CVIČENÍ č. 9: L´Hospitalovo pravidlo, diferenciál funkce a průběh funkce

L´Hospitalovo pravidlo

Derivace funkce umožňuje výpočet limit, které vedou na neurčité výrazy typu 0/0 nebo nekonečno/nekonečno (tzv. L´Hospitalovo pravidlo):

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. Vypočtěte následující limity užitím L´Hospitalova pravidla:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+4}{2x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+2x+1}{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+3} \frac{x-3}{x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{\ln x}$

....

Diferenciál funkce

Diferenciál funkce umožňuje přibližně vyjádřit změnu funkce $y = f(x)$, jestliže se x změní o dx. Diferenciál se vypočte jako $df = f'(x)dx$, nebo v jiném značení jako $dy = y'dx$.

2. Vyjádřete diferenciál funkce $y = x^2 + 2x + 5$ a vypočtěte hodnotu diferenciálu pro x = 2, dx = 0,1.

3. Vyjádřete diferenciál funkce $y = x^3 - x$ a vypočtěte hodnotu diferenciálu pro x = 1, dx = 0,2.

....

Průběh funkce

Při určování průběhu funkce obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y, znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémy a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, $H(f)$.
10. Graf funkce.

4. Určete průběh funkce f: a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$., b) $y = \frac{x^2}{x-1}$

....

Samostatné cvičení:

1. Vypočtěte následující limity užitím L´Hospitalova pravidla:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12x+8}{3x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+5x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$

2. Vyjádřete diferenciál funkce $y = 2x^2 + x - 3$ a vypočtěte hodnotu diferenciálu pro x = 3, dx = 0,1.

3. Určete průběh funkce f: $y = x^4 - 2x^2$.

....

Úplné řešení úlohy č. 4 a)

1. Protože *f* je mocninná, je D(*f*) = R. (Připomínáme, že definiční obor není roven R jen u funkcí obsahujících neznámou ve jmenovateli, pod odmocninou, v logaritmu, a u funkcí arcsin a arccos. Daná funkce nepatří do žádné zmíněné kategorie).

Ověříme sudost funkce: musí platit rovnost $f(x) = f(-x)$ pro všechna *x* z definičního oboru, a tedy:

$x^3 - 6x^2 + 9x = (-x)^3 - 6(-x^2) + 9(-x)$,

což upravíme takto: $x^3 - 6x^2 + 9x = -x^3 - 6x^2 - 9x$.

Vidíme, že pravá strana se nerovná levé (nejsou stejná znaménka), funkce sudá není.

Podobně ověříme lichost funkce: musí platit $f(x) = -f(-x)$ pro všechna *x* z definičního oboru, což znamená, že všechny členy na levé a pravé straně rovnice musí mít opačné znaménko. Využijeme výsledek z předešlého odstavce:

$x^3 - 6x^2 + 9x = -x^3 - 6x^2 - 9x$.

Člen u 6*x* nemá opačné znaménko, proto funkce není lichá.

Periodická funkce *f* není, periodické jsou pouze goniometrické funkce.

2. Body nespojitosti funkce nemá, proto spočteme limity pouze v nevlastních bodech, tedy v $\pm\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$

Při výpočtu těchto limit jsem využili faktu, že o výsledku rozhodne největší člen, tedy x^3, který pro *x* rostoucí do plus nekonečna roste rovněž do plus nekonečna, zatímco u druhé limity pro *x* jdoucí do mínus nekonečna je x^3 záporné.

3. Průsečíky grafu funkce s osami *x* a *y* určujeme tak, že nejprve položíme *x* = 0, a dopočítáme z předpisu funkce *y* (tím určíme průsečík s osou *y*), a pak položíme *y* = 0 a dopočítáme *x* (průsečík s osou *x*):

x = 0: dosazením vyjde okamžitě *y* = 0. Máme tedy první průsečík P_1 [0,0]. Graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic.

y = 0: dosazením získáme rovnici třetího stupně $0 = x^3 - 6x^2 + 9x$, kterou musíme vyřešit. Nejprve vytkneme *x* a upravíme:

$0 = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$

Z posledního tvaru rovnice obdržíme kořeny: $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = 3$. Našli jsme tedy průsečíky s osou *x*: P_2 [0,0] a P_3 [3,0]. Avšak průsečíky P_1 a P_2 splývají. Máme tedy jen dva různé průsečíky. Jak uvidíme vzápětí, bod P_3 [3,0] nebude průsečíkem, ale pouze dotykovým bodem grafu funkce a osy *x*.

