Statistické zpracování dat 11.přednáška

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Téma přednášky:

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Analýza časových řad (3)

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah přednášky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- **Analýza sezónní složky**
- Modely konstantní sezónnosti

- **Analýza náhodné složky**
- **Prognózování v ČR**

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Model konstantní sezónnosti

- se schodovitým trendem
- s lineárním trendem
- s použitím vícenásobné regrese

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Model konstantní sezónnosti se schodovitým trendem

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$y_{tj} = T_{tj} + P_{tj} + u_{tj}$$

$T_{tj} = A_t$ $\quad$ $t=1,2,\ldots,r$ – období (rok) – „roční schody“

$P_{tj} = C_j$ $\quad$ $j=1,2,\ldots,s$ – sezóna (měsíc) – „měsíční fluktuace“

-**konstanta** pro sezónu j v letech $t = 1,2,\ldots,n$

-platí: $\sum_{j=1}^{s} C_j = 0$

Model: $y_{tj} = A_t + C_j$

Odhad regresních koeficientů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Koeficient A_t : „schodovitý" trend

$$a_t = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} y_{tj} = \overline{y}_t$$

- Koeficient C_j : sezónní koeficienty

$$c_j = \frac{1}{r}\sum_{t=1}^{r} y_{tj} - \underbrace{\frac{1}{rs}\sum_{t=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} y_{tj}}_{\overline{y}}$$

- Platí: $\sum_{j=1}^{s} c_j = 0$

Model konstantní sezónnosti s lineárním trendem

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$y_{tj} = T_{tj} + P_{tj} + u_{tj}$$

$$T_{tj} = B_0 + B_1[s(t-1)+j]$$

$t=1,2,\ldots,r$ – období (rok)

$$P_{tj} = C_j$$

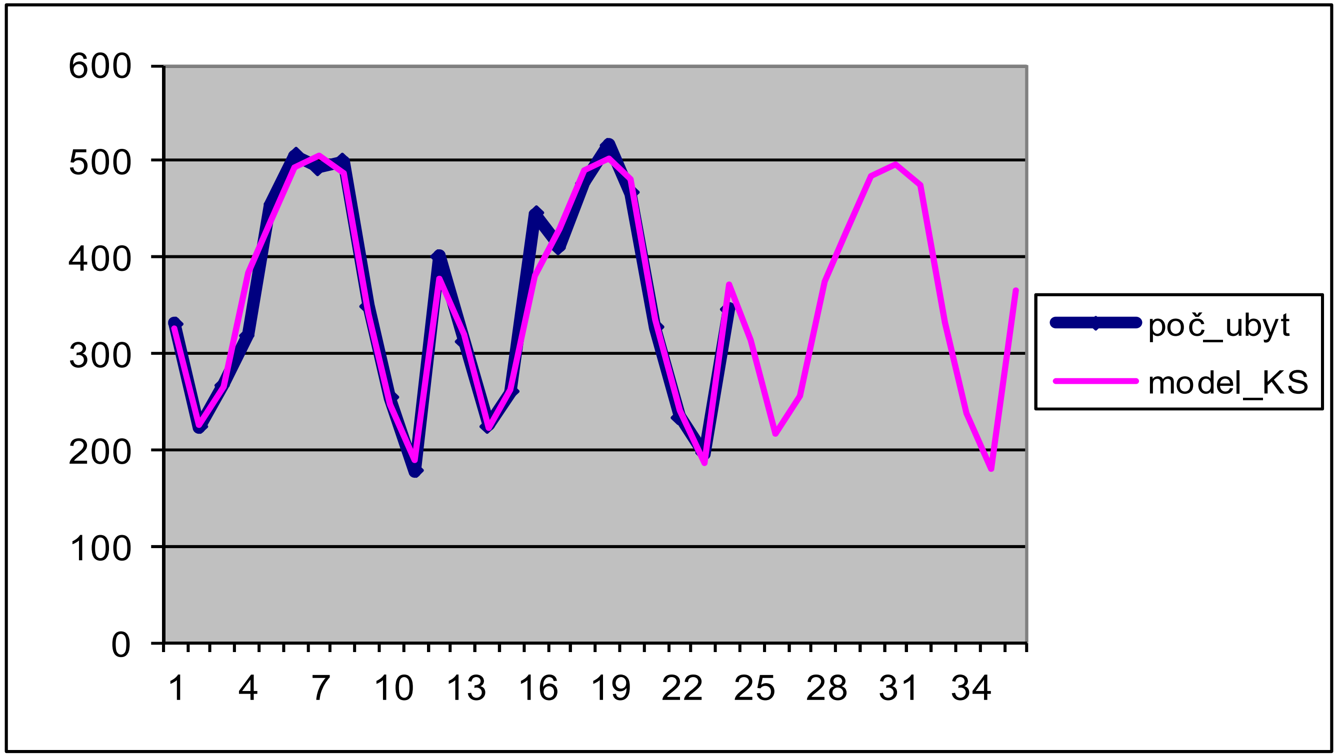
$j=1,2,\ldots,s$ – sezóna (měsíc)

