REGRESNÍ ANALÝZA

Mgr. Jiří Mazurek Ph.D.

Regresní analýza

- Regresní analýza se zabývá závislostí kvantitativního znaku na kvantitativním znaku (nebo více kvantitativních znacích).
- V případě závislosti jednoho znaku na jednom znaku mluvíme o *jednoduché regresi*.
- U závislosti jednoho znaku na více kvantitativních znacích hovoříme o *vícenásobné (nebo mnohonásobné) regresi*.

PODSTATA REGRESNÍ ANALÝZY

- Jednou ze základních úloh regresní analýzy je najít vztah závislé proměnné y na faktorech $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$
- Tvar závislosti y na x → regresní analýza
- Míra závislosti y na x → korelační analýza

Data

- Průřezová data: jednotlivá pozorování více jednotek v jednom časovém intervalu (příjem domácnosti, spotřební chování)
- Časové řady: pozorovaní proměnné za jednu časovou jednotku
- „Panelová“ data: kombinace průřezových dat a časových řad

Proměnné: $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$

y	$(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$
Predictand	Predictors
Regressand	Regressors
Vysvětlovaná proměnná	Vysvětlující proměnné
Závislá proměnná	Nezávislé proměnné
Endogenní proměnná	Exogenní proměnné
Cílová proměnná	Kontrolní proměnné

Regresní funkce

Funkce – formát: *(tvar)*

- lineární $y = \alpha + \beta.x$
- log-lineární $\log y = \alpha + \beta.\log x$
- semi-logaritmická $\log y = \alpha + \beta.x$

  $y = \alpha + \beta.\log x$
- kvadratická $y = \alpha + \beta.x + \gamma.x^2$

Formalizace

$\bar{x}$ y a b x e r "skuteční" proměnné (pozorované)

μ $\hat{y}$ $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ X ε ρ odhadované proměnné