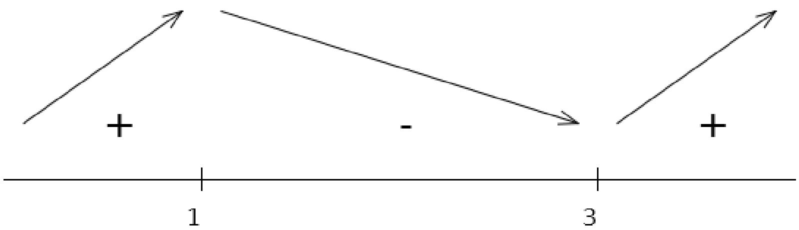
Ještě musíme určit znaménka funkčních hodnot pro zadanou funkci: nulové body $x = 0$ a $x = 3$ naneseme na číselnou osu, která se tím rozdělí na tři intervaly. Z každého intervalu vybereme jedno libovolné číslo, pomocí kterého zjistíme znaménko dané funkce: V intervalu $(-\infty, 0)$ vybereme například $x = -10$, dosadíme do předpisu funkce

$y = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$ a vyjde záporná hodnota (–1690). Nad interval $(-\infty, 0)$ napíšeme znaménko "–". U intervalů (0, 3) a $(3, \infty)$ zjistíme znaménko "+". Můžeme tak učinit závěr, že pro kladná *x* nabývá daná funkce kladných hodnot, pro záporná *x* je funkce záporná a pro *x* = 0 je rovněž *y* = 0. Proto musí být bod P_3 [3,0] dotykový bod, a ne průsečík.

4. První derivace funkce *f*: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Nulové body první derivace, což jsou „body podezřelé z extrému“, najdeme řešením kvadratické rovnice $0=3x^2-12x+9$: $x_1=1$ a $x_2=3$ (řešíme pomocí diskriminantu nebo rozkladem na součin kořenových činitelů: $0=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$.

5. Body $x_1=1$ a $x_2=3$ naneseme na číselnou osu, čímž získáme tři intervaly (bez nulových bodů): $(-\infty,1)$, $(1,3)$ a $(3,\infty)$, viz Obr. 3.4. Nyní rozhodneme o znaménku první derivace v každém intervalu tak, že zvolíme libovolné číslo z daného intervalu a dosadíme ho do 1. derivace. Postupně obdržíme znaménka “+“ “–“ a “+“. Víme, že pokud je první derivace v nějakém intervalu kladná, pak je daná funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto nad intervaly se znaménkem “+“ načrtneme šipku směrem vzhůru. Obdobně nad intervaly se znaménkem “–“ načrtneme šipku směrem dolů, což symbolizuje, že daná funkce na tomto intervalu klesá, viz Obr. 3.4.



Obr. 3.4. Znaménka první derivace.

Z „šipkového“ schématu okamžitě vidíme, že v bodě $x=1$ má funkce maximum, zatímco v bodě $x=3$ je minimum. Další extrémy funkce nemá.

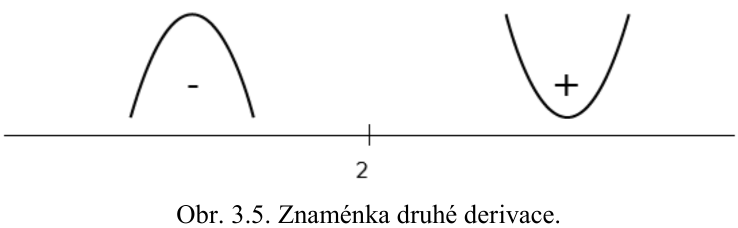
Pro monotónnost platí:

Pro $x\in(1,3)$ je funkce klesající,

Pro $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ je funkce rostoucí.

