# Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

## Úvod

**Definice:**

Nechť je definována funkce *f* (*x* ) na množině *M*, *x*0 ∈ *M* . Nechť existuje limita

lim

*h*  0

*f*  *x*0 *h*− *f*  *x*0 *h*

. Tuto limitu nazýváme derivací funkce *f* v bodě

*x0* a značíme ji *f '*  *x*0  .

Tuto limitu nazýváme derivací funkce *f* v bodě *x0* a značíme ji *f '*  *x*0  .



*Obr. 1: Derivace funkce f v bodě x0* [3 s. 1]

**Poznámka**:

1. Pokud tato limita neexistuje, říkáme, že funkce *f* nemá v bodě *x0* derivaci.
2. Existují-li limity zleva i zprava, definujeme derivaci zleva či zprava.
3. Z definice plyne, že derivace vyjadřuje směrnici tečny funkce *f* v bodě *x0*.

V tab. 1 jsou uvedeny vzorce pro derivace elementárních funkcí.

*Tab. 1: Derivace elementárních funkcí [1 s. 95]*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Funkce** | **Derivace** | **Definiční obor** |
| *y*=*C* | *y '* =0 | *x* ∈ℝ |
| *y*=*xa* | *y '* =*a xa*−1 | Obor mocninnéfunkce, *a* ∈ℝ |
| *y*=e*x* | *y '* =e*x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=*ax* | *y '* =*ax* ln *a* | *x* ∈ℝ , *a*0 |
| *y*=ln *x* | *y '* = 1*x* | *x* ∈0, ∞ |
| *y*=log *a x* | *y '* = 1 *x* ln *a* | *x* ∈0, ∞ , *a*0 |
| *y*=sin *x* | *y '* =cos *x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=cos *x* | *y*=−sin *x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=tg *x* | *y '* = 1 =1+ tg2 *x*cos2 *x* | *x* ∉(2k +1) *π, k* ∈ℤ2 |
| *y*=cotg *x* | *y '* =− 1 =−(1+cotg2 *x*)sin2 *x* | *x* ∉ *k π, k* ∈ℤ |
| *y*=arcsin *x* | *y '* = 1 1−*x*2 | ∣*x*∣1 |
| *y*=arccos *x* | *y '* =− 1 1− *x*2 | ∣*x*∣1 |
| *y*=arctg *x* | *y '* = 1 1*x*2 | *x* ∈ℝ |
| *y*=arccotg *x* | *y '* =− 1 1 *x*2 | *x* ∈ℝ |
| *y*=sinh *x* | *y '* =cosh *x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=cosh *x* | *y '* =sinh *x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=tgh *x* | *y '* = 1 =1−tgh 2 *x*cosh 2 *x* | *x* ∈ℝ |
| *y*=cotgh *x* | *y '* =− 1 =1−cotgh2 *x*sinh2 *x* | *x* ∈−∞ *,* 0∪0, ∞ |

## Pravidla pro derivování

Nechť funkce *u* a *v* mají v bodě *x* ∈ *M* derivace *f '* ( *x*), *g '* ( *x*) , potom platí: Pravidla pro derivování součtu, rozdílu:

*u**v* *'* =*u'* *v'*

*u*−*v* *'* =*u'* −*v'*

Pravidlo pro derivování součinu:

Pravidlo pro derivování podílu:

*uv* *'* =*u' v**uv '*

 *u*  *'* = *u' v*−*uv '*

∀ *x* ∈ *M* je *v*( *x*)≠0

*v v*2

Nechť funkce *g* ( *x*) má derivaci v bodě *x0* a funkce *f* ( *y*) má derivaci v bodě

*y*0=*g* ( *x*0) , potom platí tzv. pravidlo pro derivaci složené funkce:

*f* (*g* ( *x*))*'* = *f '* ( *g* ( *x*0)) *g '* ( *x*0)

### Řešené příklady

Vypočítáme derivace následujících funkcí:

**1.** *y*=4 *x*3+ *x*2−3 *x*

Použijeme vzorce pro součet a rozdíl:

*y '* =3⋅4 *x*2+ 2 *x*−3=12 *x*2+2 *x*−3

1. *y*=2 *x*⋅sin *x*

Použijeme vzorec pro součin:

*y '* =2⋅sin *x*+ 2 *x*⋅cos *x*

1. *y*= ln *x x*2

Použijeme vzorec pro podíl: 1⋅*x*2−ln *x*⋅2x

*y '* = *x* = *x* (1−2ln *x*)=1−2 ln *x*

( *x*2)2

*x*4 *x*3

**4.** *y*=ln (3 *x*+ 1)

Použijeme vzorec pro složenou funkci.

