8. Užití diferenciálního počtu

A) L'Hospitalovo pravidlo

- používá se při výpočtu limity funkce
- omezíme se na typy „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$" (jen tohle!)

$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ = dostaneme výraz „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$" = pak

$= \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (derivujeme zvlášť čitatele a jmenovatele)

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2-4} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(2x-4)'}{(x^2-4)'} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{2x} = \frac{2}{2.2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x.2^x}{3^x-1} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1.2^x + x.2^x \ln 2^x}{3^x \ln 3} = \frac{\overset{1}{2^0} + \overset{0}{0.2^0 \ln 2}}{\underset{1}{3^0} \ln 3} = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 3}}}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x-1}{4x+5} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = „\frac{3}{0}" \Rightarrow$ nelze L'Hospitalovo pravidlo $\Rightarrow$

počítají se jednostranné limity t.j.:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} &= \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} &= \frac{+}{-} = -\infty \end{aligned}\right\} \neq \text{ takže } \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \text{neexist.}$$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{1} = \underline{\underline{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

9. Průběh funkce

Na zkoušce se bude vyskytovat následující zadání:

1) Vypočítejte P_x, P_y; asymptoty funkce, načrtněte graf. (Počítali jsme 30. 11. na přednášce)

2) Vypočítejte extrémy funkce, určete intervaly monotónnosti.

3) Vypočítejte inflexní body funkce, určete intervaly, na kterých je fce konkávní resp. konvexní.

PLATÍ:

α) Je-li $f'(x)>0$ na (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je rostoucí na (a,b).

β) Je-li $f'(x)<0$ na (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je klesající na (a,b).

POSTUP při určování extrémů:

a) vypočteme $f'(x)$

b) vypočteme stacionární body c $\Rightarrow$ vyřešením rovnice $f'(x)=0$

c) vypočteme $f''(x)$

Je-li $f''(c)>0$ $\Rightarrow$ v bodě c je lokální MINIMUM

Je-li $f''(c)<0$ $\Rightarrow$ v bodě c je lokální MAXIMUM

PLATÍ:

γ) Je-li $f''(x)>0$ na (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je konvexní na (a,b)

δ) Je-li $f''(x)<0$ na (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je konkávní na (a,b).

POSTUP při určování inflexních bodů:

a) vypočteme $f''(x)$; b) řešíme rovnici $f''(x)=0$ $\Rightarrow$ c … možná inflexní b.

c) vypočteme znaménko f'' v okolí c: $f''\ \oplus \underset{c}{|} \ominus$ nebo

$f''\ \ominus \underset{c}{|} \oplus$, pak c … INFLEXE

9. Průběh funkce

Na zkoušce se bude vyskytovat následující zadání:

1) Vypočtěte P_x, P_y; asymptoty funkce, načrtněte graf. (Počítali jsme 30.11. na přednášce)

2) Vypočtěte extrémy funkce, určete intervaly monotónnosti.

3) Vypočtěte inflexní body funkce, určete intervaly, na kterých je fce konkávní resp. konvexní.

PLATÍ:

α) Je-li $f'(x) > 0$ na (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je rostoucí na (a, b).

β) Je-li $f'(x) < 0$ na (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je klesající na (a, b).

POSTUP při určování extrémů:

a) vypočteme $f'(x)$

b) vypočteme stacionární body c $\to$ vyřešením rovnice $f'(x) = 0$

c) vypočteme $f''(x)$

Je-li $f''(c) > 0$ $\Rightarrow$ v bodě c je lokální MINIMUM

Je-li $f''(c) < 0$ $\Rightarrow$ v bodě c je lokální MAXIMUM

PLATÍ: γ) Je-li $f''(x) > 0$ na (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je konvexní na (a, b)

δ) Je-li $f''(x) < 0$ na (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ je konkávní na (a, b).

POSTUP při určování inflexních bodů:

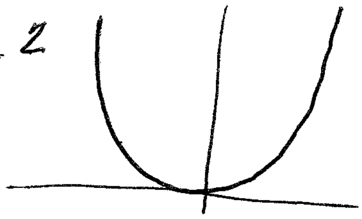
a) vypočteme $f''(x)$; b) řešíme rovnici $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ c ... možná inflexní b.

c) vypočteme znaménko f'' v okolí c $\quad f'' \; \oplus \underset{c}{|} \ominus \quad$ nebo

$f'' \; \ominus \underset{c}{|} \oplus$, pak c ... INFLEXE (musí se měnit znaménko!)