Odhad konstanty C_j pro sezónu j v letech $t = 1,2,\ldots,r$

$$c_j = \frac{1}{r}\sum_{t=1}^{r}(y_{tj} - T_{tj})$$

Model: $$y_{tj} = T_{tj} + C_j$$

Model konstantní sezónnosti - predikce



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Multiplikativní model konstantní sezónnosti s lineárním trendem

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$y_{tj} = T_{tj} . S_j + u_{tj}$$

kde $T_{tj} = at + bj + c$

je trendová f-ce

- $j = 1,2,\ldots,s$ - počet sezón v jednom období (roku)
- $t = 1,2,\ldots,r$ - počet období (roků)
- odhad koeficientů a, b, c pomocí MNČ

Model proporcionální sezónnosti s trendem

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$y_{tj} = T_{tj} + P_{tj} + u_{tj}$$

$$P_{tj} = C_j T_{tj}$$

Aplikací MNČ obdržíme:

$$1 + c_j = \frac{\sum_t y_{tj} \bar{y}_t}{\sum_t \bar{y}_t^2}$$

- sezónní index

Model: $$y_{tj} = T_{tj}(1 + c_j)$$

Analýza náhodné složky

- $y_t = T_t + P_t + u_t \quad t = 1,2,\ldots$ *- teoretický aditivní model ČŘ*

  u_t *- náhodná složka ČŘ*
- $Y_t = T_t' + P_t' + e_t \quad t = 1,2,\ldots,n$ *- konkrétní model ČŘ*

  $e_t = Y_t - T_t' - P_t', \quad t = 1,2,\ldots,n$ *- reziduum*

Zdrojem náhodné složky jsou obvykle nepodchycené, drobné, vzájemně nezávislé náhodné vlivy

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vlastnosti náhodné složky (reziduí)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

1. Náhodné složky u_t v modelu ČR mají:

- **a)** střední hodnotu = 0 , tj. $E(u_t) = 0$
- **b)** normální rozdělení
- **c)** konstatntní rozptyl σ^2 (neznámý)

tzv. ***homoskedasticita vers. heteroskedasticita)***

2. Náhodné složky jsou ***nekorelované***, tj.
$Cov(u_t , u_{t'}) = 0$ pro každé $t \neq t'$, $t,t' = 1,2,\ldots,n$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Testování vlastností náhodné složky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Ad 1 a) Znaménkový test *nulovosti střední hodnoty,* parametrický *z-test*
- Ad 1 b) Test *normality* (např. Chi-kvadrát)
- Ad 1 c) Test *heteroskedasticity* (HS: G-Q -test, Bartletův test)

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Testování vlastností náhodné složky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Ad 2 a) Test *nulovosti autokorelace*

