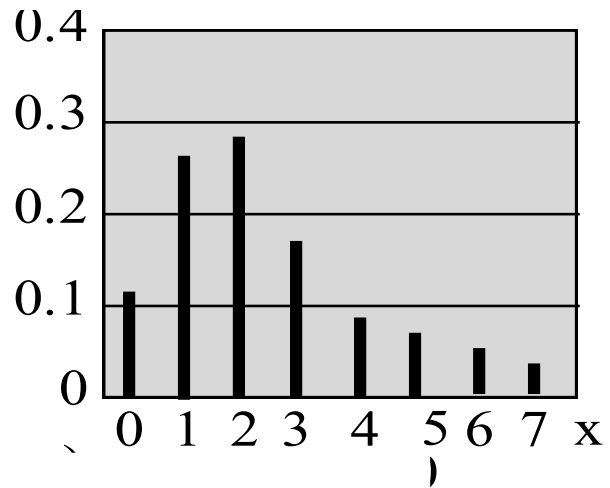
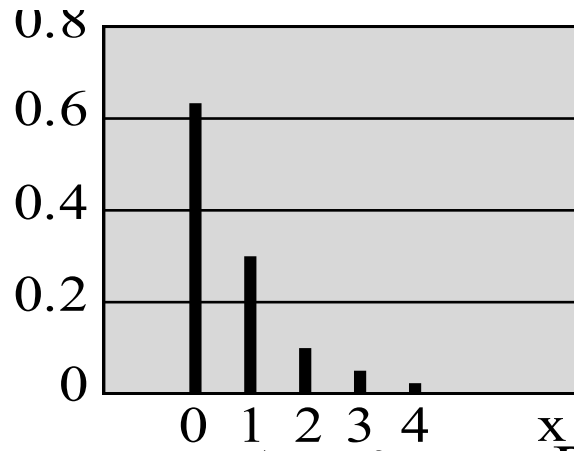
- λ, t - parametry Poissonova rozdělení
- x – počet výskytů jevu
- λ - intenzita Poissonova procesu (střední hodnota výskytů jevů)
- t - délka časového intervalu

$$E(X) = \lambda.t \quad Var(X) = \lambda.t \quad \sigma(X) =$$

Poissonovo rozdělení s různými parametry ($t = 1$)

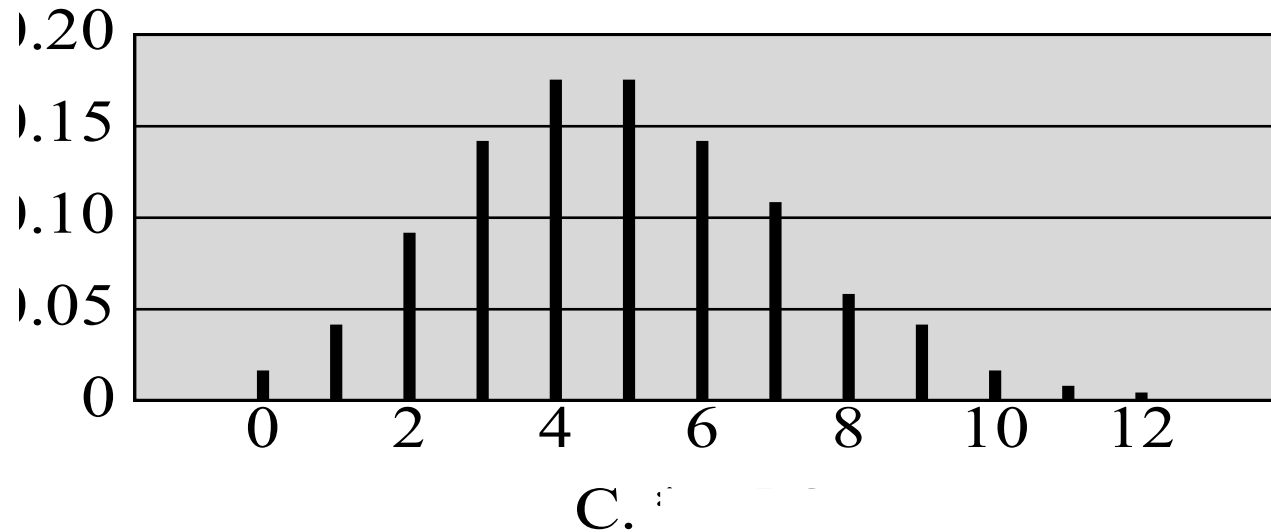


$\lambda = 0,5$



$\lambda = 2$

$\lambda = 5$



Příklad – Poissonovo rozdělení



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Zákazníci přicházejí náhodně do opravy obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravy přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení:

$$P(2 | 4,1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0,1465$$

Střední hodnota $E(X) = 4$. rozptyl $Var(X) = 4$,
směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{4} = 2$

Diskrétní náhodná veličina - obecně



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina X .

Bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,20	0,40	0,25	0,10	0,03	0,01

Řešení:

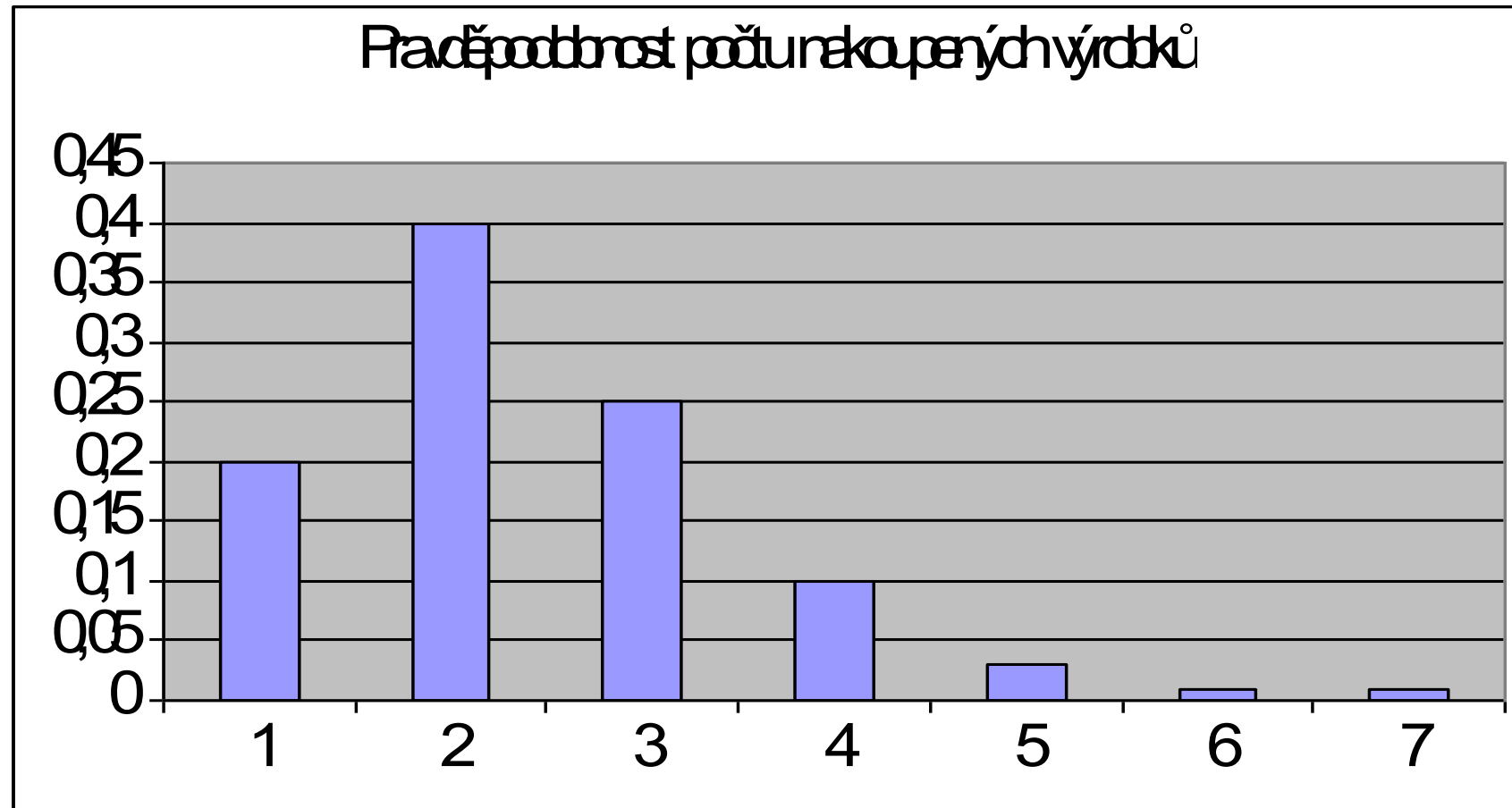
Střední hodnota počtu druhů zboží zakoupeného jedním zákazníkem

$$E(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,03 + 5 \cdot 0,01 = 1,37$$

Diskrétní náhodná veličina - obecně



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



Diskrétní náhodná veličina - obecně



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nabývá maximální hodnotu 0,4 pro $x = 1$: $Mod(X) = 1$

- Medián: $p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1) = 0,2+0,4 = 0,6 \geq 0,5$

$$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + \dots + p(X=5) = 0,4+0,25+0,1+0,03+0,01 \\ = 0,7 \geq 1 - 0,5 = 0,5$$

Podle definice je medián: $Med(X) = 1$

- $Var(X) = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,25 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,03 + 5^2 \cdot 0,01 - 1,37^2 = 3,39 - 1,88 = 1,51$
- $\sigma(x) = \sqrt{1,51} = 1,23$

Závěr přednášky



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Děkuji Vám za pozornost !!!