Základní úloha

Model jedoduché lineární regrese

$y = f(x) \ldots\ldots y = \alpha + \beta.x + \varepsilon$ specifikace vztahu

Příklad: y = nákupy

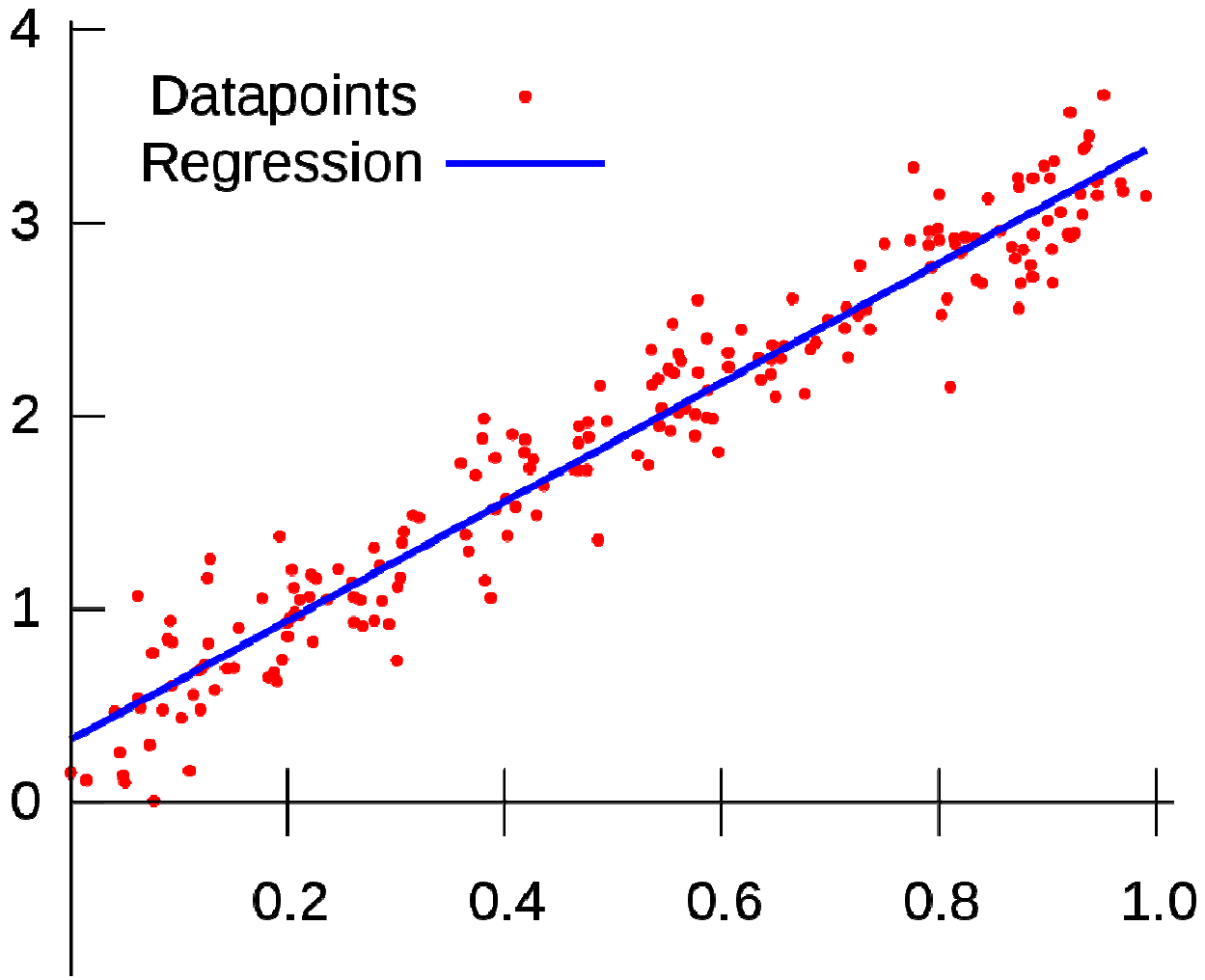
x = příjem

ε = reziduum (bílý šum)

Experiment: nastav x, pozoruj y

Úkol: Jak přeložit přímku daty?

Jak proložit danými body přímku?



Metoda nejmenších čtverců

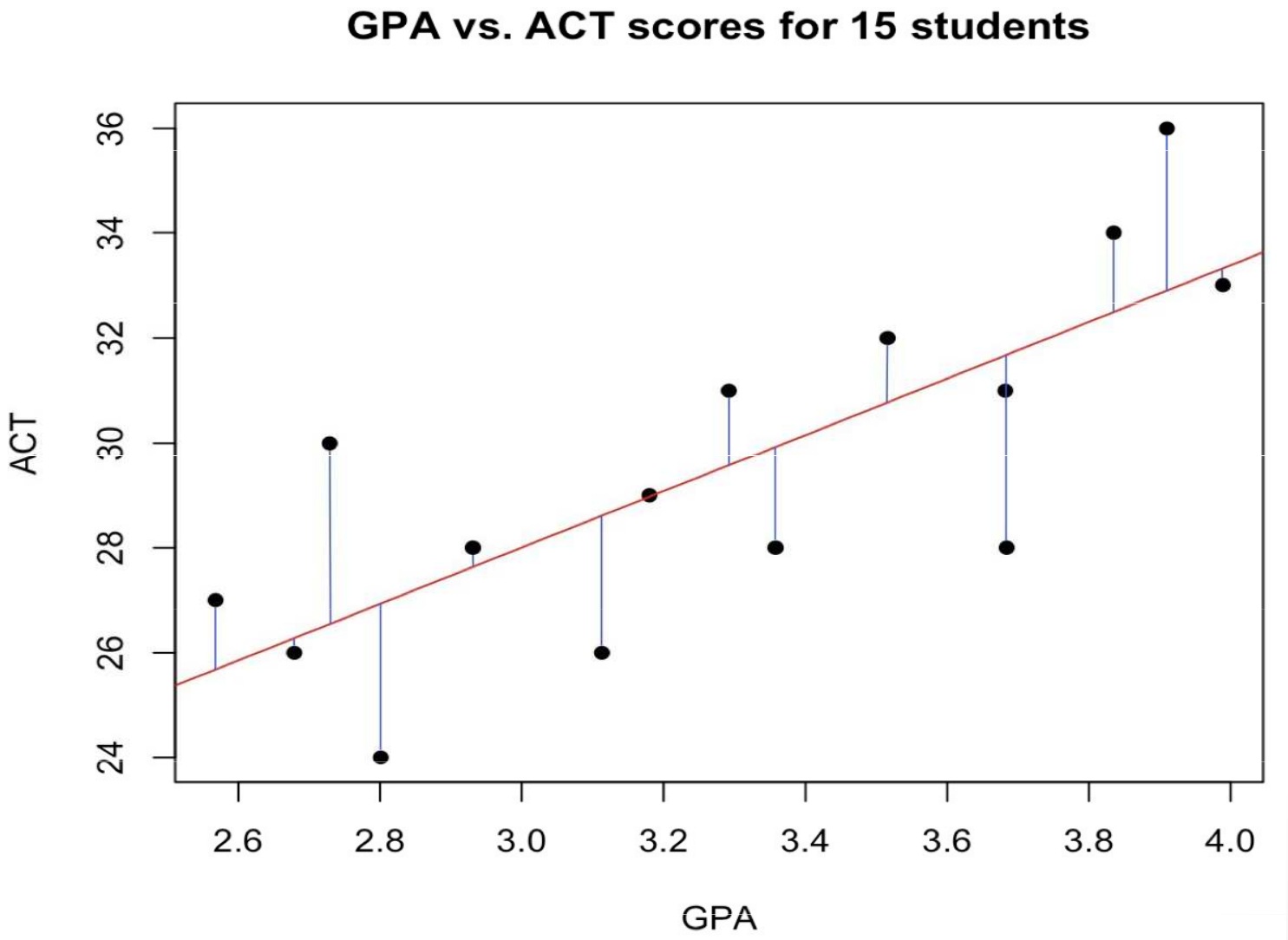
Pro každý bod $y_i = a + b.x_i + e_i, \quad i = 1,2,\ldots n$