- Ad 2 b) Durbin-Watsonův test *autokorelace*

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Znaménkový test

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Při tomto testu vyčíslíme počet případů, kdy rozdíl

$$e_t - e_{t-1}$$

sousedních reziduí je kladný, jejich počet označíme *S*.

pro střední hodnotu *S* platí (H_0): $E(S) = \frac{n-1}{2}$

Testové kritérium: $$T = \frac{\sqrt{12}\left(S - \frac{1}{2}(n-1)\right)}{\sqrt{n+1}}$$

Pro $n > 12$ (přibližně) **normované normální rozdělení**

$T > |K|$ pak H_0 zamítáme, přitom $K = u_{1-\alpha/2}$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Znaménkový test - příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNÍ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$e_t - e_{t-1}$
-10,50
5,00
-67,00
85,00
-7,50
-27,00
29,00
-4,50
-2,50
-18,50
36,00
-31,58
10,50
-5,00
67,00
-85,00
7,50
27,00
-29,00
4,50
2,50
18,50
-36,00

H₀: $E(e_t) = 0$

$S = 11,\ n = 24$

$$E(S) = \frac{n-1}{2} = \frac{24-1}{2} = 11{,}5$$

$$T = \frac{\sqrt{12}\left(S - \frac{1}{2}(n-1)\right)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{12}(-0{,}5)}{5} = -0{,}346$$

Obor přijetí H_0: (-1,96; 1,96)

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Testy H-S

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

1. **Parkův test H-S:**

   Vychází z přidružené regresní rovnice:

$$\ln e_i^2 = A_0 + A_1 \ln X_i + v_i, \qquad (*)$$

- Rezidua se stanoví z řešení regresního modelu:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i,$$

- Poté se řeší regresní model (*)
- Pokud je odhad koeficientu A_1 statisticky ***nevýznamný***, tj. nulový, hypotézu o existenci H-S ***zamítáme***

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Testy H-S

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

2. Bartletův test H-S:

Vychází z rozdělení dat podle velikosti proměnné X do dvou částí (vzorků): $X_i \leq D$ a $X_i > D$.

Testuje se hypotéza o rovnosti rozptylů v obou vzorcích (Excel, Analýza dat).

Pokud se hypotéza o rovnosti rozptylu zamítá, potom se hypotéza o H-S přijímá (a obráceně).

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příklad

Čas	VaV	Zisk
1	62,5	185,1
2	92,9	1569,5
3	178,3	276,8
4	258,4	2828,1
5	494,7	225,9
6	1083,0	3751,9
7	1620,6	2884,1
8	421,7	4645,7
9	509,2	5036,4
10	6620,1	13869,9
11	3918,6	4487,8
12	1595,3	10278,9
13	6107,5	8787,3
14	4454,1	16438,8
15	3163,8	9761,4
16	13210,7	19774,5
17	1703,8	22626,6
18	9528,2	18415,4