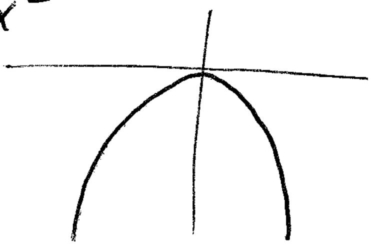
POZNÁMKA:

1) $y = x^2$



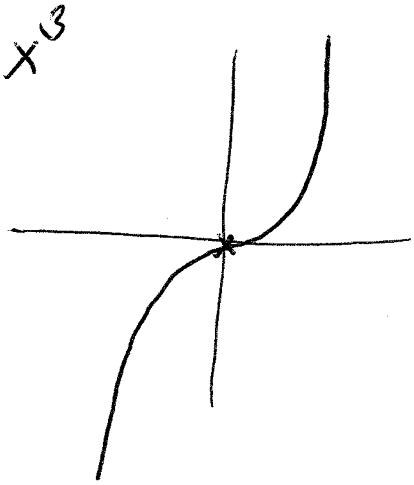
→ konvexní na $(-\infty;\infty)$
→ min $V[0;0]$
→ klesá na $(-\infty;0)$
roste na $(0;\infty)$

2) $y = -x^2$



→ konkávní na $(-\infty;\infty)$
→ max $V[0;0]$
→ roste na $(-\infty;0)$
klesá na $(0;\infty)$

3) $y = x^3$



→ inflexní bod v $I[0;0]$
→ roste na $(-\infty;\infty)$
→ konkávní na $(-\infty;0)$
→ konvexní na $(0;\infty)$

$y' = 3x^2$
$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ možná inflexe
y'': $-$ $\underset{0}{\times}$ $+$ ($\cap$ 0 $\cup$) $\Rightarrow$ v $I[0;0]$ je inflexe

4) Určení vrcholu paraboly pomocí diferenciálního počtu:

$y = x^2 - 6x + 5$ $\qquad y = 3^2 - 6\cdot 3 + 5$
$y' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ stac. bod
$y'' = 2 \Rightarrow y''(3) = 2 > 0$ je kladná, proto v $V[3;-4]$ MIN

5) Dokažte, že $y = \ln x$ je rostoucí na $(0;\infty)$.
Tzn., že $y' > 0$ na $(0;\infty)$. $\qquad \underbrace{y' = \frac{1}{x} > 0}_{\text{řešíme}}$ $\qquad y'$: $-$ $\underset{0}{\times}$ $+$

na $(0;\infty)$ roste

PŘÍKLADY: 1) Vypočítejte P_x, P_y; asymptoty + graf.

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x-2}$; $D(f) = R - \{2\}$; $\boxed{x=2}$ svislá asymptota

počítáme vodorovnou asymptotu: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-1}{x-2} = 4$; proto $\boxed{y=4}$ vodorovná asym.

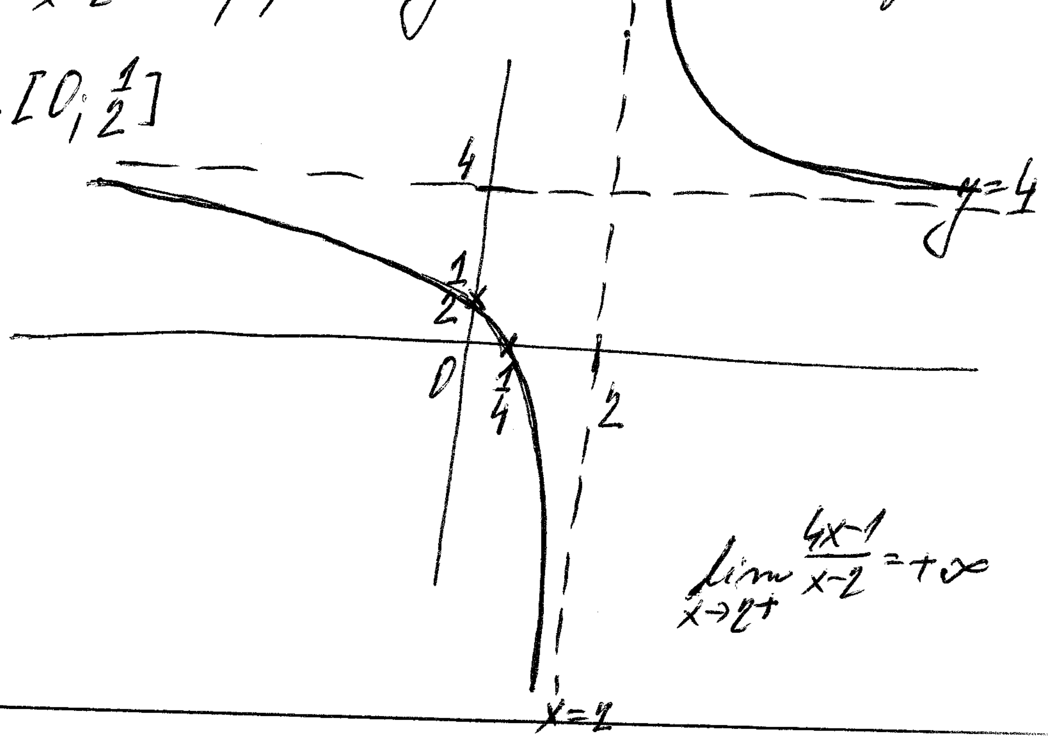
$P_x [\frac{1}{4}; 0]$

$0 = \dfrac{4x-1}{x-2}$

$0 = 4x-1$

$\frac{1}{4} = x$

$P_y [0; \frac{1}{2}]$



$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4x-1}{x-2} = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$; $D(f) = R - \{3\}$; $\boxed{x=3}$ svislá asymptota

∃ vodorovná? $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-3} = \infty$, proto vodorovná ∄.