Chyba (*nepozorujeme*) $e_i = y_i - a - b.x_i$

Potřebujeme minimalizovat chybu. Nechť střední hodnota je 0, potom musíme minimalizovat druhé mocniny chyby e^2 (jméno - *LSE*)

reg_front.svg

Metoda nejmenších čtverců



Jednoduchá lineární regrese

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n}(y-\alpha-\beta.x_i)^2\right)$$

$$\Rightarrow \alpha,\beta = \arg\min\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta.x_i)^2\right)$$

$$\left|\frac{\partial S}{\partial \alpha}=0=-2.\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta.x_i)\right.$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=0=-2.\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta.x_i).x_i$$

$$\sum y_i - n.\alpha - \beta.\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i.x_i - \alpha.\sum x_i - \beta.\sum x_i^{\,2} = 0$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta.\bar{x}$$

Jednoduchá lineární regrese

- Jednoduchá lineární regrese je speciálním případem vícenásobní regrese
- Jednoduchá lineární regrese má pouze jednu vysvětlující proměnnou, vícenásobná regrese má dvě nebo více vysvětlujících proměnných

Vícenásobná lineární regrese

- Nejčastěji odhadovaná funkce

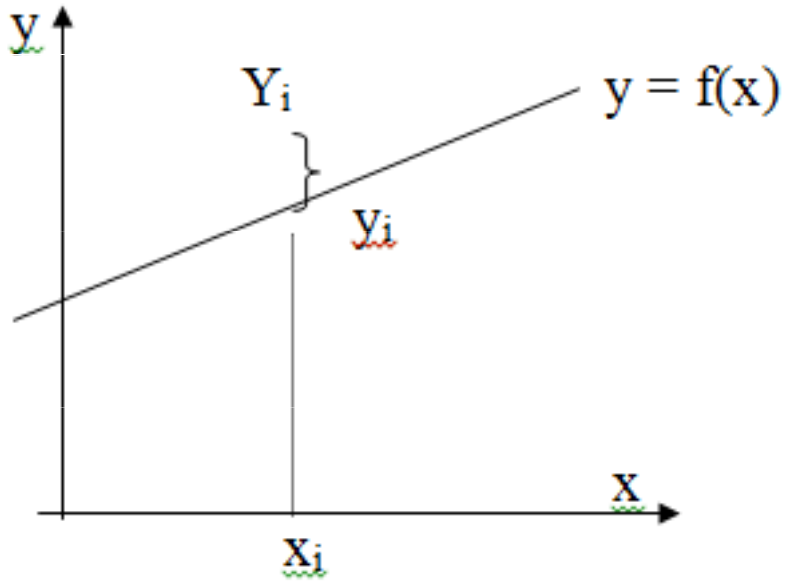
$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k$$