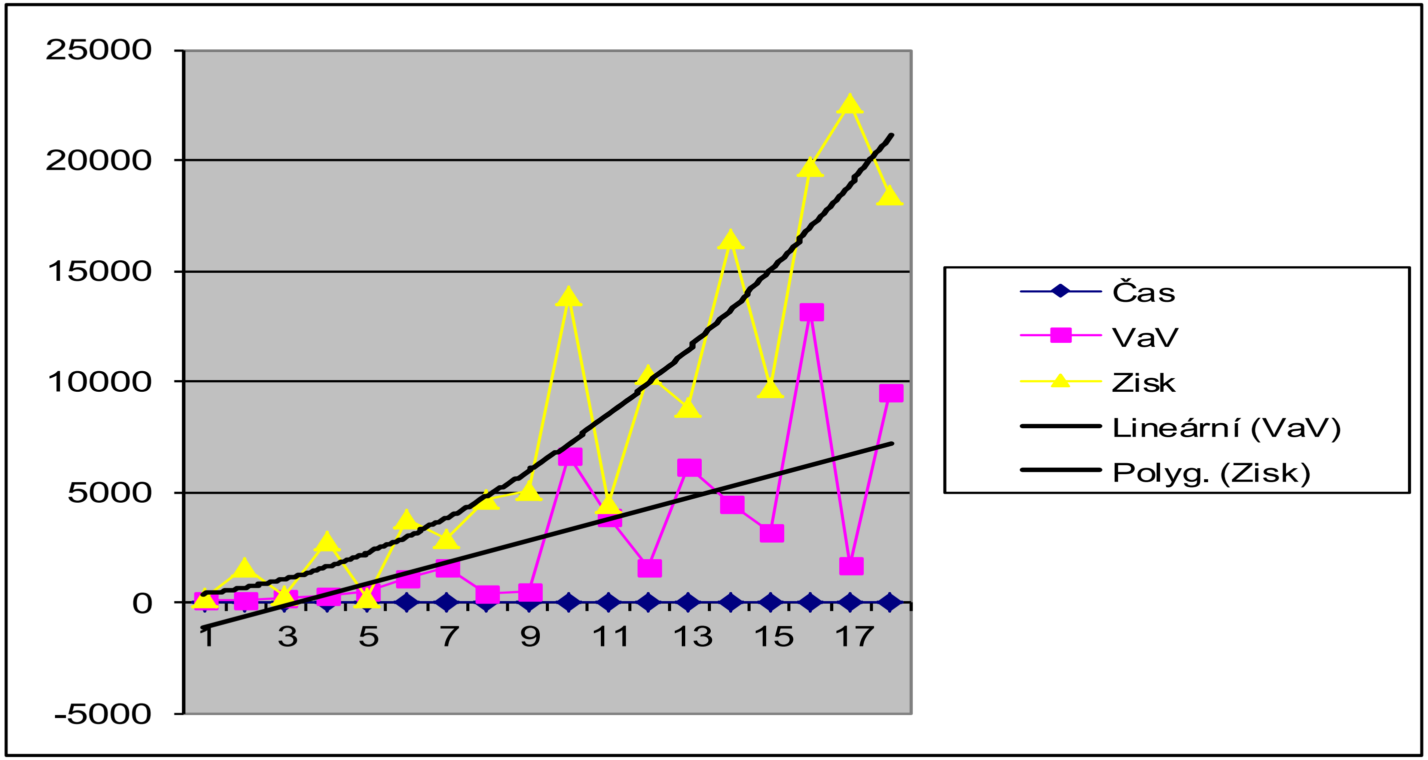
Trendové funkce:

$$VaV_t = b_0 + b_1 t$$

$$Zisk_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příklad – grafické znázornění



Příklad: Testy H-S

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

1. Parkův test:

   hypotézu H-S zamítáme na hladině 5%

2. Bartlettův test:

   hypotézu H-S **nezamítáme** na hladině 5%

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Test nulovosti autokorelací reziduí

- Autokorelační funkce ρ_k: $\rho_k = Cor(e_t, e_{t-k})$

  Má platit: $\rho_k = 0$ pro $k \neq 0$
- Odhady autokorelační funkce r_k: $$r_k = \frac{\sum_t e_t e_{t-k}}{\sum_t e_t^2}$$

Test H_0: $\rho_k = 0$

Testové kritérium: $$T_k = \frac{r_k \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_k^2}}$$

Obor přijetí: $A = (-u_{1-\alpha/2}, u_{1-\alpha/2})$

Má platit: $T_k \in A$ pro $k > 0$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Korelace dvou časových řad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

2 ČŘ: $X: \; x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n \qquad Y: \; y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n$

$$c_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

- ***kovariance***

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{s_x s_y}$$

- ***korelace*** (normovaná c_{xy})

číslo z intervalu [-1; 1]