Nejprve si musíme uvědomit, že 3 *x* +1 je vnitřní funkce a logaritmus je vnější funkce.

Zderivujeme tedy nejprve logaritmus:

*y '* = 1

(3 *x*+ 1)

Vynásobíme to derivací vnitřní funkce:

*y '* = 1 ⋅3= 3

3 *x* +1 3 *x* +1

1. *y*=cos

*x*2− *x*

sin *x*

( )

Tento příklad už je komplexnější. Máme zde jak složenou funkci, tak podíl.

(*x*2− *x* ) ( 2 *x*−1)sin *x* −(*x*2−*x*) cos *x*

*y '* =−sin

sin *x*

⋅

(sin *x*)2

1. *y*=tg(e*x*)⋅3*x*

Tuto funkci budeme derivovat podle vzorce součinu, takže nejprve zderivujeme

*y*=tg(e*x*) podle derivace složené funkce.

Poté tuto derivaci dosadíme do součinu.

*y*= 1 ⋅3*x*⋅*e x*+ tg(e*x* )⋅3*x*⋅ln 3 cos2e *x*

## Lokální význam znaménka první derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Každá funkce *f* má svůj definiční obor (*Df*). Definiční obor je interval všech hodnot

*x*, pro které má daná funkce *f* smysl.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě *x*0 ∈ *Df* **lokální maximum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu *x*0 tak, že ∀ *x* ∈*O* je *f* (*x* )≤ *f* ( *x*0 ) .

Řekneme, že funkce *f* má v bodě *x*0 ∈ *Df* **lokální minimum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu *x*0 tak, že ∀ *x* ∈*O* je *f* ( *x* )≥ *f* ( *x*0 ) .

Lokální minimum a maximum se označuje jako **lokální extrém**. V případě ostré nerovnosti se nazývá ostrý lokální extrém.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě *x*0 ∈ *Df* **absolutní globální minimum**, jestliže

∀ *x* ∈ *D f* je *f* ( *x* )≥ *f* ( *x*0 ) .

Řekneme, že funkce *f* má v bodě *x*0 ∈ *Df* **absolutní globální maximum**, jestliže

∀ *x* ∈ *D f* je *f* ( *x* )≤ *f* ( *x*0 ) .

Funkce může mít extrém pouze v bodech, kde je první derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

Nechť *f '* ( *x*0)=0 . Je-li *f ' '* ( *x*0 ) > 0 , má funkce v tomto bodě lokální minimum, jestliže *f ' '* ( *x*0 ) < 0, má funkce v tomto bodě lokální maximum.

**Poznámka**:

Zderivujeme-li funkci, výsledkem je obecně opět funkce. Má-li tato nová funkce derivaci, nazveme ji obecně druhou derivací původní funkce.

Nechť *O*= *L*∪*P* , kde *L* je levé okolí *O* bodu *x*0 a *P* je pravé okolí *O* bodu *x*0.

Je-li *f '* ( *x*0) > 0 , je funkce *f* v *x*0 rostoucí. Je-li *f '* ( *x*0) < 0 , je funkce *f* v *x*0 klesající.

Je-li ∀ *x* ∈ *L f '* ( *x*) > 0 a ∀ *x* ∈ *P f '* ( *x*) < 0 , má funkce *f* v *x*0 lokální maximum.

Je-li ∀ *x* ∈ *L f '* ( *x*) < 0 a ∀ *x* ∈ *P f '* ( *x*) > 0 , má funkce *f* v *x*0 lokální minimum.

## Lokální význam znaménka druhé derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Nechť má funkce *f* v bodě *x*0 derivaci. Je-li *f ' '* ( *x* ) > 0 , řekneme, že graf funkce

*f* **leží nad tečnou** o rovnici *y*− *f '* ( *x*0)= *f '* ( *x*0 )( *x*− *x*0).

Nechť má funkce *f* v bodě *x*0 derivaci. Je-li *f ' '* ( *x* ) < 0 , řekneme, že graf funkce

*f* **leží pod tečnou** o rovnici *y*− *f '* ( *x*0)= *f '* ( *x*0 )( *x*− *x*0).