- Nejjednodušším případem je jednoduchá lineární regrese

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_2.$$

Grafická interpretace

- Y_i = empirické (měřené) hodnoty závislé proměnné,
- y_i = teoretické hodnoty závislé proměnné,
- ε_i = residua.
- Vztah mezi Y_i a y_i : $y_i = Y_i + \varepsilon_i$



Předpokládané statistické vlastnosti náhodné složky

1. Střední hodnota ε_i je nula, tj. $E(\varepsilon_i) = 0$ pro každé i.
2. Rozptyl ε_i je konstantní, nezávislý na i, tj. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ pro každé i.
3. Veličiny ε_i, ε_j jsou nekorelované, tj. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro i $\neq j$.
4. Veličiny ε_i mají normální rozdělení, tj. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ pro každé i.

Regresní koeficienty

- Vektor regresních koeficientů získáme z vektorové rovnice :

$$\vec{b}^T = \left(X^T . X\right)^{-1} X^T . \vec{Y}$$

- kde *X* je tzv. matice regresorů

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\vec{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_n)^T$$

Příklad

- Odhadněte závislost spotřeby elektrické energie (*Y*) na délce elektrického vedení (*X*1) a odběru energie (*X*2). Jsou k dispozici následující výběrová data:

X_1	X_2	Y
1,2	3,6	3,2
1,3	3,7	3,3
1,3	3,8	3,4
1,4	3,8	3,5
1,4	3,9	3,6
1,5	3,9	3,6
1,5	4	3,7
1,6	4	3,8
1,6	4,1	3,9
1,7	4,2	4

Příklad - řešení

- Tabulka představuje body, z nichž získáme potřebné matice *X* a *Y*.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 3,6 \\ 1 & 1,3 & 3,7 \\ 1 & 1,3 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4,1 \\ 1 & 1,7 & 4,2 \end{bmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,3 \\ 3,4 \\ 3,5 \\ 3,6 \\ 3,6 \\ 3,7 \\ 3,8 \\ 3,9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Příklad - řešení

$$X^T \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,2 & 1,3 & 1,3 & 1,4 & 1,4 & 1,5 & 1,5 & 1,6 & 1,6 & 1,7 \\ 3,6 & 3,7 & 3,8 & 3,8 & 3,9 & 3,9 & 4 & 4 & 4,1 & 4,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 3,6 \\ 1 & 1,3 & 3,7 \\ 1 & 1,3 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4,1 \\ 1 & 1,7 & 4,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14,5 & 39 \\ 14,5 & 21,25 & 56,8 \\ 39 & 56,8 & 152,4 \end{bmatrix}.$$

Příklad - řešení

$$\left(X^T \cdot X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 245,2 & 108 & -103 \\ 108 & 60 & -50 \\ -103 & -50 & 45 \end{bmatrix}.$$

$$X^T \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,2 & 1,3 & 1,3 & 1,4 & 1,4 & 1,5 & 1,5 & 1,6 & 1,6 & 1,7 \\ 3,6 & 3,7 & 3,8 & 3,8 & 3,9 & 3,9 & 4 & 4 & 4,1 & 4,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,3 \\ 3,4 \\ 3,5 \\ 3,6 \\ 3,6 \\ 3,7 \\ 3,8 \\ 3,9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 52,56 \\ 140,82 \end{bmatrix}$$

Příklad - řešení

$$\vec{b}^T = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{Y} = \begin{bmatrix} 245,2 & 108 & -103 \\ 108 & 60 & -50 \\ -103 & -50 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 36 \\ 52,56 \\ 140,82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,78 \\ 0,60 \\ 0,90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Hledaná regresní funkce má tedy rovnici $\vec{Y} = -0,78 + 0,60x_1 + 0,90x_2$.