≈ **1:** shodný vývoj hodnot časových řad

≈ **-1:** opačný vývoj hodnot časových řad

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Autokorelace časové řady

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

ČŘ: $X: \; x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-k}$ $\quad Y: x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$

- vzájemný posun o k časových jednotek ($k = 1,2,\dots$)

$$\rho_k = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_{i-k} - \overline{x})}{s_x^2}$$

- autokorelace k-tého řádu- ACF
- číslo z intervalu [-1; 1]

≈ **1:** k-té sousední hodnoty jsou si blízké

≈ **-1:** k-té sousední hodnoty jsou si opačné

≈ **0:** k-té sousední hodnoty jsou nezávislé

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příklad: test nulovosti autokorelací reziduí

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

e_t	e_{t-1}	e_{t-2}	e_{t-3}	e_{t-4}	e_{t-5}	e_{t-6}
7,04	-3,46	1,54	-65,46	19,54	12,04	-14,96
-3,46	1,54	-65,46	19,54	12,04	-14,96	14,04
1,54	-65,46	19,54	12,04	-14,96	14,04	9,54
-65,46	19,54	12,04	-14,96	14,04	9,54	7,04
19,54	12,04	-14,96	14,04	9,54	7,04	-11,46
12,04	-14,96	14,04	9,54	7,04	-11,46	24,54
-14,96	14,04	9,54	7,04	-11,46	24,54	-7,04
14,04	9,54	7,04	-11,46	24,54	-7,04	3,46
9,54	7,04	-11,46	24,54	-7,04	3,46	-1,54
7,04	-11,46	24,54	-7,04	3,46	-1,54	65,46
-11,46	24,54	-7,04	3,46	-1,54	65,46	-19,54
24,54	-7,04	3,46	-1,54	65,46	-19,54	-12,04
-7,04	3,46	-1,54	65,46	-19,54	-12,04	14,96
3,46	-1,54	65,46	-19,54	-12,04	14,96	-14,04
-1,54	65,46	-19,54	-12,04	14,96	-14,04	-9,54
65,46	-19,54	-12,04	14,96	-14,04	-9,54	-7,04
-19,54	-12,04	14,96	-14,04	-9,54	-7,04	11,46
-12,04	14,96	-14,04	-9,54	-7,04	11,46	-24,54
14,96	-14,04	-9,54	-7,04	11,46	-24,54	
-14,04	-9,54	-7,04	11,46	-24,54		
-9,54	-7,04	11,46	-24,54			
-7,04	11,46	-24,54				
11,46	-24,54					
-24,54						

Autokorelační funkce ρ_k: $\rho_k = Cor(e_t, e_{t-k})$

Má platit (H_o): $\rho_k = 0$ pro $k \neq 0$

Odhady ACF r_k *a výpočet* T_k:

rk	Tk
-0,30138	-0,30138
-0,09059	-0,09059
0,128612	0,128612
0,145442	0,145442
-0,33468	-0,33468
-0,06358	-0,06358

Obor přijetí H_o: (-1,96;1,96)

$\Rightarrow$ **H_o** přijímáme !

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Prognózování v časových řadách

Zkonstruovat prognózu znamená provést v časovém okamžiku t (obvykle současný okamžik) odhad y neznámé veličiny časové řady v čase $t + h$, kde h je zadaný horizont prognózy (předpovědi, extrapolace,…).

Tvorba bodové prognózy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Model:

$$y(t) = T(t) + S(t) + u(t)$$

Prognóza na h časových jednotek:

$$y(t+h) = T(t+h) + S(t+h)$$

- ***T*** - analytická trendová funkce
- ***S*** - sezónní funkce (podle typu modelu)
- $u(t+h) = 0$ - náhodná složka $E(u) = 0$ (bílý šum !!!)

