1 Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1.1 Úvod

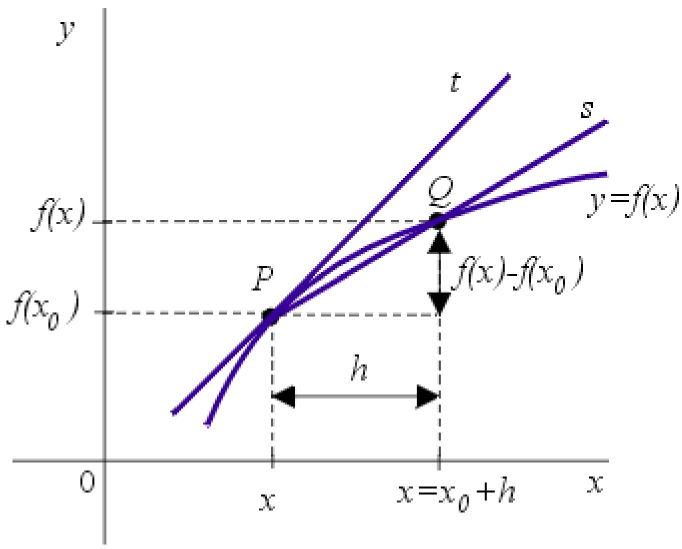
Definice:

Nechť je definována funkce $f(x)$ na množině M, $x_0 \in M$. Nechť existuje limita

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě

x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.



Obr. 1: Derivace funkce f v bodě x_0 [3 s. 1]

Poznámka:

1. Pokud tato limita neexistuje, říkáme, že funkce *f* nemá v bodě x_0 derivaci.

2. Existují-li limity zleva i zprava, definujeme derivaci zleva či zprava.

3. Z definice plyne, že derivace vyjadřuje směrnici tečny funkce *f* v bodě x_0.

V tab. 1 jsou uvedeny vzorce pro derivace elementárních funkcí.

Tab. 1: Derivace elementárních funkcí [1 s. 95]

Funkce	**Derivace**	**Definiční obor**
$y=C$	$y'=0$	$x\in\mathbb{R}$
$y=x^a$	$y'=a\,x^{a-1}$	Obor mocninné funkce, $a\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{e}^x$	$y'=\mathrm{e}^x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$x\in\mathbb{R}$, $a<0$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$x\in\langle 0,\infty\rangle$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$x\in\langle 0,\infty\rangle$, $a<0$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\cos x$	$y=-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{tg}\,x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2\,x$	$x\notin(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
$y=\mathrm{cotg}\,x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{cotg}^2\,x)$	$x\notin k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert \uparrow 1$
$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert \uparrow 1$
$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{arccotg}\,x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\sinh x$	$y'=\cosh x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\cosh x$	$y'=\sinh x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{tgh}\,x$	$y'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}=1-\mathrm{tgh}^2\,x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{cotgh}\,x$	$y'=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}=1-\mathrm{cotgh}^2\,x$	$x\in\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$

1.2 Pravidla pro derivování

Nechť funkce u a v mají v bodě $x \in M$ derivace $f'(x),\ g'(x)$, potom platí:

Pravidla pro derivování součtu, rozdílu:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

Pravidlo pro derivování součinu:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pravidlo pro derivování podílu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \forall\ x \in M \text{ je } v(x) \neq 0$$

Nechť funkce $g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $f(y)$ má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom platí tzv. pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$f(g(x))' = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

1.2.1 Řešené příklady

Vypočítáme derivace následujících funkcí:

1. $y = 4x^3 + x^2 - 3x$

Použijeme vzorce pro součet a rozdíl:

$y' = 3 \cdot 4x^2 + 2x - 3 = 12x^2 + 2x - 3$

2 $y = 2x \cdot \sin x$

Použijeme vzorec pro součin:

$y' = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$

3. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

Použijeme vzorec pro podíl:

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

4. $y=\ln(3x+1)$

Použijeme vzorec pro složenou funkci.

Nejprve si musíme uvědomit, že $3x+1$ je vnitřní funkce a logaritmus je vnější funkce.