Teoretické hodnoty

- Teoretické hodnoty obdržíme dosazením do regresní rovnice za x_1 a x_2 postupně z tabulky vstupních dat:

$$\hat{Y}_1 = -0,78 + 0,60 \cdot 1,2 + 0,90 \cdot 3,6 = 3,18\,,$$
$$\hat{Y}_2 = -0,78 + 0,60 \cdot 1,3 + 0,90 \cdot 3,7 = 3,33\,,$$
$$\dots$$
$$\hat{Y}_{10} = -0,78 + 0,60 \cdot 1,7 + 0,90 \cdot 4,2 = 4,02\,.$$

Teoretické hodnoty jinak

$$\hat{Y} = X \cdot \vec{b}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 3,6 \\ 1 & 1,3 & 3,7 \\ 1 & 1,3 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,8 \\ 1 & 1,4 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 3,9 \\ 1 & 1,5 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4 \\ 1 & 1,6 & 4,1 \\ 1 & 1,7 & 4,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,78 \\ 0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,18 \\ 3,33 \\ 3,42 \\ 3,48 \\ 3,57 \\ 3,63 \\ 3,72 \\ 3,78 \\ 3,87 \\ 4,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \hat{y}_{10} \end{bmatrix}$$

Vektor reziduálních odchylek:

- Rozdíl teoretické a skutečné hodnoty, představuje *vektor reziduálních odchylek*:

$$\vec{e} = \vec{Y} - \hat{Y} = \begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,3 \\ 3,4 \\ 3,5 \\ 3,6 \\ 3,6 \\ 3,7 \\ 3,9 \\ 3,9 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,18 \\ 3,33 \\ 3,42 \\ 3,48 \\ 3,57 \\ 3,63 \\ 3,72 \\ 3,78 \\ 3,87 \\ 4,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ -0,03 \\ -0,02 \\ 0,02 \\ 0,03 \\ -0,03 \\ 0,02 \\ 0,02 \\ 0,03 \\ -0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

Rozptyl odhadu regresních koeficientů

- Protože při výpočtu regresních koeficientů se jedná o odhady, je účelné také nalézt rozptyly těchto odhadů, které vyjadřují přesnost odhadů. Získáme je jako prvky hlavní diagonály matice:

$$Var(\vec{b}) = s^2 \cdot \left(X^T \cdot X\right)^{-1},$$

kde $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k}$ je odhad rozptylu veličiny ε. Přitom

e_i = i-tá reziduální odchylka,

n = počet bodů,

k = počet parametrů regresního modelu.

Příklad - řešení

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k} = \frac{0,006}{10-3} = 0,0008571.$$

$$Var(\vec{b}) = s^2 \cdot \left(X^T \cdot X\right)^{-1} = 0,0008571 \cdot \begin{bmatrix} 245,2 & 108 & -103 \\ 108 & 60 & -50 \\ -103 & -50 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2102 & 0,0926 & -0,0883 \\ 0,0926 & 0,0514 & -0,0429 \\ 0,0883 & -0,0429 & 0,0386 \end{bmatrix}.$$

Rozptyly regresních koeficientů

- Diagonálu poslední matice tvoří rozptyly jednotlivých regresních koeficientů:

$s^2(b_0) = 0{,}2102$, odtud směrodatná odchylka je $s(b_0) = 0{,}4584$.
$s^2(b_1) = 0{,}0514$, odtud směrodatná odchylka je $s(b_1) = 0{,}2267$.
$s^2(b_2) = 0{,}0386$, odtud směrodatná odchylka je $s(b_2) = 0{,}1965$.

Po nalezení regresního modelu a rozptylů odhadů regresních koeficientů píšeme obvykle výsledné řešení tak, že pod regresní koeficienty do závorek uvádíme příslušné směrodatné odchylky (též tzv. *standardní chyby*).

$$\hat{Y} = \underset{}{-0{,}78} + \underset{(0{,}4584)}{0{,}60}\, x_2 + \underset{(0{,}2267)}{0{,}90}\, x_3 \qquad (0{,}1965)$$

TEST VÝZNAMNOSTI REGRESNÍCH KOEFICIENTŮ

- Při výpočtu regresních koeficientů b_1, b_2, …, b_k se stává, že mezi koeficienty jsou až řádové rozdíly, např. $b_1 = 200$ a $b_2 = 0{,}02$.
- V takových případech stojíme před problémem, zda má smysl zařadit např. b_2 do regresní funkce.
- K objektivnímu posouzení významnosti regresních koeficientů lze použít test statistické významnosti regresních koeficientů.

