

# ČÁSTEČNÝ (poloviční) FAKTOROVÝ PLÁN

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

# Porovnání

- V úplném faktorovém experimentu se sestavuje plán experimentu pro každý faktor.
- U částečného faktorového experimentu se plán sestaví jen pro několik faktorů (pro tzv. *hlavní faktory*) a ostatní faktory (*vedlejší faktory*) se vyjádří jako kombinace hlavních faktorů.
  - Tím se dosáhne snížení počtu experimentálních pokusů.

# Částečné plány

- Obecný zápis pro úplný experiment je  $2^{k-p}$ , kde
  - 2 = počet úrovní faktoru,
  - $k$  = počet faktorů,
  - $p$  = stupeň snížení.

# Příklad

- Chceme-li například v plánu  $2^7$ , který představuje  $n = 128$  pokusů, snížit počet pokusů na polovinu, tedy na 64 pokusů:

$$\frac{2^7}{2} = 2^{7-1} = 2^6 = 64$$

- Tady  $p=1$ , je to nejmenší možné snížení počtu pokusů.
- Plány se snížením počtu pokusů na polovinu se nazývají *poloviční plány*.

# Rozdělení částečných faktorových plánů

- **a.** plány s nejnižším snížením, tzv. **poloviční plány**, ( $p=1$ )
- **b.** plány s nejvyšším snížením, (vždy musí platit, že pokusů nesmí být menší než počet faktorů )
- **c.** plány se snížením mezi a) a b), tzv. **středové plány**

# Jednotkový faktor

- Označme symbolem  $I$  faktor, který ve svém sloupci tabulky představující plán experimentu obsahuje jen znaménka „+“. Takový faktor se nazývá *jednotkový*. Platí:

$$A.A = I$$

$$A.I = I.A = A$$

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

$$A.B = B.A$$

# Odvození generátoru plánu

- Předpokládejme, že  $A, B, C, D, E$  jsou faktory, pro které se má sestavit poloviční plán.
- Je třeba určit 4 *hlavní faktory* (například  $A, B, C, D$ ), pro které se sestaví úplný plán a zbývající (*vedlejší*) faktor  $E$  se vyjádří jako kombinace hlavních faktorů, například  $E = ABCD$ .
- Tím se provede poloviční počet pokusů odpovídajících různým nastavením hlavních faktorů, kterých je nyní o jeden faktor méně.
- Každá kombinace faktorů tvoří *slovo*. Slovo se skládá z písmen (faktorů). Počet písmen ve slově je *délka slova*.
- Vztah  $E = ABCD$  se nazývá generátor plánu.
- Obecně, v plánu  $2^{k-p}$  je  $p$  generátorů.

# Definiční rovnice

- Vynásobením generátoru faktorem  $E$  dostaneme rovnici  $E.E = E. ABCD$  a s využitím vlastností operací s faktory tak máme vztah  $I = ABCDE$ .
- Slova, která jsou rovna jednotkovému faktoru  $I$ , se nazývají *definiční rovnice*.
- Definičních rovnic může být i více.
- Nejkratší slovo v definičních rovnicích je tzv. *řešení plánu* a zapisuje se k typu plánu římským číslem jako index (římsky – počet písmen v definiční rovnici).
- Zde např.  $2_V^{5-1}$



# Zaměnitelné rovnice

- Pomocí definiční rovnice lze najít dvojice faktorů (resp. interakcí), které mají stejnou posloupnost znamének ve svém sloupci tabulky reprezentující plán experimentu. Nazývají se *zaměnitelné dvojice*.
- Je-li například generátor plánu ve tvaru  $E = ABCD$ , pak definiční rovnice bude  $I = ABCDE$ .
- Například zaměnitelnou interakci k interakci  $DE$  nalezneme vynásobením definiční rovnice touto interakcí :

$$I = ABCDE \cdot DE$$
$$DE \cdot I = DE \cdot ABCDE$$

$$DE = ABC$$

- Práci s polovičnými plány nyní ukazuje následující příklad .

# Příklad

- Zkoumejme množství barviva  $Y$ , které zůstane na látce po absolvování testů (ve srovnání se standardním vzorkem) v závislosti na těchto pěti faktorech:  $A = \text{pH}$ ,  $B = \text{teplota}$ ,  $C = \text{koncentrace roztoku}$ ,  $D = \text{dokončovací teplota}$ ,  $E = \text{dokončovací čas}$ . Sestavme poloviční plán experimentu a najděme nevýznamnější faktory, které ovlivňují množství barviva na látce.

| Faktor      | Symbol | -               | +               |
|-------------|--------|-----------------|-----------------|
| pH          | $A$    | 4,5             | 5,5             |
| teplota     | $B$    | $70^{\circ} C$  | $80^{\circ} C$  |
| koncentrace | $C$    | 1 g/l           | 3 g/l           |
| d.teplota   | $D$    | $170^{\circ} C$ | $190^{\circ} C$ |
| d.čas       | $E$    | 50s.            | 70s.            |