Označme *L* jako levé okolí bodu *x*0. Je-li ∀ *x* ∈ *L* graf funkce nad tečnou a ∀ *x* ∈ *P* pod tečnou a má-li funkce v okolí bodu *x*0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce *f* má v *x*0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme *P* jako pravé okolí bodu *x*0. Je-li ∀ *x* ∈ *L* graf funkce pod tečnou a ∀ *x* ∈ *P* nad tečnou a má-li funkce v okolí bodu *x*0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce *f* má v *x*0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme *L* levé okolí bodu *x*0. Nechť má funkce *f* v okolí bodu *x*0 spojitou derivaci. Je-li ∀ *x* ∈ *L*∪*P* graf funkce nad tečnou, nazývá se funkce **konvexní** v okolí bodu *x*0.

Označme *P* pravé okolí bodu *x*0. Nechť má funkce *f* v okolí bodu *x*0 spojitou derivaci. Je-li ∀ *x* ∈ *L*∪*P* graf funkce pod tečnou, nazývá se funkce **konkávní** v okolí bodu *x*0.

Nechť má funkce *f* spojitou derivaci v okolí *O* bodu *x*0. Je-li ∀ *x* ∈*O f ' '* ( *x*0 ) > 0, je funkce *f* v *x*0 konvexní.

Nechť má funkce *f* spojitou derivaci v okolí *O* bodu *x*0. Je-li ∀ *x* ∈*O f ' '* ( *x*0 ) < 0, je funkce *f* v *x*0 konkávní.

Nechť *O*= *L*∪*P* :

Je-li ∀ *x* ∈ *L f ' '* (*x* ) > 0 a ∀ *x* ∈ *P f ' '* ( *x* ) < 0, má funkce *f* v bodě

*x*0 inflexi.

Je-li ∀ *x* ∈ *L f ' '* (*x* ) < 0 a ∀ *x* ∈ *P f ' '* ( *x* ) > 0, má funkce *f* v bodě

*x*0 inflexi.

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, kde je druhá derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

### Řešené příklady

Nalezneme intervaly, ve kterých funkce klesá, roste, je konkávní nebo konvexní. Dále také určíme inflexní body a lokální extrémy funkce.

**1.** *y*= 1

*x*2−1

Nejprve určíme definiční obor:

*D* ( *f* )=ℝ∖ {±1}

Funkci budeme derivovat:

*y '* = −2 *x*

(*x*2−1)2

Nyní zjistíme, pro které hodnoty bude tato funkce rovna nule, případně, kdy nebude definována. Tím zjistíme monotonii funkce.

Extrémy mohou být v bodech:

*x*=0( *y '* =0) *, x*=±1( *y '* neexistuje) .

Pro přehlednost si tyto body a intervaly zapíšeme do tabulky:

*Tab. 2: Monotonie funkce a lokální extrémy*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (−∞ *,*−1) | −1 | (−1,0) | 0 | (0, 1) | 1 | (1,∞) |
| *y '* | + |  | + |  | - |  | - |
| *y* | roste | není def. | roste | lokální max. | klesá | není def. | klesá |

Libovolné číslo z intervalu dosadíme do zderivované funkce a zjistíme, zda je výsledek kladný, tudíž funkce roste, nebo jestli je záporný a funkce klesá.

Funkci opět zderivujeme, abychom zjistili, kdy je konkávní a kdy konvexní, případně zda existují inflexní body:

=

*y '* =

−2( *x*2−1)2+2 *x* (2(*x*2−1))2 *x*

( *x*2−1)4

2(3 *x*2+1) (*x*2−1)3

Inflexní body mohou být v bodech *x*=0 *, x*=±1 . Zapíšeme si vše do tabulky:

*Tab. 3: Konvexnost, konkávnost, inflexní body*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (−∞ *,*−1) | −1 | (−1, 0) | 0 |
| *y '* | + |  | - |  |
| *y* | konvexní | není def. | konkávní | není inflexní bod |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (0, 1) | 1 | (1,∞) |
| *y '* | - |  | + |
| *y* | konkávní | Není def. | konvexní |

Stejný postup jako u první derivace:

Vybereme si libovolné číslo z intervalu, dosadíme do druhé derivace a zjistíme, kdy je funkce kladná (konvexní) a kdy záporná (konkávní).

Z tabulky je zřejmé, že inflexní bod tato funkce nemá.

# Ekonomické aplikace derivace

## Úvod

*Ekonomie se podle tradiční definice zabývá zkoumáním alokace vzácných zdrojů mezi různá alternativní užití tak, aby byly uspokojeny lidské potřeby* [8 s. 17].