Prognózování pomocí lineární regresní funkce

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Bodový odhad předpovědi Y_{th} získáme dosazením časového horizontu t_h:

$$Y_{th} = b_0 + b_1 t_h$$

Intervalový odhad předpovědi:

$$[Y_{th} - t_{1-\alpha/2}(n\text{-}2)\; s_R\sqrt{H}\;, Y_{th} + t_{1-\alpha/2}(n\text{-}2)\; s_R\sqrt{H}\;]$$

kde
$$H = 1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{\left(nt_h - \sum t_i\right)^2}{n\sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2}\right]$$

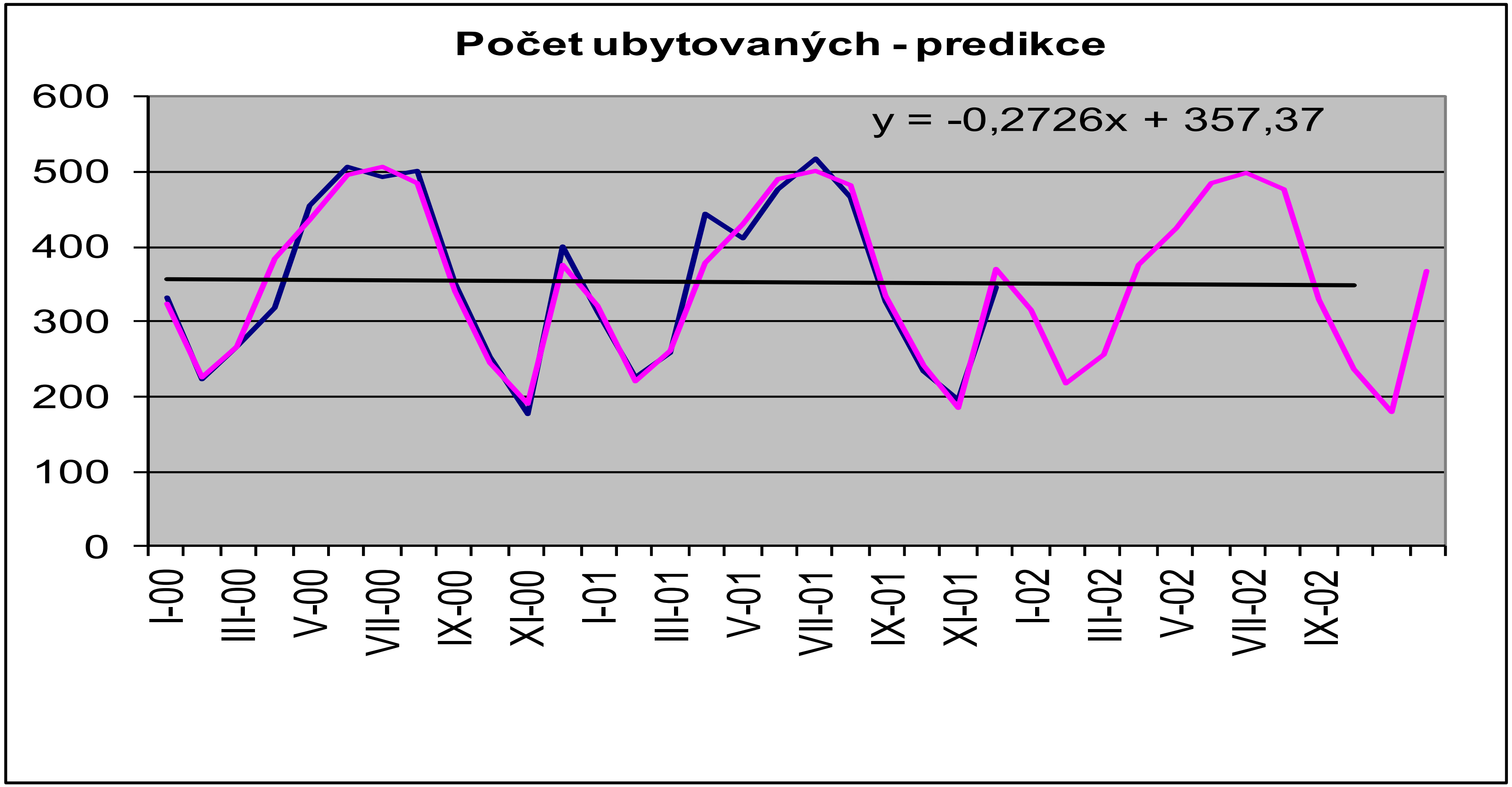
s_R – směrodatná chyba odhadu, n – počet dat