# Příklad – řešení

- Sestavme tedy poloviční plán experimentu, kde  $A, B, C, D$  jsou hlavní faktory a faktor  $E$  je vedlejším faktorem, generátor  $E=ABCD$ . Výsledky pokusů pro jednotlivé úrovně faktorů jsou zaznamenány v tabulce

# Příklad – tabulka

| Pokus | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | $E = ABCD$ | <i>Y</i> |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|----------|
| 1     | -        | -        | -        | -        | +          | 6,4      |
| 2     | +        | -        | -        | -        | -          | 9,9      |
| 3     | -        | +        | -        | -        | -          | 8,1      |
| 4     | +        | +        | -        | -        | +          | 6,6      |
| 5     | -        | -        | +        | -        | -          | 9,0      |
| 6     | +        | -        | +        | -        | +          | 5,3      |
| 7     | -        | +        | +        | -        | +          | -5,1     |
| 8     | +        | +        | +        | -        | -          | -1,0     |
| 9     | -        | -        | -        | +        | -          | 10,6     |
| 10    | +        | -        | -        | +        | +          | 12,7     |
| 11    | -        | +        | -        | +        | +          | 12,9     |
| 12    | +        | +        | -        | +        | -          | 11,2     |
| 13    | -        | -        | +        | +        | +          | 2,4      |
| 14    | +        | -        | +        | +        | -          | 9,7      |
| 15    | -        | +        | +        | +        | -          | 4,1      |
| 16    | +        | +        | +        | +        | +          | 4,0      |

# Příklad – efekty faktorů

- Výpočet efektu faktorů se provede stejně, jako u úplného plánu. Např. pro efekt  $D$  je

$$\text{efekt}(D) = \frac{1}{8}(-6,4 - 9,9 - \dots - (-1) + 10,6 + 12,7 + \dots + 4) = 4,8$$

- Analogicky vypočítáme i efekty ostatních faktorů a interakcí.
- Tím, že pracujeme s polovičním plánem, vzniknou při tvorbě interakcí zaměnitelné dvojice, tj. faktory, které mají stejné sloupce znamének v tabulce plánu experimentu.
- Efekt vypočítaný pro daný faktor pak náleží nejen tomuto faktoru, ale také všem zaměnitelným dvojicím.

# Příklad – efekty faktorů

- Tedy například hned první nulový efekt náleží společnému působení faktorů  $A$  a interakci  $BCDE$ , která je zde zaměnitelnou dvojicí pro faktor  $A$ .

| Faktor     | Efekt |
|------------|-------|
| $A + BCDE$ | 0,0   |
| $B + ACDE$ | -4,4  |
| $C + ABDE$ | -5,0  |
| $D + ABDE$ | 4,8   |
| $E + ABCD$ | -0,8  |
| $AB + CDE$ | 0,2   |
| $AC + BDE$ | -0,6  |
| $AD + BCE$ | -0,6  |
| $AE + BCD$ | 0,5   |
| $BC + ADE$ | -4,2  |
| $BD + ACD$ | 1,1   |
| $BE + ACD$ | -0,2  |
| $CD + ABE$ | 0,7   |
| $CE + ABD$ | -0,5  |
| $DE + ABC$ | 2,4   |

# Příklad – grafická metoda hodnocení efektu faktoru

- Použití grafické metody je podobné jako u úplných plánů.  
Nejprve vypočteme hodnotu pravděpodobností ze vztahu