Zderivujeme tedy nejprve logaritmus:

$$y'=\frac{1}{(3x+1)}$$

Vynásobíme to derivací vnitřní funkce:

$$y'=\frac{1}{3x+1}\cdot 3=\frac{3}{3x+1}$$

5. $y=\cos\left(\dfrac{x^2-x}{\sin x}\right)$

Tento příklad už je komplexnější. Máme zde jak složenou funkci, tak podíl.

$$y'=-\sin\left(\frac{x^2-x}{\sin x}\right)\cdot\frac{(2x-1)\sin x-(x^2-x)\cos x}{(\sin x)^2}$$

6. $y=\mathrm{tg}(\mathrm{e}^x)\cdot 3^x$

Tuto funkci budeme derivovat podle vzorce součinu, takže nejprve zderivujeme $y=\mathrm{tg}(\mathrm{e}^x)$ podle derivace složené funkce.

Poté tuto derivaci dosadíme do součinu.

$$y=\frac{1}{\cos^2\mathrm{e}^x}\cdot 3^x\cdot e^x+\mathrm{tg}(\mathrm{e}^x)\cdot 3^x\cdot\ln 3$$

1.3 Lokální význam znaménka první derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Každá funkce *f* má svůj definiční obor (*Df*). Definiční obor je interval všech hodnot *x*, pro které má daná funkce *f* smysl.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální minimum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokální minimum a maximum se označuje jako **lokální extrém**. V případě ostré nerovnosti se nazývá ostrý lokální extrém.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální minimum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální maximum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkce může mít extrém pouze v bodech, kde je první derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

Nechť $f'(x_0)=0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce v tomto bodě lokální minimum, jestliže $f''(x_0) < 0,$ má funkce v tomto bodě lokální maximum.

Poznámka:

Zderivujeme-li funkci, výsledkem je obecně opět funkce. Má-li tato nová funkce derivaci, nazveme ji obecně druhou derivací původní funkce.

Nechť $O = L \cup P$, kde *L* je levé okolí *O* bodu x_0 a *P* je pravé okolí *O* bodu x_0.

Je-li $f'(x_0) > 0$, je funkce *f* v x_0 rostoucí. Je-li $f'(x_0) < 0$, je funkce *f* v x_0 klesající.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) < 0$, má funkce *f* v x_0 lokální maximum.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) > 0$, má funkce *f* v x_0 lokální minimum.

1.4 Lokální význam znaménka druhé derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) > 0$, řekneme, že graf funkce f **leží nad tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) < 0$, řekneme, že graf funkce f **leží pod tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Označme L jako levé okolí bodu x_0. Je-li $\forall x \in L$ graf funkce nad tečnou a $\forall x \in P$ pod tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme P jako pravé okolí bodu x_0. Je-li $\forall x \in L$ graf funkce pod tečnou a $\forall x \in P$ nad tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme L levé okolí bodu x_0. Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce nad tečnou, nazývá se funkce **konvexní** v okolí bodu x_0.

Označme P pravé okolí bodu x_0. Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce pod tečnou, nazývá se funkce **konkávní** v okolí bodu x_0.

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0. Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) > 0$, je funkce f v x_0 konvexní.

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0. Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) < 0$, je funkce f v x_0 konkávní.

Nechť $O = L \cup P$:

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, kde je druhá derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

1.4.1 Řešené příklady

Nalezneme intervaly, ve kterých funkce klesá, roste, je konkávní nebo konvexní. Dále také určíme inflexní body a lokální extrémy funkce.

1. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

Nejprve určíme definiční obor:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

Funkci budeme derivovat:

$$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Nyní zjistíme, pro které hodnoty bude tato funkce rovna nule, případně, kdy nebude definována. Tím zjistíme monotonii funkce.

Extrémy mohou být v bodech:

$x=0(y'=0)$, $x=\pm 1(y'$ neexistuje) .

Pro přehlednost si tyto body a intervaly zapíšeme do tabulky:

Tab. 2: Monotonie funkce a lokální extrémy

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,\infty)$
y'	+		+		-		-
y	roste	není def.	roste	lokální max.	klesá	není def.	klesá

Libovolné číslo z intervalu dosadíme do zderivované funkce a zjistíme, zda je výsledek kladný, tudíž funkce roste, nebo jestli je záporný a funkce klesá.

Funkci opět zderivujeme, abychom zjistili, kdy je konkávní a kdy konvexní, případně zda existují inflexní body:

$$y'=\frac{-2(x^2-1)^2+2x(2(x^2-1))2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Inflexní body mohou být v bodech $x=0$, $x=\pm 1$.

Zapíšeme si vše do tabulky:

Tab. 3: Konvexnost, konkávnost, inflexní body

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
y'	+		-	
y	konvexní	není def.	konkávní	není inflexní bod

	(0, 1)	1	$(1, \infty)$
y'	-		+
y	konkávní	Není def.	konvexní

Stejný postup jako u první derivace:

Vybereme si libovolné číslo z intervalu, dosadíme do druhé derivace a zjistíme, kdy je funkce kladná (konvexní) a kdy záporná (konkávní).