Struktura testu

- 1) Nulová hypotéza: $H_0: \beta_i = 0$, alternativní hypotéza $H_1: \beta_i \neq 0$
- 2) Testové kritérium

$$T = \frac{b_i}{s(b_i)}$$

  - Kde b_i je odhad parametru β_i, $s(b_i)$ je směrodatná odchylka odhadu b_i.
- 3) Kritická hodnota $t_{n-k}(\alpha)$
-
- 4) Porovnáme *T* a *K*: Je-li $|T| > K$, zamítá se H_0 a přijme se alternativní hypotézu H_1, podle které vypočítaný koeficient je možné považovat za nenulový, neboli statisticky významný a je proto důvod pro jeho zařazení do regresní funkce. V opačném případě přijímáme H_0 a parametr považujeme za statistický nevýznamný.

Příklad - řešení

- 1) Nulová hypotéza: $H_0: \beta_i = 0$, alternativní hypotéza $H_1: \beta_i \neq 0$
- 2) Testové kritérium

$$T_1 = \frac{b_1}{s(b_1)} = \frac{0,60}{\sqrt{0,0514}} = 2,65\,,$$

$$T_2 = \frac{b_2}{s(b_2)} = 4,58\,,$$

- 3) $t_{n-p}(\alpha) = t_{10-3}\,(0,05) = 2,365.$
- 4) Protože $T_1 > 2,365$ a také $T_2 > 2,365$, jsou oba regresní koeficienty statistický významné a nenulové, a proto je oba zařadíme do regresní funkce.
-

INTERVALY SPOLEHLIVOSTI PRO REGRESNÍ KOEFICIENTY

- Intervaly spolehlivosti pro parametry $\beta_1, \ldots, \beta_k, ,$ tj. intervaly, ve kterých lze očekávat tyto parametry s pravděpodobností 1-α, získáme pomocí vztahu:

$$[b_i - t_{n-p}(\alpha).s(b_i), b_i + t_{n-p}(\alpha).s(b_i)],$$

- kde

b_i = odhad parametru β_i,
$s(b_i)$ = směrodatná odchylka odhadu b_i,
$t_{n-p}(\alpha)$ = kritická hodnota Studentova rozdělení,
n = počet bodů,
p = počet parametrů modelu,
α = hladina významnosti,

TESTOVÁNÍ VHODNOSTI REGRESNÍHO MODELU

- Vhodnost volby regresního modelu (tj. volby nezávisle proměnných) se ověří testem. Test má následující strukturu:
- 1)

$$H_0 : \vec{\beta} = \vec{0}.$$

$$H_1 : \vec{\beta} \neq \vec{0}.$$

- 2) Testové kritérium

$$T = \frac{S_{\hat{Y}} /(k)}{S_e /(n-k-1)},$$

$$S_{\hat{Y}} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i ,$$

$$S_e = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 .$$

- 3) Kritická hodnota Fischerova rozdělení $K = F_{k,n-k-1}(\alpha)$
- 4) Je-li $T \geq K$, pak se H_0 zamítá. V opačném případě se H_0 nezamítá.

Příklad - řešení

- Použijeme-li test na náš příklad, obdržíme:

$$T = \frac{0{,}594/(3-1)}{0{,}006/(10-3)} = 346{,}5\,,\ \mathrm{K} = F_{3,10\text{-}3\text{-}1}(0{,}05) = 4{,}757.$$

- Protože *T* překročilo kritickou hodnotu *K*, zamítá se H_0 a model se považuje za vyhovující, tj. zamítá se hypotéza o nulovosti všech regresních koeficientů (s výjimkou β_0). Testové kritérium překročilo kritickou hodnotu výrazně a stalo by se tak i na jednoprocentní hladině významnosti.

Děkuji za pozornost.