$$P_i = \frac{100(i - 0,5)}{m}$$

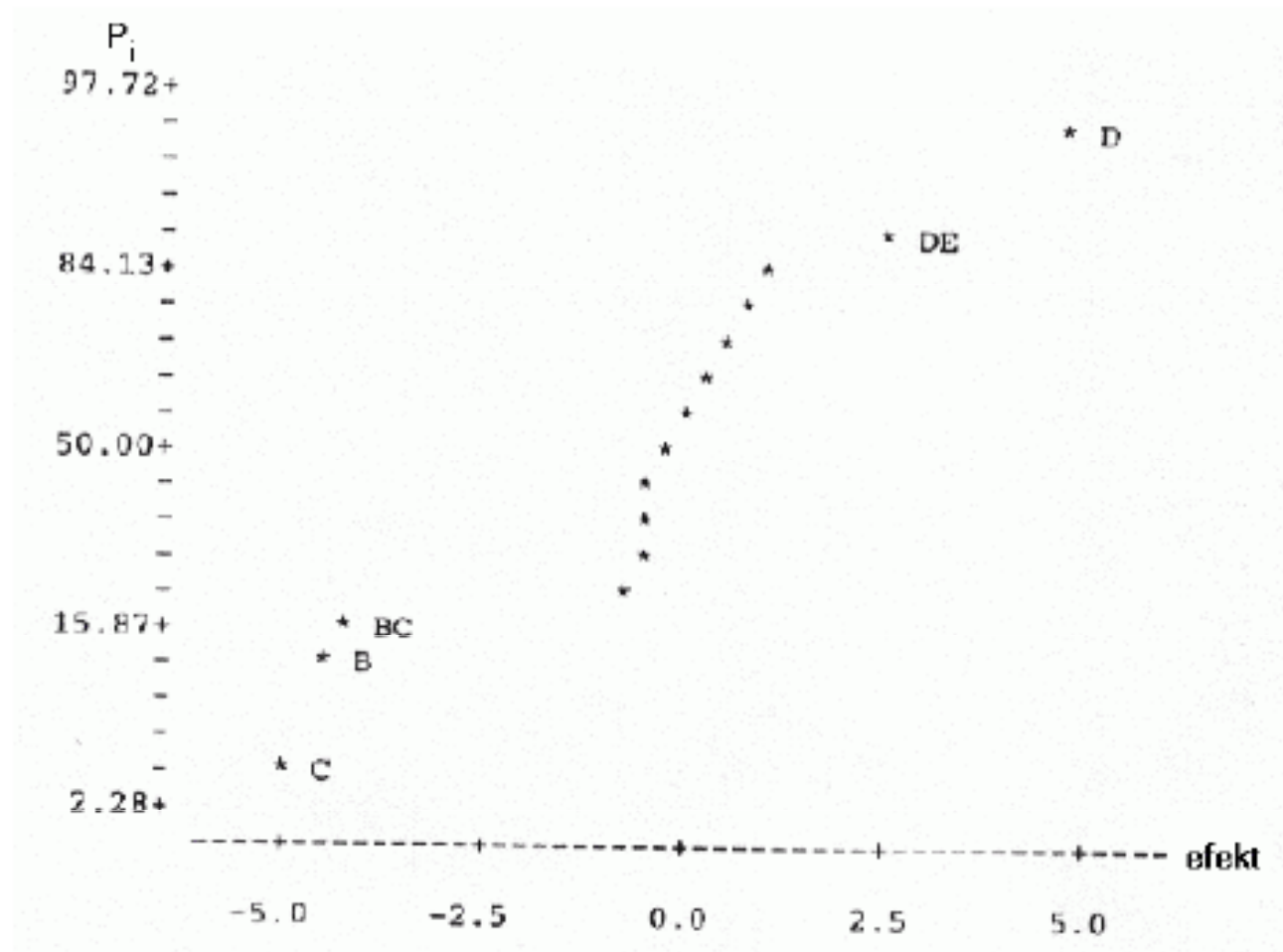
|                      |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>i</i>             | 1               | 2               | 3               | 4               | 5               | 6               |
| Faktor               | <i>C + ABDE</i> | <i>B + ACDE</i> | <i>BC + ADE</i> | <i>E + ABCD</i> | <i>AD + BCE</i> | <i>AC + BDE</i> |
| Efekt                | -5              | -4,4            | -4,2            | -0,8            | -0,6            | -0,6            |
| <i>P<sub>i</sub></i> | 3,3             | 10              | 16,6            | 23,3            | 30              | 36,6            |

|                      |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>i</i>             | 7               | 8               | 9               | 10              | 11              | 12              |
| Faktor               | <i>CE + ABD</i> | <i>BE + ACD</i> | <i>A + BCDE</i> | <i>AB + CDE</i> | <i>AE + BCD</i> | <i>CD + ABE</i> |
| Efekt                | -0,5            | -0,2            | -0,0            | 0,2             | 0,5             | 0,7             |
| <i>P<sub>i</sub></i> | 43,3            | 50              | 56              | 63,3            | 70              | 76,6            |

|                      |                 |                 |                 |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>i</i>             | 13              | 14              | 15              |
| Faktor               | <i>BD + ACD</i> | <i>DE + ABC</i> | <i>D + ABCE</i> |
| Efekt                | 1,1             | 2,4             | 4,8             |
| <i>P<sub>i</sub></i> | 83,3            | 90              | 96,6            |

# Příklad – grafická metoda hodnocení efektu faktoru

- Z těchto hodnot sestrojíme graf, kde na osu x nanášíme efekt a na osu y hodnotu příslušné pravděpodobnosti:





# Obecné porovnání úplných a částečných plánů

- Porovnáme-li grafy pro úplný a poloviční plán, pak poloviční plán dává stejné hodnocení jako úplný plán. Znamená to tedy, že snížením počtu pokusů na polovinu nedošlo ke ztrátě informace a tím ke změně výsledků.
- Jsou-li u interakcí stejné posloupnosti znamének, náleží efekt oběma faktorům. Neznamená to ale, že na každou z interakcí připadá právě polovina tohoto efektu! Kolik celkového efektu připadá na jednotlivé sčítance nelze obecně zjistit. Využívá se ale poznatek, že čím delší je „slovo“ tvořící faktor, tím menší má vliv na celkový efekt.
- Snahou je proto dostat do kombinací krátké slovo (sólový faktor) s co nejdelším slovem, respektive interakcí. To lze ovlivnit vhodnou volbou definičních rovnic.

# Příklad 2

- Mějme pět faktorů  $A, B, C, D, E$ . Faktor  $E$  je vedlejším faktorem. Faktor  $E$  je možné vyjádřit mnoha způsoby. Porovnejme tyto dva:
  - **a.**  $E = AB$ ,
  - **b.**  $E = ABCD$ .



Děkuji za pozornost