Z tabulky je zřejmé, že inflexní bod tato funkce nemá.

2 Ekonomické aplikace derivace

2.1 Úvod

Ekonomie se podle tradiční definice zabývá zkoumáním alokace vzácných zdrojů mezi různá alternativní užití tak, aby byly uspokojeny lidské potřeby [8 s. 17].

Hlavní tři subjekty tvoří jednotlivec, firma, stát.
Jednotlivec určuje kdy, kde a kolik si čeho koupí, firma, co se bude vyrábět, za jakou cenu a v jakém množství, a stát vytváří právní normy, v jejichž rámci ekonomická činnost probíhá.
Z činností těchto subjektů vznikají termíny spotřeba, výroba, směna.
Spotřeba je hlavním impulsem pro existenci a rozvoj výroby a směna představuje výměnu (například rohlík za peníze).
Základem zkoumání mikroekonomie je zejména zjišťování optima a hledání rovnováhy. K jejich určování nám pomáhají tzv. ekonomické modely, které znázorňují vztahy mezi vybranými proměnnými. V těchto modelech se velmi často setkáváme s derivací, která vyjadřuje, jak se změna jedné proměnné projeví ve změně jiné proměnné.
Při řešení problémů optimalizace využíváme lokálních extrémů a nulových bodů derivace potřebné funkce.
V případě analýzy tržní rovnováhy využíváme analýzu nabídky a poptávky.
Tvary ekonomických funkcí vycházejí z praxe nějakým dlouhodobým výzkumem, nebo měřením.

Při řešení ekonomických úloh se budeme zabývat následujícími funkcemi v tabulce:

Tab. 4: Ekonomické funkce

Označení	Popis
$TC(Q)$	…celkové náklady potřebné na produkci Q jednotek daného produktu
$MC(Q) = (TC)'(Q)$	...mezní náklady definované jako derivace celkových nákladů podle proměnné Q
$AC(Q)$	...průměrné náklady potřebné na produkci jednoho výrobku
$TR(Q)$	...celkový příjem daný prodejem Q jednotek daného produktu
$MR(Q) = (TR)'(Q)$	...mezní příjem definovaný jako derivace celkového příjmu podle proměnné Q
$\Pi(Q)$	...celkový zisk daný prodejem Q jednotek daného produktu $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$
$TU(Q)$	...užitková funkce daná spotřebou Q jednotek daného statku
$MU(Q)$	...uvažujeme-li spotřebu pouze jednoho druhu statku, je funkce mezního užitku první derivací celkového užitku
$D(p)$	...poptávková funkce (vyjadřuje množství zboží, které spotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně)
$D'(p)$	…mezní poptávka (derivace funkce D podle proměnné p)
$\delta(Q)$	…cenová funkce (inverzní funkce k funkci $D(p)$)

2.2 Mezní náklady

Mezní náklady jsou definovány jako změna celkových nákladů firmy vyvolané změnou objemu výstupu o jednotku.
Lze je vyjádřit jako derivaci celkových nákladů podle proměnné Q :

$$MC(Q) = (TC)'(Q)$$

Příklad:
Znáte-li funkci celkových nákladů $TC(Q) = 1000 + 5Q^2$, zjistěte, jak velké budou mezní náklady při výrobě 50 jednotek.

Řešení:

$$TC(Q) = 1000 + 5Q^2$$

Pro Q = 50 stanovme funkci mezních nákladu $MC(Q)$:

$$MC\langle Q\rangle = \langle TC\rangle'\langle Q\rangle$$

$$MC(Q) = (1000 + 5Q^2)'$$

$$MC(Q) = 10Q$$

Dosadíme Q = 50 dle zadání:

$$MC(Q) = 500$$

Mezní náklady jsou 500 jednotek.

2.3 Mezní příjem

Mezní příjem je definován jako změna celkového přijmu firmy, která je důsledkem změny produkce o jednotku (Q).

Lze je vyjádřit jako derivaci celkových příjmů podle proměnné Q :

$$MR(Q) = (TR)'(Q)$$

Příklad:

Znáte-li funkci celkových příjmů $TR(Q) = 4Q^2 - 3Q$, zjistěte, jak velký bude mezní příjem při výrobě 50 jednotek.