Hlavní tři subjekty tvoří jednotlivec, firma, stát.

Jednotlivec určuje kdy, kde a kolik si čeho koupí, firma, co se bude vyrábět, za jakou cenu a v jakém množství, a stát vytváří právní normy, v jejichž rámci ekonomická činnost probíhá.

Z činností těchto subjektů vznikají termíny spotřeba, výroba, směna.

Spotřeba je hlavním impulsem pro existenci a rozvoj výroby a směna představuje výměnu (například rohlík za peníze).

Základem zkoumání mikroekonomie je zejména zjišťování optima a hledání rovnováhy. K jejich určování nám pomáhají tzv. ekonomické modely, které znázorňují vztahy mezi vybranými proměnnými. V těchto modelech se velmi často setkáváme s derivací, která vyjadřuje, jak se změna jedné proměnné projeví ve změně jiné proměnné.

Při řešení problémů optimalizace využíváme lokálních extrémů a nulových bodů derivace potřebné funkce.

V případě analýzy tržní rovnováhy využíváme analýzu nabídky a poptávky.

Tvary ekonomických funkcí vycházejí z praxe nějakým dlouhodobým výzkumem, nebo měřením.

Při řešení ekonomických úloh se budeme zabývat následujícími funkcemi v tabulce:

*Tab. 4: Ekonomické funkce*

|  |  |
| --- | --- |
| Označení | Popis |
| *TC*(*Q*) | …celkové náklady potřebné na produkci *Q* jednotekdaného produktu |
| *MC*(*Q*) = (*TC*)'(*Q*) | ...mezní náklady definované jako derivace celkovýchnákladů podle proměnné *Q* |
| *AC*(*Q*) | ...průměrné nákladyvýrobku | potřebné | na | produkci | jednoho |
| *TR*(*Q*) | ...celkový příjem daný prodejem *Q* jednotek danéhoproduktu |
| *MR*(*Q*) = (*TR*)'(*Q*) | ...mezní příjem definovaný jako derivace celkovéhopříjmu podle proměnné *Q* |
| *П*(*Q*) | ...celkový zisk daný produktu*П*(*Q*) = *TR*(*Q*) - *TC*(*Q*) | prodejem | *Q* | jednotek | daného |
| *TU*(*Q*) | ...užitková funkce daná spotřebou *Q* jednotek danéhostatku |
| *MU*(*Q*) | ...uvažujeme-li spotřebu pouze jednoho druhu statku, jefunkce mezního užitku první derivací celkového užitku |
| *D*(*p*) | ...poptávková funkce (vyjadřuje množství zboží, kteréspotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně) |
| *D*'(*p*) | …mezní poptávka (derivace funkce *D* podle proměnné *p*) |
| *δ*(*Q*) | …cenová funkce (inverzní funkce k funkci *D*(*p*)) |

## Mezní náklady

Mezní náklady jsou definovány jako změna celkových nákladů firmy vyvolané změnou objemu výstupu o jednotku.

Lze je vyjádřit jako derivaci celkových nákladů podle proměnné *Q* :

*MC* (*Q* )=(*TC* )*'* (*Q* )

**Příklad:**

Znáte-li funkci celkových nákladů *TC* (*Q* )=1000+5 *Q*2 *,* zjistěte, jak velké budou mezní náklady při výrobě 50 jednotek.

**Řešení:**

*TC* (*Q* )=1000+5 *Q*2

Pro *Q* = 50 stanovme funkci mezních nákladu *MC*(*Q*): *MC* *Q* =*TC* *'* *Q* 

*MC* (*Q* )=(1000+5 *Q*2)*'*

*MC* (*Q* )=10 *Q*

Dosadíme *Q* = 50 dle zadání:

*MC* (*Q*)=500

Mezní náklady jsou 500 jednotek.

## Mezní příjem

Mezní příjem je definován jako změna celkového přijmu firmy, která je důsledkem změny produkce o jednotku (Q).

Lze je vyjádřit jako derivaci celkových příjmů podle proměnné *Q* :

*MR*(*Q* )=(*TR*)*'* (*Q* )

**Příklad:**

Znáte-li funkci celkových příjmů *TR*(*Q* )=4Q2−3Q *,* zjistěte, jak velký bude mezní příjem při výrobě 50 jednotek.

**Řešení:**

*MR*(*Q* )=(*TR*)*'* (*Q* )

*MR*(*Q* )=(4Q2−3Q)*' MR*(*Q*)=8Q−3

Dosadíme Q = 50 dle zadání:

*MR*(*Q* )=8⋅50−3=397

Mezní příjem je 397 jednotek.

