Lineární algebra

Matice

Maticí typu ($\boldsymbol{m,n}$) nazýváme množinu prvků a_{ik} uspořádaných do m řádků a n sloupců, tj. schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pro zápis matic se používají tři typy závorek:
$A = (a_{ik}), \quad A = \|a_{ik}\|, \quad A = [a_{ik}].$

Hlavní diagonála
Vedlejší diagonála

Diagonální matice je čtvercová matice, jejíž prvky neležící v hlavní diagonále jsou nuly, tj. $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$.

Jednotková matice E je diagonální matice, jejíž prvky v hlavní diagonále jsou jedničky.

Trojúhelníková matice je matice, která má pod (resp. nad) hlavní diagonálou samé nuly.

Operace s maticemi

Rovnost matic

Matice $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ téhož typu (m,n) se sobě rovnají, mají-li na stejných místech stejné prvky:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ik} = b_{ik}\,, \forall i, \forall k.$$

Příklad.

Vypočtěme $a, b, c \in R$, jestliže platí:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & 3+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Sčítání matic,
násobení matice reálným číslem**

Příklad.

Vypočtěme $2A + 3B$, kde:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matice maticí

$$\begin{array}{ccc} A & . \; B & = C \\ (m,n) & (n,p) & (m,p) \end{array}$$

Podmínkou existence definovaného součinu AB je rovnost ….

Pro násobení matic neplatí komutativní zákon !!!!

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice A^T

Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

Hodnost $\boldsymbol{h(A)}$ matice A je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost nazýváme **ekvivalentní,** $A \approx B$.

Hodnost matice se nezmění, jestliže v matici provedeme tzv. **řádkové elementární úpravy**:

1. vyměníme dva řádky matice,

2.násobíme řádek matice nenulovým číslem,

3.přičteme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků,

4.vynecháme -li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Příklad. Určete hodnost matice:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Regulární matice
Singulární matice
LNZ, LZ

Inverzní matice A^{-1}

existuje pouze k regulární matici A a platí:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Ke každé regulární matici existuje právě jedna matice inverzní.

Vlastnosti inverzních matic:

$$E^{-1} = E,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Výpočet inverzní matice

Příklad.
Vypočtěte A^{-1} k matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(A, E) = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Maticové rovnice

Platí vztahy:

1) pro regulární matici D platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E$,

2) pro matici X platí:

$$XE = EX = X,$$

pokud je součin definován.

Příklad.

Vyjádřete matici X z maticových rovnic.

Příklad.

Řešte maticovou rovnici

$$2X - B = 3XA,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$