Řešení:

$MR(Q) = (TR)'(Q)$

$MR(Q) = (4Q^2 - 3Q)'$

$MR(Q) = 8Q - 3$

Dosadíme Q = 50 dle zadání:

$MR(Q) = 8 \cdot 50 - 3 = 397$

Mezní příjem je 397 jednotek.

2.4 Cenová elasticita poptávky

Cenová elasticita poptávky je jedna z důležitých vlastností poptávky.

Vyjadřuje citlivost poptávky na ceně, umožní rozlišit situace, kdy zvýšení ceny zvýší tržby a kdy sníží tržby.

Pro výpočet použijeme jednoduché vzorce derivace.

Zavedený ekonomický postup:

Koeficient cenové elasticity poptávky lze také vypočítat jako podíl procentní změny poptávaného množství a procentní změny ceny:

$$E_D\langle p\rangle = -\frac{\dfrac{\Delta D\langle p\rangle}{D\langle p\rangle}}{\dfrac{\Delta p}{p}}$$

Vzorec pro případ spojité funkce:

$$E_D\langle p\rangle = -\frac{dD\langle p\rangle}{dp}\cdot\frac{p}{D\langle p\rangle}$$

Příklad:

Je dán vzorec pro poptávku zboží $D\langle p\rangle = \dfrac{250}{10p\boxtimes 40}$ a pro mezní poptávku $D'(p)$.

Jak vypočítáme elasticitu poptávky?

Řešení:

$$D'\langle p\rangle = -\frac{250\cdot 10}{\langle 10p\boxtimes 40\rangle^2}$$

Elasticita poptávky:

$$E_D(p) = \frac{250\cdot 10}{(10p+40)^2}\cdot\frac{p}{\dfrac{250}{(10p+40)}}$$

Pro $p = 5$

$$E_D(5) = 0{,}56$$

Elasticita poptávky je rovna hodnotě 0,56.

2.5 Maximální zisk firmy

Zisková funkce je rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

Maximální zisk firmy

Pro výpočet maximálního zisku budeme využívat význam první derivace pro průběh funkce. Určíme si, na kterém intervalu je funkce rostoucí a na kterém klesající, a nalezneme maximum.

Příklad:

Spočítejme, kdy bude mít firma maximální zisk, pokud její měsíční tržby $TR(Q)$ a měsíční výdaje $TC(Q)$ jsou dány rovnostmi:

$$TR(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q$$

$$TC(Q) = -120Q^2 + 1000$$

Řešení:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q + 120Q^2 - 1000$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 + 15Q^2 + 3600Q - 1000$$

$$\Pi'(Q) = -3Q^2 + 30Q + 3600$$

$$\Pi'(Q) = -3(Q - 40)(Q + 30)$$

Nalezneme nulové body:

$Q = 40$, $Q = -30$

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Rozdělíme funkci na dva intervaly:

$(-\infty, 40\rangle$

$\langle 40, \infty)$

Zjistíme, kdy funkce roste a kdy klesá. Dosadíme libovolné číslo z intervalu do rovnice první derivace.

Pro první interval použijeme číslo 0 :

$$\Pi'\langle Q\rangle=-3\langle 0-40\rangle\langle 0\boxtimes 30\rangle=3600$$

Výsledek je kladný, na tomto intervalu funkce roste.

Pro druhý interval použijeme číslo 100 :

$$\Pi\langle Q\rangle=-3\langle 100-40\rangle\langle 100\boxtimes 30\rangle=-23400$$

Výsledek je záporný, na tomto intervalu funkce klesá.

Maximální zisk bude pro Q = 40.

Příklad 2:

Jaká je optimální rychlost vozidla, jestliže chceme co nejvíce ušetřit pohonné hmoty.

Jestliže závislost spotřeby na rychlosti je dána funkcí $F(x)=0{,}01\,x-0{,}0003\,x^2$.

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Řešení:

$$F'(x)=0{,}01-0{,}0003\cdot 2\mathrm{x}$$

Nalezneme nulové body:

$$0{,}01-0{,}0006\,x=0$$
$$0{,}0006\,x=0{,}01$$
$$x=\frac{0{,}01}{0{,}0006}$$

$$x=16{,}7$$

Optimální rychlost vozidla je 16,7 kilometrů za hodinu.

