EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

2. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Témata přednášky:

a) maticové rovnice,

b) výpočet determinantů,

c) soustava lineárních rovnic.

Maticové rovnice

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Platí vztahy:

1) pro regulární matici D

platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E$,

2) pro matici X platí:

$$XE = EX = X.$$

Maticové rovnice - příklad

Řešte maticovou rovnici

$$2X - B = 3XA,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Každé čtvercové matici A přiřadíme číslo, které budeme označovat $\det A$ a nazývat determinantem matice A.

Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, jestliže $\det A \neq 0$.

Výpočet determinantu 2. řádu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Výpočet determinantu 3. řádu

Sarussovo pravidlo:

Vlastnosti determinantu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

1) Determinant matice A se rovná determinantu A^T.

2) Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva rovnoběžné řádky (resp. dva rovnoběžné sloupce), změní determinant znaménko.

Vlastnosti determinantu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

3) Společného nenulového činitele k všech prvků jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

4) Determinant matice se rovná nule, jestliže:

a) všechny prvky aspoň jednoho řádku (resp. sloupce) jsou rovny nule,

b) jeden řádek (resp. sloupec) matice je LK řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

Vlastnosti determinantu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

5) Jsou-li *A, B* čtvercové matice stejného řádu, platí :

$$\det(AB) = \det A \,.\, \det B.$$

Regulární x singulární matice

Určete parametry v daných maticích tak, aby matice *A, C* byly singulární a matice *B, D* byly regulární. Matice jsou:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3+b & 6 \\ 6-b & b \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ d^2 & 2d & 1 \\ 2d & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte determinanty:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} a+x & x \\ -x & x-a \end{vmatrix} = a^2$$

Upravte a vypočtěte determinant

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

Upravte a vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte příklad:

Pro která *a* je determinant D záporný?

$$D = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých nazveme soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
\qquad \text{(S)}
$$

Rozšířená matice soustavy

Matice

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy** (S).

Frobeniova věta

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení tehdy a jen tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Kolik řešení má soustava?

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nechť soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých.

Potom platí:
a) je-li $h = n$, pak soustava (S) má právě jedno řešení,

b) je-li $h < n$, pak soustava (S) má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h$ parametrech.

Příklad:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4,$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,$$
$$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7.$$

Příklad:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 19 \end{array}\right)$$

Příklad:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

Příklad:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

Cramerovo pravidlo

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Pomocí Cramerova pravidla můžeme řešit soustavu lineárních rovnic, je-li matice soustavy regulární.

Cramerovo pravidlo

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých.

Nechť matice A této soustavy je regulární (tj. det $A \neq 0$).

Cramerovo pravidlo

SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

kde B_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i-tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Cramerovo pravidlo – příklad

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

$$x - y + 2z = 7$$

$$2x - 3y + 5z = 17$$

$$3x - 2y - z = 12.$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-12}{6} = -2,$$

$$z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{6}{6} = 1.$$

Cramerovo pravidlo - příklad

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Cramerovým pravidlem vypočtěte neznámou *y* :

$$
\begin{aligned}
-2x + y + 3z &= 1 \\
3x + 2y + 3z &= -2 \\
-x + 3y - z &= 8.
\end{aligned}
$$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!