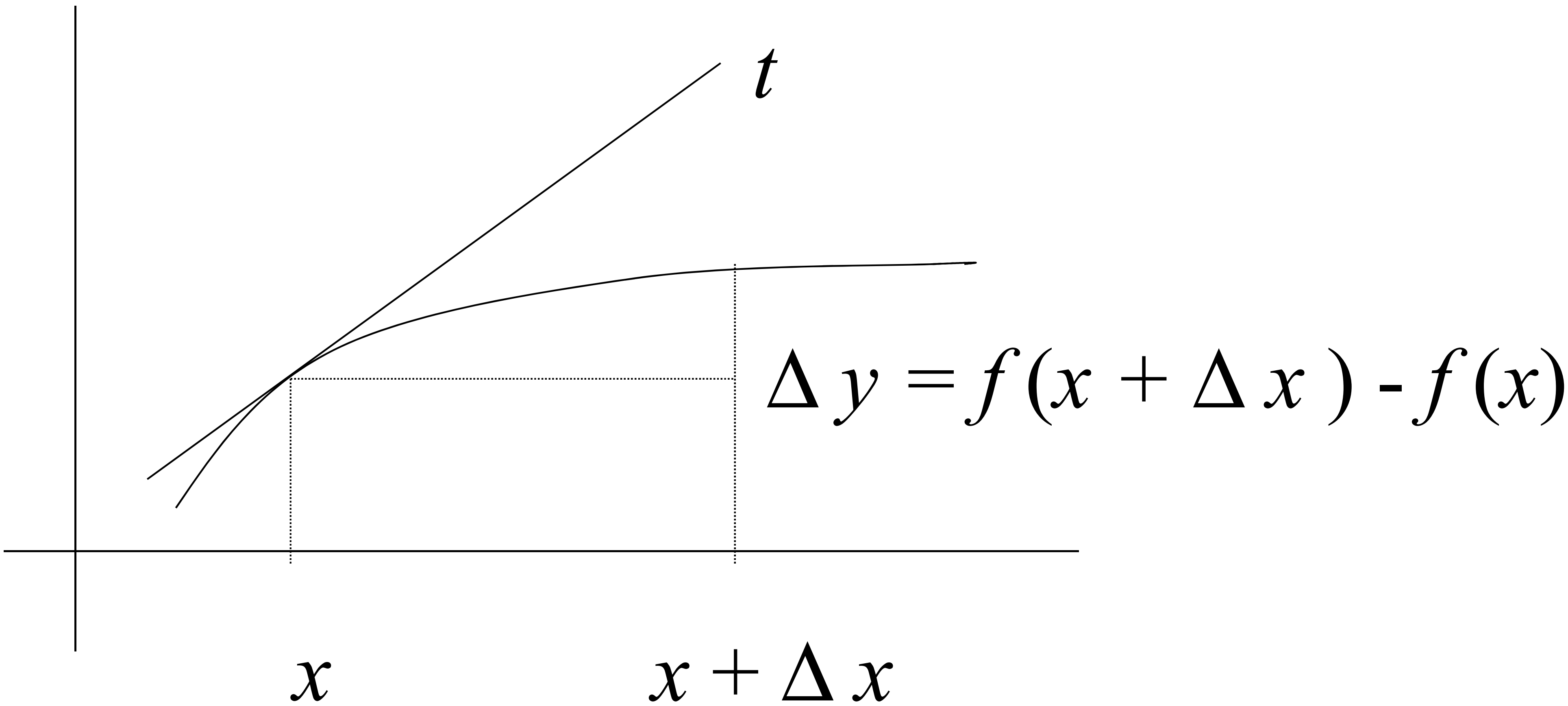
Derivace funkce

a její užití

- definice
- der. na základě definice derivace
- pravidla a vzorce
- derivace složené funkce
- n-tá derivace
- diferenciál funkce
- L´Hospitalova pravidla
- průběh funkce !!!!

Definice derivace

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$



Derivace na základě definice derivace

Příklad

$$f(x)=x^2-3x \quad \Rightarrow$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)-\left(x^2-3x\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-3x-3\Delta x-x^2+3x}{\Delta x}=$$

$$=2x-3$$

Hodnota derivace v bodě

$$f'(10) = 2 \cdot 10 - 3 = 17$$

Pravidla derivování

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}; \quad g \neq 0$$

Základní vzorce

$$(k)' = 0 \qquad \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad \Rightarrow \quad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \Rightarrow \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Příklady

1) $y = \sin^2 x$

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

2) $y = \sin x^2$

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

3) $y = \operatorname{arctg}^2 x^7$

$$y' = 2\operatorname{arctg} x^7 \cdot \frac{1}{1+\left(x^7\right)^2} \cdot 7x^6$$

Derivace vyšších řádů

Nechť f i f' je definována na množině D, pak druhá derivace:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Označení:

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad y''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad [f'(x)]'$$