6. Druhá derivace: $y'=6x-12$, nulový bod druhé derivace: $x=2$.

7. Nulový bod druhé derivace, tedy $x=2$, může být inflexním bodem dané funkce, pokud se v něm mění konvexnost na konkávnost nebo obráceně. To ověříme pomocí znaménka druhé derivace: na číselné ose opět vyznačíme nulový bod $x=2$, čímž dostaneme dva intervaly: $(-\infty,2)$ a $(2,\infty)$, viz Obr. 3.5. V prvním intervalu zvolíme například $x=0$, druhá derivace vyjde záporná (–12). Nad interval zapíšeme “–“. U druhého intervalu zvolíme například $x=10$, druhá derivace vyjde kladná (+48). Nad interval zapíšeme “+“. Protože v bodě $x=2$ se mění znaménko druhé derivace, je tento bod inflexním bodem. V intervalu $(-\infty,2)$ je funkce konkávní, v intervalu $(2,\infty)$ konvexní (podívejte se na graf této funkce níže!).



Obr. 3.5. Znaménka druhé derivace.

8. Asymptoty:

Svislou asymptotu určíme z definičního oboru: protože D(*f*) = R, svislá asymptota neexistuje.

Šikmou asymptotu vypočteme ze vztahů (3.1) a (3.2). Protože je daná funkce spojitá, stačí vypočítat limity do plus nekonečna. V našem případě obdržíme:

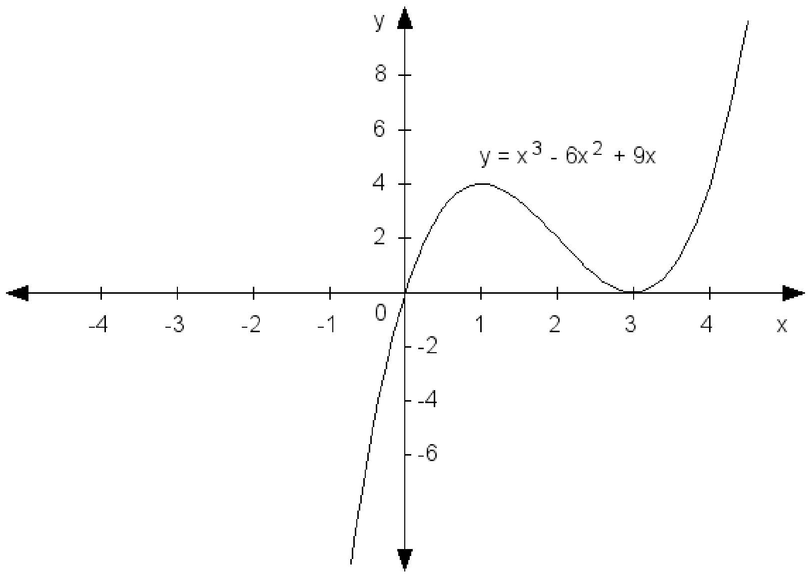
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 - 6x + 9\right) = +\infty \,.$$

Pokud nám vyjde koeficient a nebo b nekonečný, znamená to, že šikmá asymptota neexistuje. Koeficient b už nemusíme počítat.

9. Funkce není omezená, a $H(f) = R$.

10. Graf viz Obrázek 3.6. ■

Poznámka: graf funkce je lepší kreslit průběžně. Vždy, když o funkci něco zjistíme (například polohu lokálního maxima), je vhodné si tento fakt zakreslit do grafu, neboť tak získáme lepší představu o dané funkci již během určování průběhu funkce.



Obr. 3.6. Graf funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

3.) Určete průběh funkce:

a) $y = x^4 - 2x^2$

[1. $D(f) = R$, sudá, 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4 - 2x^2 = +\infty$, 3. průsečíky s osami: [0,0] a $\left[\pm\sqrt{2},0\right]$, funkce je kladná: $x \in \left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$, záporná: $x \in \left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$, 4. $y' = 4x^3 - 4x$, 5. max: [0,0], min: [-1,-1] a [1,-1], rostoucí: $x \in \left(-1,0\right)\cup\left(1,\infty\right)$, klesající: $x \in \left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,1\right)$. 6. $y'' = 12x^2 - 4$, 7. inflexní body $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, konvexní: $x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right)$, konkávní: $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, 8. asymptoty nejsou,

9. $H(f) = \langle -1,\infty)$, omezená zdola]