## Cenová elasticita poptávky

Cenová elasticita poptávky je jedna z důležitých vlastností poptávky.

Vyjadřuje citlivost poptávky na ceně, umožní rozlišit situace, kdy zvýšení ceny zvýší tržby a kdy sníží tržby.

Pro výpočet použijeme jednoduché vzorce derivace.

**Zavedený ekonomický postup:**

Koeficient cenové elasticity poptávky lze také vypočítat jako podíl procentní změny poptávaného množství a procentní změny ceny:

*∆ D* *p*

*E*  *p* = − *D*  *p* 

*D*

*∆ p*

*p*

Vzorec pro případ spojité funkce:

*E*  *p* = − *dD*  *p* ⋅ *p*

*D dp D*  *p*

**Příklad:**

Je dán vzorec pro poptávku zboží *D*  *p* = 250

10p40

a pro mezní poptávku *D*'(*p*).

Jak vypočítáme elasticitu poptávky?

**Řešení:**

*D '*  *p*  = − 250⋅10

10p402

Elasticita poptávky:

*E* ( *p*) = 250⋅10 ⋅ *p*

*D*

Pro *p* = 5

(10p+ 40)2

 250

(10p+40)

*ED* (5) = 0,56

Elasticita poptávky je rovna hodnotě 0,56.

## Maximální zisk firmy

Zisková funkce je rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

**Maximální zisk firmy**

Pro výpočet maximálního zisku budeme využívat význam první derivace pro průběh funkce. Určíme si, na kterém intervalu je funkce rostoucí a na kterém klesající, a nalezneme maximum.

**Příklad:**

Spočítejme, kdy bude mít firma maximální zisk, pokud její měsíční tržby *TR*(*Q*) a měsíční výdaje *TC*(*Q*) jsou dány rovnostmi:

*TR**Q* =−*Q*3−105 *Q*23600*Q TC* *Q* =−120*Q* 21000

**Řešení:**

*П* *Q* =*TR**Q* −*TC* *Q* 

*П* *Q* =−*Q* 3−105*Q* 23600 *Q* 120 *Q*2−1000 *П* *Q* =−*Q* 315*Q* 23600 *Q* −1000

*П '* (*Q* )=−3 *Q*2+30 *Q* +3600

*П '* *Q* =−3*Q* −40*Q* 30

Nalezneme nulové body:

*Q*=40, *Q*=−30

**Poznámka**: Záporné hodnoty nemají smysl. Rozdělíme funkci na dva intervaly:

(-∞, 40〉

〈40, ∞)

Zjistíme, kdy funkce roste a kdy klesá. Dosadíme libovolné číslo z intervalu do rovnice první derivace.

Pro první interval použijeme číslo 0 :

*П '* *Q* =−30−40  030=3600

Výsledek je kladný, na tomto intervalu funkce roste. Pro druhý interval použijeme číslo 100 :

*П* *Q* =−3 100−4010030=−23400

Výsledek je záporný, na tomto intervalu funkce klesá. Maximální zisk bude pro *Q* = 40.

**Příklad 2:**

Jaká je optimální rychlost vozidla, jestliže chceme co nejvíce ušetřit pohonné hmoty. Jestliže závislost spotřeby na rychlosti je dána funkcí *F* ( *x*)=0,01 *x*−0,0003 *x*2 .

**Poznámka**: Záporné hodnoty nemají smysl.

**Řešení:**

*F '* ( *x*)=0,01−0,0003⋅2x

Nalezneme nulové body:

0,01−0,0006 *x*=0

0,0006 *x*=0,01

*x*= 0,01

0,0006

*x*=16,7

Optimální rychlost vozidla je 16,7 kilometrů za hodinu.

## Makroekonomie

Makroekonomické modely pracují s veličinami [11 s. 25]:

1. důchod a produkce *Y*
2. spotřeba *C* a úspory *S*
3. investice

Je-li *C* = *C*(*Y*) **spotřební funkce**, pak *dC* =*C '* (*Y* ) vyjadřuje tzv. **mezní sklon ke**

*dY*

**spotřebě**. Protože *Y* = *C* + *S*, platí *S* = *Y* – *C* (*Y*). Derivace *dS* =1−*dC* ( *y*) se

*dY dY*

nazývá **mezním sklonem k úsporám**.