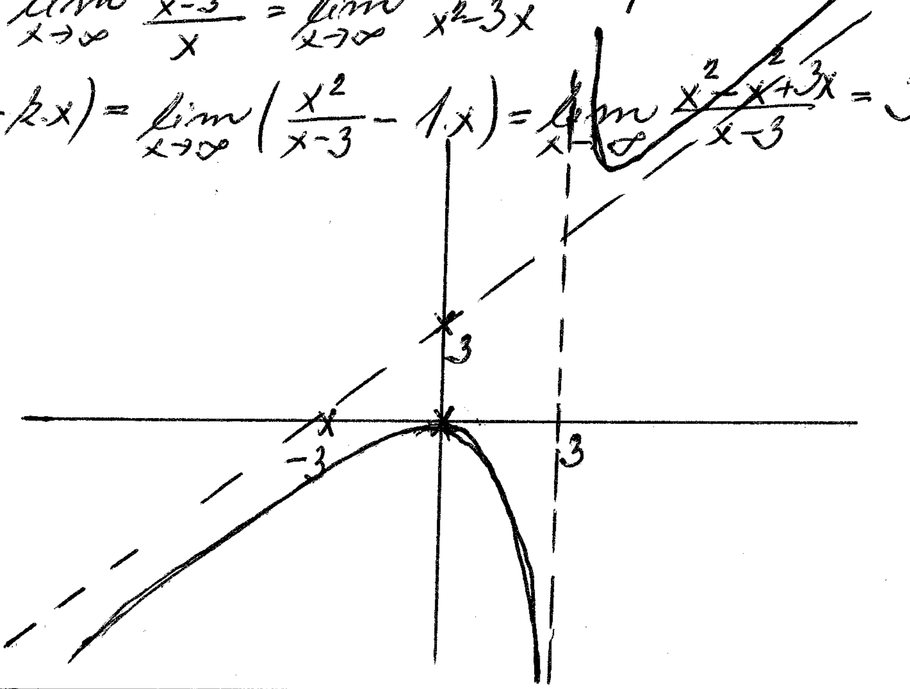
Počítáme šikmou asymptotu: $y = kx + q$

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2}{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-3x} = 1$

$q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k\cdot x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-3} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} = 3$

$\boxed{y = x+3}$

$P_{xy} [0; 0]$



2) Určete intervaly monotónnosti $y = 4-6x-3x^2$.

$y' = -6-6x$; roste pro $y' > 0$

$-6-6x > 0$

$-6 > 6x$

$\underline{-1 > x}$ $\quad x \in (-\infty; -1)$ roste

klesá pro $y' < 0$

$-6-6x < 0$

$-6 < 6x$

$-1 < x$ $\quad x \in (-1; \infty)$ klesá

---

3) Určete extrémy funkce $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow$ stacionární body

$x = -1$; $x_2 = 3$

$y'' = 2x - 2$; $y''(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 < 0$ v $[-1; \frac{11}{3}]$ MAX

$y = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2$

$y''(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0$ v $[3; -7]$ MIN

---

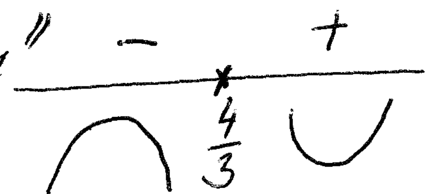
4) Stanovte intervaly konvexnosti, konkávnosti, inflexní body.

$y = x^3 - 4x^2 + 3$.

$y' = 3x^2 - 8x$

$y'' = 6x - 8 = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$ možná inflexní?

y'' 

konvexní na $(\frac{4}{3}; \infty)$

konkávní na $(-\infty; \frac{4}{3})$ v bodě

$I[\frac{4}{3}; -\frac{47}{27}]$ je inflexní bod

$(\frac{4}{3})^3 - 4 \cdot (\frac{4}{3})^2 + 3 = \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + 3 = \frac{64-192+81}{27} = -\frac{47}{27}$

5) Vypočtěte extrémy funkce: $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0 \quad \text{stac. body}$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = -1$$

$$y'' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$$

$y''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow$ v $[1;2]$ MINIMUM

$y''(-1) = \dfrac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow$ v $[-1;-2]$ MAXIMUM

---

6) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. Určete extrémy.

$$y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \text{stac. body}$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$y'' = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - (x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} = \frac{2\left[x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x\right]}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2 \cdot [\ 1\ ]}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y''(0) = \dfrac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \ldots$ v $[0;0]$ MAXIMUM

$y''(2) = \dfrac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \ldots$ v $[2;4]$ MINIMUM

$$y = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$