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Příklad

Určete třetí derivaci $f(x) = 1/x$

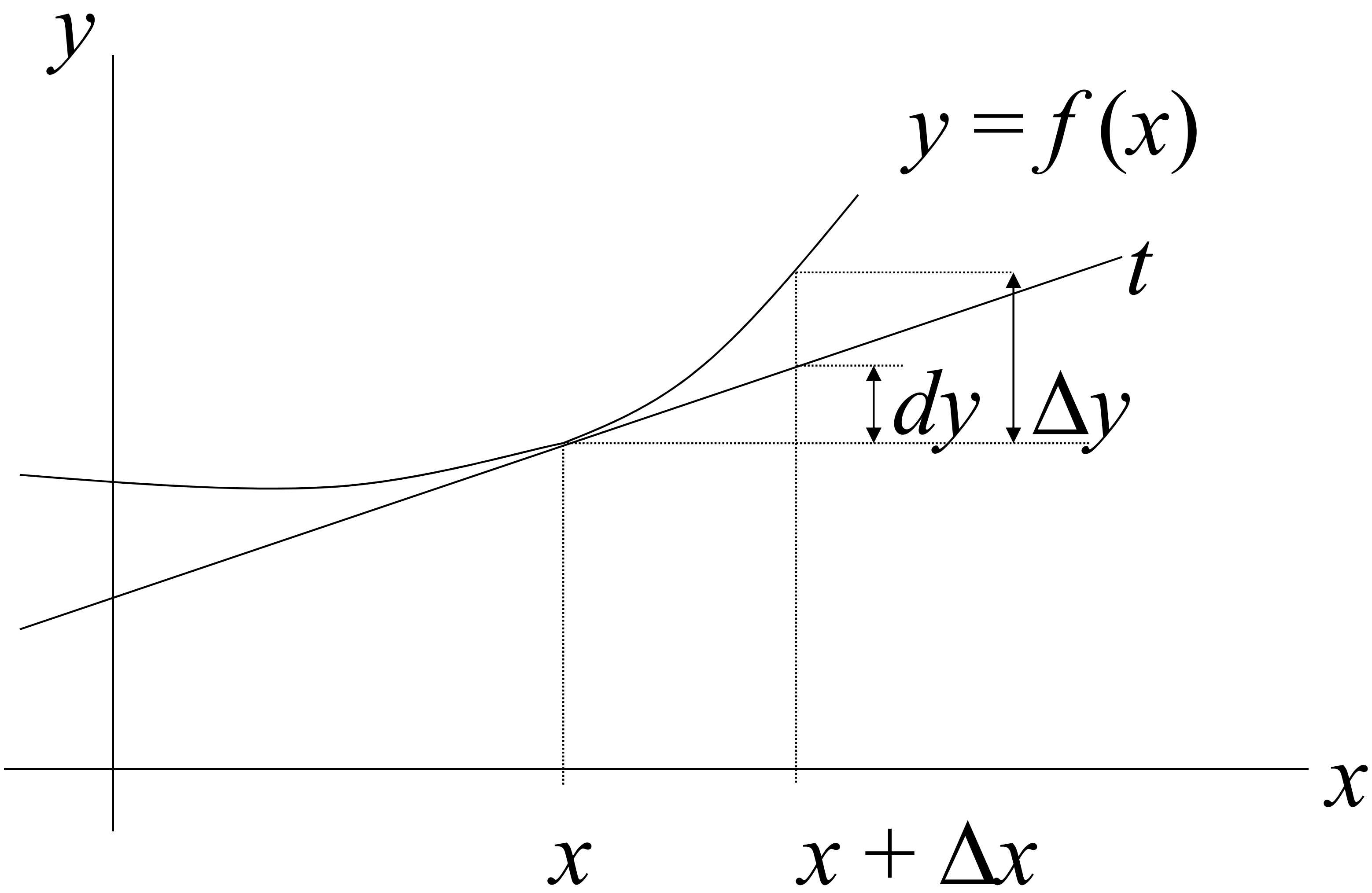
Řešení

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Diferenciál funkce



$$dy = f'(x)\cdot dx$$

Příklad

Najděme přírůstek Δy a diferenciál dy funkce $y = x^2$

a) pro libovolnou hodnotu nezávislé proměnné x a přírůstku Δx

b) pro $\Delta x = 0{,}1$ a $x = 10$

Řešení

a) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$

$$= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = \left(x^2\right)' dx = 2x dx$$

Příklad, který vypočtu samostatně

Najděme diferenciál funkce

a) $y = x^2 + x + 1$ v bodě $x = 2$ pro $\Delta x = 0,1$

b) $y = x^3$ v bodě $x = 4$

c) $y = \sqrt{x}$ pro $\Delta x = 0,01$

Řešení

a) $dy = \left(x^2 + x + 1\right)' dx = (2x + 1)dx$

$$[dy]_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0,1}} = (2 \cdot 2 + 1) \cdot 0,1 = 0,5$$

b) $dy = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx$

$$[dy]_{x=4} = 3 \cdot 16\, dx = 48\, dx$$

c) $dy = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$[dy]_{\Delta x=0,01} = \frac{0,005}{\sqrt{x}}$$

L'Hospitalova pravidla

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ 1^\infty;\ \infty^0$$

Věta (První L'Hospitalovo pravidlo):

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,\ a \in R^*$

a nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají v $O(a)$ derivace. Pak:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pozn.: Když jsou splněny podmímky věty, můžeme pravidlo použít n-krát.

Příklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$

Řešení

$$f(x)=e^x-e^{-x};\quad g(x)=2x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} 2x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$$

Věta (Druhé L'Hospitalovo pravidlo):

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty,$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty,\ a \in R^*$

a nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají v $O(a)$ derivace.

Pak:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$

Řešení

$$f(x)=\ln x,\quad g(x)=x$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty;\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$