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Aditivní model konstantní sezónnosti

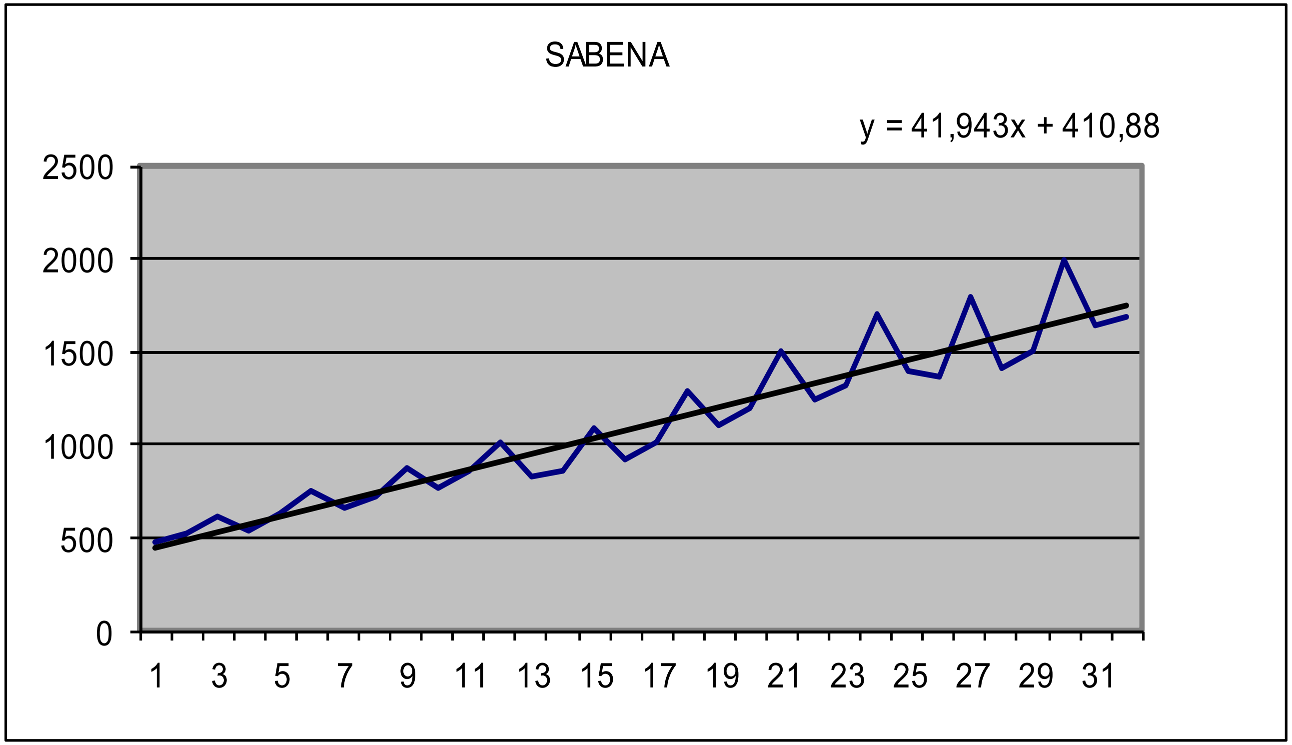
SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příklad – konstantní sezónnost s lineárním trendem