V makroekonomii existuje podmínka makroekonomické rovnováhy *Y* = *C* + *I*. Odtud:

*Y* −*C* (*Y* )=*I ,*

protože potřeba je závislá na důchodu.

Derivace vztahu *Y* −*C* (*Y* )=*I* podle *I* vyjadřuje změnu v rovnovážné úrovni důchodu v závislosti na změně hodnoty investice *I*:

*dY* − *dC* ⋅*dY* =1

*dI dY dI*

*dC dY* = 1 .

Pro

*dY* ≠1 je *dI*

1− *dC*

*dY*

Pro rostoucí funkce důchodu *C*, *S* je *C '* ( *Y* )=*c* > 0, *S '* (*Y* )=*s* > 0.

Je-li *C*=*c*0 +*cY* spotřební funkce, kde *c* je mezní sklon ke spotřebě, pak pro

*c*≠1 je *dY* = 1 .

*dI* 1−*c*

Pro *C*=*c*0+ *c*1 *Y* +*c*2 *Y* 2 *,* kde *c*1 > 0, *c*2 > 0, je mezní sklon ke spotřebě vyjádřen vztahem *c* (*Y* )=*C '* (*Y* )=*c*1 + 2 *c*2 *Y.*

Pak platí:

Pro *dC* ≠1 dostaneme z rovnice *dY* (1− *dC* )=1 vztah

*dY dI dY*

*dY* = 1 = 1 .

*dI* 1 *dC dY*

−

1−*c*1−2c2 *Y*

Ekonomické modely jsou často tvořeny na základě dlouhodobých pozorování a výzkumů. Při dlouhodobém růstu je **důchod** považován za veličinu závislou na čase *Y* =*Y* (*t* ) .

Poměr *r* (*t* )= *Y '* (*t* )

*Y* (*t* )

se nazývá **tempem růstu důchodu** v čase *t* .

Nechť *Y* (*t* )=*Y* eα*t* , *α* = konst.

0

Pak *Y '* (*t* )=*Y* 0

αeα*t , Y '* (*t* ) *, r* (*t* )=α.

*Y* (*t* )

Tato situace vyjadřuje **stacionární růst důchodu**.

Existují ekonomické modely, které předpokládají, že důchod *Y* a zaměstnanost *L* je ve vztahu *Y* =*AL*β , kde *A* a β jsou konstanty. Pak je **produktivita práce** definována

jako podíl *Y*

*L*

a **mezní produktivita** jako derivace *Y '* (*t* )= *dY* = *A*β*L*β−1 .

*dL*

**Příklad:**

Jaké je tempo růstu důchodu *r*(*t*) pro *t* =50 , jestliže je důchod dán funkcí

*Y* ( *t* )=*t* 3−2 *t* +50 ?

**Řešení:**

*r* (*t* )= *Y '* (*t* )

*Y* (*t* )

3 *t* 2−2

*r* (*t* )= *t* 3−2 *t* +50

Dosadíme za *t:*

3⋅502−2

*r* (*t* )= 503−2⋅50+50

*r* (*t* )=3

Tempo růstu důchodu je rovno 3.

## Procvičování

1. Celkové náklady na výrobu *Q* jednotek jsou dány funkcí

*TC* (*Q* )=23 *Q* 2+ ln(*Q* +15) . Stanovte funkci mezních nákladů *MC*(*Q*). Vyřešte pro

*Q* = 9.

1. Celkový příjem daný prodejem *Q* jednotek daného produktu je definován vzorcem *TR* (*Q*)=√350 *Q* +*Q*3 . Určete mezní příjem *MR*(*Q*). Vyřešte pro *Q* = 4.
2. Celkový užitek daný spotřebou *Q* jednotek daného statku je definován vzorce

*TU* (*Q* )= 6*Q*

√

8 *Q*+10

. Určete mezní užitek *MU*(*Q*) pro *Q* = 3. (Platí pouze

v případě pouze jednoho druhu statku).

1. Celkový poptávka je dána funkcí *D*  *p*= 100

2p14

. Určete elasticitu

poptávky pro *p* = 5.

1. Celkový zisk daný prodejem *Q* jednotek daného produktu je definován vzorcem *П* (*Q* )=(−*Q* )2+ 3*Q* −7 . Spočítejte, kdy bude mít firma maximální zisk.

Výsledky:

**1)** *MC*=414

**2)** *MR*=48

**3)** *MU* =0,364

**4)** *E*

 1

*D* 1200

=

**5)** *Q*= 3