2.6 Makroekonomie

Makroekonomické modely pracují s veličinami [11 s. 25]:

a) důchod a produkce *Y*

b) spotřeba *C* a úspory *S*

c) investice

Je-li $C = C(Y)$ **spotřební funkce**, pak $\frac{dC}{dY} = C'(Y)$ vyjadřuje tzv. **mezní sklon ke spotřebě**. Protože $Y = C + S$, platí $S = Y - C(Y)$. Derivace $\frac{dS}{dY} = 1 - \frac{dC(y)}{dY}$ se nazývá **mezním sklonem k úsporám**.

V makroekonomii existuje podmínka makroekonomické rovnováhy $Y = C + I$. Odtud:

$$Y - C(Y) = I,$$

protože potřeba je závislá na důchodu.

Derivace vztahu $Y - C(Y) = I$ podle *I* vyjadřuje změnu v rovnovážné úrovni důchodu v závislosti na změně hodnoty investice *I*:

$$\frac{dY}{dI} - \frac{dC}{dY} \cdot \frac{dY}{dI} = 1$$

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ je $\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}}$.

Pro rostoucí funkce důchodu *C*, *S* je $C'(Y) = c > 0, S'(Y) = s > 0$.

Je-li $C = c_0 + cY$ spotřební funkce, kde *c* je mezní sklon ke spotřebě, pak pro $c \neq 1$ je $\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c}$.

Pro $C = c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2$, kde $c_1 > 0, c_2 > 0$, je mezní sklon ke spotřebě vyjádřen vztahem $c(Y) = C'(Y) = c_1 + 2c_2 Y$.

Pak platí:

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ dostaneme z rovnice $\frac{dY}{dI}(1 - \frac{dC}{dY}) = 1$ vztah

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}} = \frac{1}{1 - c_1 - 2c_2 Y}.$$

Ekonomické modely jsou často tvořeny na základě dlouhodobých pozorování a výzkumů. Při dlouhodobém růstu je **důchod** považován za veličinu závislou na čase $Y = Y(t)$.

Poměr $r(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ se nazývá **tempem růstu důchodu** v čase t .

Nechť $Y(t) = Y_0 e^{\alpha t}$, $\alpha =$ konst.

Pak $Y'(t) = Y_0 \alpha e^{\alpha t}$, $\frac{Y'(t)}{Y(t)}$, $r(t) = \alpha$.

Tato situace vyjadřuje **stacionární růst důchodu**.

Existují ekonomické modely, které předpokládají, že důchod Y a zaměstnanost L je ve vztahu $Y = AL^{\beta}$, kde A a β jsou konstanty. Pak je **produktivita práce** definována jako podíl $\frac{Y}{L}$ a **mezní produktivita** jako derivace $Y'(t) = \frac{dY}{dL} = A\,\beta L^{\beta - 1}$.

Příklad:

Jaké je tempo růstu důchodu $r(t)$ pro $t=50$, jestliže je důchod dán funkcí $Y(t)=t^3-2t+50$?

Řešení:

$$r(t)=\frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

$$r(t)=\frac{3t^2-2}{t^3-2t+50}$$

Dosadíme za *t:*

$$r(t)=\frac{3\cdot 50^2-2}{50^3-2\cdot 50+50}$$

$$r(t)=3$$

Tempo růstu důchodu je rovno 3.

2.7 Procvičování

1) Celkové náklady na výrobu *Q* jednotek jsou dány funkcí $TC(Q)=23Q^2+\ln(Q+15)$. Stanovte funkci mezních nákladů *MC*(*Q*). Vyřešte pro $Q = 9$.

2) Celkový příjem daný prodejem *Q* jednotek daného produktu je definován vzorcem $TR(Q)=\sqrt{350Q}+Q^3$. Určete mezní příjem *MR*(*Q*). Vyřešte pro $Q = 4$.

3) Celkový užitek daný spotřebou *Q* jednotek daného statku je definován vzorce

$TU(Q)=\sqrt{\frac{6Q}{8Q+10}}$. Určete mezní užitek *MU*(*Q*) pro $Q = 3$. (Platí pouze

v případě pouze jednoho druhu statku).

4) Celkový poptávka je dána funkcí $D(p)=\frac{100}{2p⌫14}$. Určete elasticitu

poptávky pro $p = 5$.

5) Celkový zisk daný prodejem *Q* jednotek daného produktu je definován vzorcem $\Pi(Q)=(-Q)^2+3Q-7$. Spočítejte, kdy bude mít firma maximální zisk.

Výsledky:

1) $MC=414$

2) $MR=48$

3) $MU=0{,}364$

4) $E_D=\frac{1}{1200}$

5) $Q=\frac{3}{\ }$