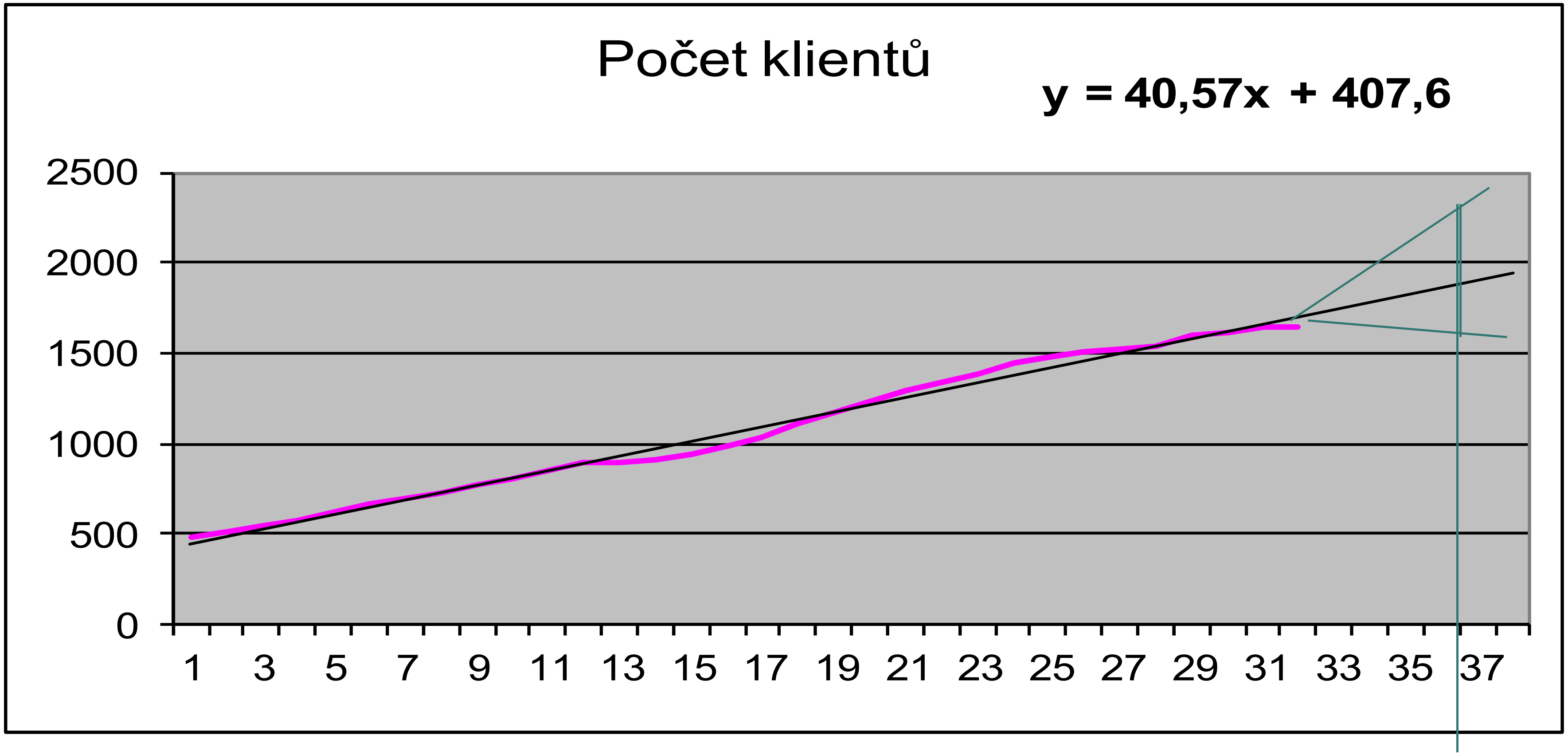
SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Intervalové prognózy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Závěr přednášky

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Děkuji Vám za pozornost!!!

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY