Slezská univerzita v Opavě
Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné

FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA A

Jarmila Šlechtová

Karviná 2004

OBSAH MODULU FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA A

ÚVODEM MODULU FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA A

Tento text představuje studijní oporu pro distanční studium ekonomických studijních programů v bakalářském studiu na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné.

Distanční vysokoškolské studium je specifická forma, která v případě předmětu Finanční a pojistná matematika A vyžaduje schopnost koncentrace na předmět, aktivní přístup spočívající v podrobném prostudování jednotlivých kapitol.

Tato studijní opora by měla pomoci nahradit kvalitní prezenční výuku i úlohu učebnic a skript. Distanční opora je k tomu účelu vybavena určitými nástroji, specifickými právě pro distanční formu, o jejichž funkcích byste měli vědět a mohli je tudíž účelně využívat ve svůj prospěch.

Samotný učební text, nebo jak se říká v terminologii distančního studia: *studijní opora* – umožňuje distančnímu studentovi vzdálenému od svých učitelů i spolužáků se o ní s důvěrou opřít – je rozčleněn do 9 kapitol. Jednotlivé kapitoly odpovídají celkem 12 výukovým týdnům jednoho semestru, což ale znamená, že 6 kapitol je přibližně stejně obsahově rozsáhlých a obtížných, 3 jsou dvojnásobně časově náročné. Takový rozsah učiva odpovídá klasické hodinové přednášce, avšak dvouhodinovému semináři určenému k praktickému procvičení v prezenčním studiu na vysoké škole ekonomického zaměření.

Finanční a pojistná matematika A je název pro první část předmětu, který fakticky obsahuje pouze oblast finanční matematiky. Pokračováním tohoto předmětu je Finanční a pojistná matematika B, jehož obsahem je oblast pojistné matematiky.

Problematika, která je obsahem tohoto modulu, se z toho důvodu týká matematických aplikací pro oblast financí. Zahrnuje operace s možností využití matematiky pro jednoduché a složené úrokování, spoření, výpočty důchodů, při úvěrování, výpočtech současné hodnoty akcií a obligací, při přepočtech kapitálu na zahraniční měny, při termínových obchodech s cennými papíry. Pohled na hospodářský komplex přesahuje otázky finanční matematiky, ovšem v řadě případů je nutno kvalifikovat finanční aspekty.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY MODULU FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA A

Modul je uspořádán do těchto kapitol:

1. **Vymezení základních pojmů** - úvodní kapitola se věnuje definování pojmů jako jsou finanční a pojistná matematika, finanční operace, úrok, věřitel, dlužník, kapitál, důchod, úročení, úroková míra, míra zisku, diskontní sazba, úvěr.

2. **Opakování matematických pojmů** – v této kapitole jsou zopakovány matematické pojmy, které užívá finanční a pojistná matematika, jimiž je procentový počet, funkce - lineární, exponenciální a logaritmická, průměry – aritmetický, geometrický, harmonický, posloupnosti a řady – aritmetická a geometrická.

3. **Úrokování** – tato kapitola se nejdříve věnuje vysvětlení pojmu jednoduché úročení, úrok, úrokovací období, pak dělení úrokování na jednoduché a složené, každé z nich pak na polhůtní a předlhůtní, základní rovnici pro jednoduché úročení, současná hodnotě a diskontu. Zároveň jsou vysvětleny pojmy efektivní úroková míra, úroková intenzita, nominální a reálná úroková míra, časová hodnota peněz, to vše s výpočty, včetně aproximačních vztahů pro počet úrokovacích období.

4. **Krátkodobé cenné papíry** - kapitola je zaměřena aplikaci jednoduchého úrokování na krátkodobých cenných papírech. Věnuje se tak krátce pojmům směnka, eskont, bankovní akcept, pokladniční poukázka, depozitní certifikát, běžný účet a kontokorentní úvěr, skonto, neb tato problematika je podrobně probírána i v jiných předmětech.

5. **Složené úrokování** – tato kapitola je věnována základní rovnici složeného úročení, področnímu složenému úrokování, kombinaci jednoduchého a složeného úročení, ale též výpočtům různých proměnných z rovnice, jako je doba splatnosti, současná hodnota, úroková míra.

6. **Spoření** - kapitola definuje pojem spoření, popisuje včetně matematických formulí výpočet krátkodobého a dlouhodobého spoření, oba tyto druhy pak jako předlhůtní nebo polhůtní spoření. Zároveň je zde ukázána kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření jako běžně užívaného způsobu výpočtu.

7. **Důchody** – v této kapitole se dozvíte, jak vypočítat důchod bezprostřední, odložený a věčný, každý zároveň jako předlhůtní nebo polhůtní, ale též o umořování dluhu.

8. **Obligace a akcie** – kapitola popisuje obligace, její cenu a renditu, stejně tak akcie, cenu akcie, poměrové a kvantitativní ukazatele pro kurz akcie, rozdíly mezi obligacemi a akciemi.

9. **Riziko ve finanční matematice** - kapitola se zabývá definicí tohoto pojmu ve finanční matematice, faktory, které ho ovlivňují. V závěru této kapitoly se zmíníme o pojmu finanční a časové řady, který je hojně využíván pro analýzy všeho druhu ve finančním sektoru.

CÍL MODULU FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA A

Po úspěšném a aktivním absolvování tohoto MODULU

Získáte:

- Informace o základních znalostech současného pojistného matematika.
- Získáte informace pro manažera, který působí ve firmě, která má povinnost pojistného matematika zaměstnávat.

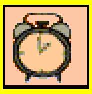
Získáte

Budete schopni:

- Vysvětlit pojem finanční a pojistná matematika.
- Vymezit podstatu a charakter pojmu finanční operace.
- Stanovit variantní způsoby výpočtů ve finančním sektoru.

Budete schopni

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU



K prostudování učiva tohoto modulu budete potřebovat: 42 hodin včetně čtyřhodinového tutoriálu.

1 VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Tato úvodní kapitola se věnuje definování pojmu Finanční a pojistná matematika A, funkcím a členění tohoto oboru. Není však přímo zaměřena na vymezení profilu člověka, který se orientuje v oblasti finanční a pojistné matematiky. Vzhledem k tomu, že absolvent vysoké školy technického zaměření, k níž patří i Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné Slezské univerzity v Opavě, nemůže vykonávat funkci odpovědného pojistného matematika, kterou definuje § 23 zákona 363/1999 Sb. v platném znění, nebude předmětem našeho zájmu se zabývat jeho postavením, právy ani povinnostmi.

CÍLE KAPITOLY VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět

Budete umět:

Vysvětlit pojem finanční a pojistná matematika.

Vymezit podstatu a charakter pojmu finanční operace.

Vysvětlit pojmy úrok, věřitel, dlužník, úročení, úroková míra, míra zisku.

Získáte

Získáte:

Přehled o základních pojmech finanční matematiky.

Budete schopni

Budete schopni:

Orientovat se a znát obsah pojmů ve finanční matematice.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 135 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Klíčová slova

Finanční matematika, pojistná matematika, finanční operace, úrok, věřitel, dlužník, kapitál, důchod, úročení, úroková míra, míra zisku, diskontní sazba, úvěr.

PRŮVODCE STUDIEM 1

Principy finanční a pojistné matematiky vychází ze základních znalostí středoškolské matematiky. V této kapitole se budete věnovat obsahům pojmů finanční matematiky, to tedy znamená v rozsahu „A“.

1.1 Pojem finanční a pojistná matematika A

V celém svém rozsahu , tj. jak A, tak především B, znamená pojem **finanční a pojistná matematika** užívaný v angličtině jako **financial and actuarial mathematic**, nebo též financial and actuarial theory:

- **Actuarial calculations** zahrnující pojistně technické kalkulace, tj. soubor matematických metod, s jejichž pomocí se hodnotí matematické, statistické a demografické jevy relevantní pro kalkulaci nezbytné úrovně sazeb pojistného, rezerv pojistného i bezpečnostních a výkyvových rezerv, které pak dohromady nazýváme technické rezervy. K pojistně-technickým kalkulacím patří i modely sloužící k indexaci a valorizaci částek s cílem držet krok s inflačním vývojem nebo alespoň částečně zmírnit jeho dopad.

- **Actuary** – zastarale v době 1. republiky (Československa) pojistný technik, nyní pojistný matematik, nebo též aktuár. Pracovník pojišťovny či samostatný expert, který se zabývá pojistně technickými kalkulacemi, jimiž jsou především výpočet sazeb pojistného, výpočet výše technických rezerv a výpočet solventnosti.

K ZAPAMATOVÁNÍ 1

Matematika aplikovaná ve finanční sféře se nazývá **finanční matematika.**

K ZAPAMATOVÁNÍ 2

Matematika aplikovaná v pojišťovací činnosti se nazývá **pojistná matematika**.

K ZAPAMATOVÁNÍ 3

Při řešení úloh z oblasti finanční matematiky si vždy musíme uvědomit:

1. zda řešíme příjem nebo vydání,
2. kdy dochází k platbě položky,
3. od kdy se počítá čas,

tudíž pak

a) jaká je doba splatnosti,

b) jaká je výše každé platby.

1.1.1 Finanční operace

K ZAPAMATOVÁNÍ 4

Podstatnou částí hospodářství každého státu je finanční soustava, která v sobě zahrnuje **finanční operace** nejrůznějšího druhu.

Při těchto finančních operacích je nutné ovládat především úrokovací počet.

Mezi tyto operace patří:

emisní činnost – znamená vydávání peněz, akcií, obligací a jejich uvedení do oběhu. Stát dá příkaz nějaké instituci (bance) a ta se postará o tisk a uvedení do oběhu,

směnárenská činnost - se zabývá směnou cizích valut a deviz za domácí peníze a obráceně **(deviza -** směnka, šek, nebo jiný formální příkaz znějící na cizozemskou měnu, pohledávka vůči cizině s výjimkou valut; ***valuta*** - hodnota měny nebo zboží v mezinárodním obchodě v určitou dobu (den); ***měna; zahraniční měna***),

úvěrová činnost - se zabývá opatřováním finančních prostředků formou krátkodobých a dlouhodobých půjček,

spořitelní činnost - znamená shromažďování úsporných vkladů obyvatelstva a organizací, shromažďování peněžních prostředků,

pojišťovací činnost – se soustřeďuje na přerozdělování peněžních prostředků, které jsou úplatou za převzatá rizika.

Při těchto finančních operacích je nutné ovládat především úrokovací počet a aplikovanou matematiku v oboru financí.

1.2 Základní termíny užívané ve finanční matematice

Základním pojmem finanční a pojistné matematiky je **úrok**. Tato veličina hraje důležitou úlohu i v ekonomii a bankovnictví, kde je významným faktorem při uzavírání obchodů ovlivňujícím výhodnost jak z hlediska věřitele, tak i z hlediska dlužníka.

Úrok proto musíme posuzovat ze dvou hledisek:

z hlediska věřitele - (vkladatele, investora) je úrok odměna za dočasné poskytnutí peněz někomu jinému. Jedná se především o odměnu za dočasné pozbytí dispozičního práva s penězi, za pokles jejich hodnoty během půjčky vzhledem k inflaci, za podstoupení určitých rizik spojených s tím, že se peníze „pustí na určitou dobu z ruky“, apod.,

z hlediska dlužníka -je úrok cena, kterou tato osoba platí za získání peněz pro sebe, tj. za získání tzv. úvěru.

K ZAPAMATOVÁNÍ 5

Základním pojmem finanční a pojistné matematiky je **úrok**. Posuzování úroku provádíme ze dvou hledisek, a to:

- z hlediska věřitele,
- z hlediska dlužníka.

1.2.1 Úrok

Úrok - je odměna za dočasné užívání peněžité částky, řídí se procentním poměrem k užívané částce a trváním, tj. dobou užívání finanční částky.

Úrokové období - je doba, za kterou se úrok pravidelně připisuje.

1.2.2 Věřitel, dlužník

Věřitel - osoba, instituce, které finanční částka patří.

Dlužník - osoba, instituce, která peněžitou částku užívá.

Zvláštním případem tohoto partnerství je smluvní poměr mezi vkladatelem a peněžním ústavem:

- vkladatel je věřitel,
- peněžní ústav je dlužník!

Totéž platí v případě pojištění:

- pojištěný je věřitel,
- pojišťovna je dlužník!

Ve všech úlohách finanční matematiky jde vždy o smluvní platební závazky mezi dvěma stranami, dvěma partnery.

ÚKOL K ZAMYŠLENÍ 1

Při sjednání hypotečního úvěru je věřitel ten, komu banka úvěr poskytla, nebo přímo hypoteční banka?

1.2.3 Kapitál, důchod

Kapitál - je jistina, tj. užívaná peněžitá částka.

Důchod - nebo-li anuita, vyplývající ze smluvního jednání, že místo o jednorázovou peněžitou částku se při finanční operaci jedná o větší počet pravidelně uhrazovaných peněžitých částek. Ty pak nazýváme důchodem nebo též anuitou.

ÚKOL K ZAMYŠLENÍ 2

Jedná se o anuitu, sjednáte-li si splácení např. při koupi automatické pračky formou deseti plateb bez tzv. navýšení?

1.2.4 Výše úroku, úročení

Výše úroku

1. je buď určená závaznou normou, tj.právním předpisem,
2. nebo kolísá ve shodě se zákonem nabídky a poptávky.

Úročení - je způsob započítávání úroků k zapůjčenému kapitálu.

1.2.5 Úroková míra, míra zisku

Úroková míra (úroková sazba) je úrok vyjádřený relativně, tj. jako část z hodnoty kapitálu (úrok vyjádřený v procentech z hodnoty kapitálu). Spektrum úrokových měr existujících v každém hospodářském regionu patří k důležitým ekonomickým ukazatelům.

Míra zisku (míra výnosnosti, výnosnost, výnosové procento apod.)je úroková míra realizovaná v rámci investování. Z matematického hlediska je ovšem ekvivalentní s úrokovou mírou.

1.2.6 Faktory ovlivňující úrokovou míru

Úroková míra závisí na celé řadě faktorů. Nejdůležitější z nich jsou:

diskontní sazba je úroková sazba, za kterou centrální banka (cedulová banka, emisní banka, „banka bank“) poskytuje úvěr ostatním obchodním bankám (jedná se většinou o tzv. refinanční úvěr krátkodobého charakteru, který je pro obchodní banky obvykle výhodný). Zvýšení (resp.snížení) diskontní sazby má většinou za následek zvýšení (resp. snížení) úrokových měr nejen u jednotlivých obchodních bank, ale na celém finančním trhu,

mezibankovní úroková míra je úroková míra, kterou používají obchodní banky při poskytování krátkodobých úvěrů mezi sebou navzájem a která se denně mění (např. FIBOR = Frankfurer Interbak Offer Rate, LIBOR = London…, PRIBOR = Prague…),

strategie banky je podřízena především požadované úrokové marži, tj. rozdílu mezi úrokovou mírou úvěrů a vkladů. Na rozdíl od velkých zavedených bank se malé i nově vznikající banky musí zpočátku spokojit s malou marží, aby např. mohly přilákat peníze velkými úrokovými mírami z vkladů. Každá banka si obvykle stanovuje tzv. základní úrokovou míru(většinou stabilní pro určité období), z níž odvozuje úrokové míry jednotlivých produktů pomocí stanovených odchylek,

riziko půjčky podstatně ovlivňuje výši úrokové míry nebo míry zisku tím způsobem, že úroková míra většinou roste s rostoucím rizikem půjčky (investice),

nejnižší úrok obvykle vynášejí státní cenné papíry, neboť půjčka poskytnutá státu má většinou takové garance, že je téměř bez rizika. Úrokové míry pro obchodní a bankovní úvěry jsou již podstatně vyšší, tzv. prime rate (prima sazbu), což je nejnižší úroková míra z bankovních úvěrů, kterou obchodní banky poskytují při krátkodobých úvěrech svým prvotřídním klientům; pro ostatní klety mohou být odpovídající úrokové míry výrazně vyšší,

doba půjčky znamená, že většinou roste úroková míra s rostoucí dobou půjčky, neboť delší dobu půjčky je nutné zohlednit větší odměnou za takovou půjčku,

výše zapůjčeného kapitálu znamená, že úroková míra často roste s rostoucí výši zapůjčeného kapitálu,

daňová politika státu znamená, že finanční rozhodování se obvykle řídí až čistými výnosy a čistými cenami úvěrů po zdanění,

úroky z úvěru jsou odpočitatelnou položkou z daňového základu, což vlastně snižuje cenu úvěru.

Pozn. 1.2.1:

Diskontní politika centrální banky jako důležitý nástroj měnové politiky vlády působí prostřednictvím zdražování či zlevňování úvěrů na množství peněž v ekonomice, a tím také na inflaci a vůbec na celkový hospodářský vývoj.

Např. při **zvýšení diskontní sazby** lze očekávat zvýšení úrokových měr úvěrů a vkladů u obchodních bank, což omezí poptávku po úvěrech a zvýší zájem o vklady, neboli jedná se o protiinflační opatření restriktivního charakteru snižující množství peněz v oběhu.

Naopak **snížení diskontní sazby** je expanzivní opatření zlevňující úvěry za účelem zastavení poklesu ekonomického růstu). Některé obchodní banky odvozují své úrokové sazby pro jednotlivé typy úvěrů a vkladů pomocí pevně daných odchylek od diskontní sazby.

SHRNUTÍ KAPITOLY VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

V této úvodní kapitole jste se dozvěděli různé pohledy na definování pojmů z finanční a pojistné matematiky. Především již vám bude znám pojem **finanční operace** a budete vědět, které všechny činnosti do tohoto pojmu zahrnujeme.

Stejně dobře budete umět vysvětlit pojmy a termíny užívané především ve finanční matematice.

Jedním z důležitých pojmů této disciplíny je **úroková míra**, kterou budete nejen umět definovat, ale i vysvětlit, které faktory ovlivňují její výši. Tomuto pojmu se dále budeme věnovat v kapitole 3.

KONTROLNÍ OTÁZKA 1

1. Vysvětlete pojem „finanční operace“a vyjmenujte je.
2. Vysvětlete pojmy „finanční matematika“ a „pojistná matematika“ Vyjmenujte a vysvětlete pojmy užívané ve finanční matematice.
3. Vyjmenujte a vysvětlete faktory, které ovlivňují úrokovou míru.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 1

Vaším úkolem je vyjmenovat finanční operace, pojmy užívané ve finanční matematice. Napište, jak ovlivňuje výši úrokové míry diskontní sazba.

2 OPAKOVÁNÍ MATEMATICKÝCH POJMŮ

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY OPAKOVÁNÍ MATEMATICKÝCH POJMŮ

Tato kapitola je rozdělena do čtyř podkapitol.

V první bude zopakován pojem procentový počet se všemi třemi variantami výpočtů, s nimiž se setkáváme při použití tohoto aparátu. Jimi jsou výpočet procentové části, výpočet základu a výpočet počtu procent.

Ve druhé podkapitole si zopakujete pojem funkce a zároveň pak funkci lineární, exponenciální a logaritmickou.

Třetí kapitola bude možná pro některé z vás z části nová, neboť v ní se budeme věnovat pojmu průměr, ovšem ne z hlediska geometrického, ale algebraického. Ukážeme si výpočet aritmetického průměru, geometrického a harmonického a u všech tří též průměry vážené.

Čtvrtá podkapitola obsahuje zopakování pojmů posloupnost a řada, kde si zopakujete řadu aritmetickou a geometrickou.

CÍLE KAPITOLY OPAKOVÁNÍ MATEMATICKÝCH POJMŮ

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět: procentový počet, základní typy funkcí, spočítat ze zadaných hodnot kterýkoliv typ průměru, zjistit ze zadaných hodnot jak konkrétní požadovaný člen řady aritmetické i geometrické, tak i součet konkrétní řady.	Budete umět

Získáte: schopnost ze zadaných prvků vypočítat kteroukoliv neznámou.	Získáte

Budete schopni: • rozlišit např. aritmetickou řadu od geometrické, exponenciální funkci od logaritmické, průměr aritmetický od harmonického, ale i se dokážete rozhodnout, kdy který použijete.	Budete schopni

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 180 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY OPAKOVÁNÍ MATEMATICKÝCH POJMŮ

Procento, procentový základ, funkce, lineární, exponenciální a logaritmická funkce, průměr aritmetický, geometrický, harmonický, posloupnost a řada aritmetická, geometrická.

PRŮVODCE STUDIEM 2

Nyní již víte, co všechno se rozumí pod pojmem finanční operace, finanční matematika, pojistná matematika, umíte vysvětlit nejdůležitější pojmy užívané ve finanční matematice a víte, které faktory mají vliv na výši úrokové míry.

V další kapitole si zopakujete ty matematické pojmy střední školy, které budeme po celou dobu studia Finanční a pojistné matematiky A potřebovat.

Pro to, abychom mohli znalosti oboru Finanční a pojistná matematika A prohlubovat, je nutné zopakovat některé pojmy zasahující do většiny výpočtů finanční matematiky. Možná pro některé z Vás jsou tyto pojmy i co do obsahu a způsobů výpočtů naprosto jasné. Pak tedy nic nebrání tomu, abyste jen v rychlosti pročetli a přešli ke kapitole 3.

2.1 Procentový počet

Procento je pojem latinského původu. Znamená vždy setinu celku, kterému budeme říkat **základ**.

Základním rysem procentového počtu je, že velikost dané veličiny neuvádíme jen absolutně, tj. v daných jednotkách, ale též i relativně, tj. poměrem k velikosti téže veličiny, která je vyjádřena ve stejných jednotkách a je považována za základ.

Pro **jedno procento** potom platí:

$$1\ \%\ \text{ze základu je}\ \frac{1}{100}\ \text{základu, nebo též}\ 0{,}01\ \text{základu,}$$

100 % = jeden celek = základ, tudíž 100 % = 1.

V úlohách procentového počtu se objevují **tři veličiny**:

1) základ,

2) počet procent,

3) procentová část, která je vyjádřením části odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách.

2.1.1 Výpočet procentové části, základu, počtu procent

Při výpočtu známe dvě veličiny a třetí počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

výpočet procentové části $x = z \cdot \dfrac{p}{100}$

výpočet základu $z = x \cdot \dfrac{100}{p}$

výpočet počtu procent $p = x \cdot \dfrac{100}{z}$

Pozn. 2.1.1. - Jednou z možností výpočtu je i použití úměry neboli trojčlenky.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2.1.1

Prodejce léků měl sjednaný podíl na zisku 15 % z prodejní ceny zboží. Cena léků činila 120 % výrobní ceny. Kolik to bude dělat pro prodejce procent z výrobní ceny léků a jaký zisk to pro něj znamená, prodá-li léky, jejichž celková výrobní cena byla 100 tisíc Kč.

Řešení příkladu

z = 120

p = 15 %

x = ?

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 120 \cdot \frac{15}{100} = 18\ \%$$

z = 100.000

p = vypočtené x

x = ?

$$\frac{x}{100} \cdot 100\ 000 = 18\ 000$$

Pro prodejce léků znamená prodej daného objemu léků zisk 18 %, z výrobní ceny to pak bude činit 18.000 Kč. *

2.2 Funkce

Funkcí nazýváme předpis, podle něhož přiřadíme každé určité hodnotě $\boldsymbol{x}$ právě jedinou určitou hodnotu $\boldsymbol{y}$. Tento vztah matematicky zapíšeme:

$$y = f(x) \ ,$$

kde

- proměnná $\boldsymbol{x}$ je nazývána nezávisle proměnná,
- proměnná $\boldsymbol{y}$ je nazývána závisle proměnná.

Dá se tedy v tomto případě též říci, že proměnná **y** je závislá na proměnné ***x.***

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2.2.1

Víme-li, že zaměstná-li podnikatel zaměstnance za hrubou mzdu 10.800 Kč, pak jeho mzdové náklady pro tohoto zaměstnance jsou závislé na počtu zaměstnanců tuto profesi vykonávajících. Vyjádřete tuto závislost.

Řešení příkladu

$y = 10800 \cdot x$, kde **x** je počet zaměstnanců a jedná se tedy o nezávisle proměnnou, **y** je pak závisle proměnná.

Tím jsme dali do funkční závislosti počet zaměstnanců a mzdové náklady. *

2.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis

$$y = k \cdot x + q \ ,$$

kde ***k, q*** jsou konstanty, se nazývá **lineární funkce.**

Pozn. 2.2.1. **-** Vysvětlit k,q ! –.viz středoškolská matematika (např. Přehled středoškolské matematiky-Polák).

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2.2.1.1

Nechť cena zpáteční letenky Praha - Řím je 8.400 Kč. Cena jednoho dne pobytu v hotelu včetně snídaně tamtéž pro 1 osobu je 1.300 Kč, pak lze vyjádřit. Vyjádřete celkovou cenu pobytu v závislosti na jeho délce.

Řešení příkladu

$y = 1300 \cdot x + 8400$, kde **x** je počet dnů, tedy nezávisle proměnná, **y** je pak celková cena pobytu.

Tím jsme dali do funkční závislosti počet dnů a celkovou cenu pobytu, ale zároveň byl zohledněn jednorázový náklad, jímž byla cena letenky. *

Pozn. 2.2.2. **-** Kdyby se jednalo o cenu pobytu v místě bydliště. tj. náklady na letadlo jsou nulové, pak by šlo o tzv. **přímou úměrnost.**

Tento vztah vyjádříme funkčním předpisem $y = k \cdot x$**,** jehož grafem je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.

Pozn. 2.2.3. - Závislost zvaná **nepřímá úměrnost** znamená, že součin každých dvou odpovídající si hodnot ***x_1, y_1; x_2, y_2***, … je roven téže konstantě **k,** což v praxi znamená, že $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \ldots = k$.

Tento vztah vyjádříme funkčním předpisem $y = \frac{k}{x}$**,** jehož grafem je rovnoosá hyperbola.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2.2.2

Vezměme hodnoty z předcházejícího příkladu chtějme vyjádřit celkovou cenu pobytu v závislosti na jeho délce, víme-li, že za ubytování jsme ochotni dát maximálně 10.000 Kč.

Jinými slovy, bude-li známa celková cena, kterou jsme ochotni investovat do ubytování a cena hotelu za jednu noc, zjistěte, kolik nocí můžeme v hotelu strávit.

Řešení příkladu

$y = \frac{10000}{x}$, kde ***x*** je cena hotelu za jednu noc, tedy nezávisle proměnná, **y** je pak počet možných dnů pobytu.

Tím jsme dali do funkční závislosti cenu za jednu noc a počet dnů pobytu, jestliže jsme znali celkovou cenu pobytu.

2.2.2 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, která má nezávisle proměnnou v exponentu:

$$y = a^x,$$

kde musí být $a\rangle 0$, ***x*** je racionální číslo, tzn. že ho lze vyjádřit jako $x = \dfrac{p}{q}$, kde ***p, q*** jsou libovolná celá čísla.

Pozn. 2.2.4

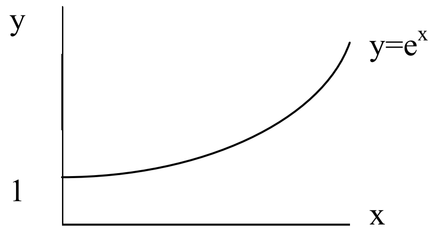
a) Je-li $x = 0$, pak $a^x = 1$, potom se všechny exponenciální křivky protínají v bodě [0,1],

b) je-li $a = 1$, pak $y = 1$, pak grafem je přímka rovnoběžná s osou x protínající osu y v bodě 1,

c) speciální případ $y = e^x$ je funkce, kde ***e*** je tzv. Eulerova konstanta definovaná jako $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ a budeme ji potřebovat při definování úrokové intenzity.

Pozn. 2.2.5 - Funkční hodnoty ***y*** exponenciální funkce jsou pro všechny hodnoty nezávisle proměnné ***x*** vždy větší než nula.

Pozn. 2.2.6 - Exponenciální funkcí je možné znázornit **složené úročení**, když na osu x dáme čas ***t,*** na osu y velikost konečného (zúročeného) kapitálu při zvolené úrokové míře a počátečním kapitálu.



2.2.3 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální, to znamená, že ji zapíšeme:

$$y = \log_a x, \text{ kde } x \in (0, \infty),$$
pak musí platit, že $x = a^y$.

Inverzní funkce k dané funkci je každá taková funkce, v níž nezávisle proměnná je v původní funkci závisle proměnnou a obráceně.

Pozn. 2.2.7 - Je-li v logaritmické funkci

a) $a = e$, tj. **a** je rovno Eulerově konstantě, pak funkci značíme ***y* = ln *x*** a nazýváme ji **přirozeným logaritmem**,

b) $a = 10$, pak tuto funkci značíme ***y* = log *x*** a nazýváme ji **dekadickým logaritmem**.

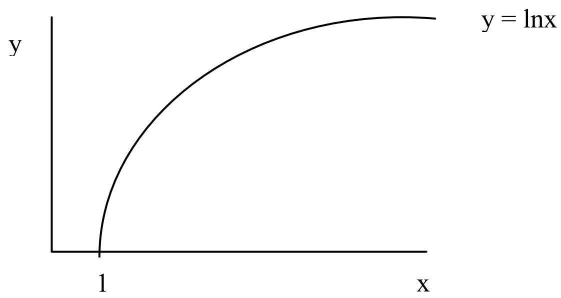
Pozn. 2.2.8 - Pro počítání s logaritmickými funkcemi platí tyto vztahy:

a) $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$, pak říkáme, že logaritmus součinu je roven součtu logaritmů jednotlivých činitelů,

b) $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$, pak říkáme, že logaritmus podílu je roven rozdílu logaritmů čitatele a jmenovatele,

c) $\ln u^{v} = v \cdot \ln u$, pak říkáme, že logaritmus mocniny je roven součinu exponentu a logaritmu základu.

Pozn. 2.2.9 - Průběh logaritmické funkce je znázorněn v grafu:



S logaritmickou funkcí se setkáváme např. u složeného úročení, známe-li konečnou (zúročenou) hodnotu kapitálu, jeho počáteční výši a máme určit dobu uložení (při dané úrokové sazbě).

2.3 Průměry

Pod pojmem **průměr** budeme mít ve finanční matematice na mysli vždy jedinou hodnotu spočtenou z konečné množiny hodnot.

2.3.1 Aritmetický průměr

a) **Aritmetický průměr m_a** je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Dá se tedy říci, že aritmetický průměr daných hodnot je součet všech těchto hodnot vydělený jejich celkovým počtem.

b) **Vážený aritmetický průměr $\underline{m_a}$** počítáme, jsou-li mezi danými čísly některá stejná, tj. n_1 čísel je a_1, n_2 čísel je a_2, ..., n_r, čísel je a_r:

$$\underline{m_a} = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \ldots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \ldots + n_r},$$

kde zároveň platí, že $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ a hodnoty $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nazýváme **váhy** čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Pozn. 2.3.1 - Vážený aritmetický průměr $\underline{m_a}$ se používá při výpočtu střední doby splatnosti více pohledávek.

2.3.2 Geometrický průměr

a) **Geometrický průměr m_g** je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

b) **Vážený geometrický průměr $\underline{m_g}$** počítáme, jsou-li mezi danými čísly některá stejná, tj. n_1 čísel je a_1, n_2 čísel je a_2, …, n_r, čísel je a_r:

$$\underline{m_g} = \sqrt[n]{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{n_r}}$$

kde platí, že $n = n_1+n_2+\ldots+n_r$ a hodnoty $n_1, n_2, \ldots, n_r$ stejně jako v předchozím nazýváme **váhy** čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

2.3.3 Harmonický průměr

a) **Harmonický průměr m_h** je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako:

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$$

b) **Vážený harmonický průměr $\underline{m_h}$** počítáme, jsou-li mezi danými čísly některá stejná, tj. n_1 čísel je a_1, n_2 čísel je a_2, …, n_r, čísel je a_r:

$$\frac{1}{\underline{m_h}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \ldots + \frac{n_r}{a_r} \right)$$

kde platí, že $n = n_1+n_2+\ldots+n_r$ a a hodnoty $n_1, n_2, \ldots, n_r$ opět nazýváme **váhy** čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

2.3.4 Vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem

Mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem platí vždy vzájemný vztah:

aritmetický průměr kladných čísel je větší než geometrický průměr a ten je větší než harmonický průměr pro všechna $a_i \neq a_j$, kde $i,j=1,2,\ldots,n$

$$m_a > m_g > m_h$$

2.4 Posloupnosti a řady

Posloupnost je zobrazení (dle předem daného předpisu) množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných.

Když každému přirozenému číslu (tj. celému kladnému) ***n*** přiřadíme určité číslo $\boldsymbol{a_n}$, pak množinu čísel $\boldsymbol{a_1, a_2,\ldots}$nazýváme **posloupnost.**

Řada je pak součtem členů posloupnosti $\boldsymbol{a_1+a_2+\ldots}$, potom čísla $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2,\ldots}$nazýváme členy řady.

Má-li řada konečný počet členů, nazývá se **konečná**, má-li nekonečný počet členů, nazývá se **nekonečná.**

2.4.1 Aritmetická posloupnost a řada

Posloupnost, v níž rozdíl (diference) každých dvou sousedních členů je konstantní, se nazývá **aritmetická.**

Nazveme a_1 1. člen posloupnosti,

a_n n-tý člen posloupnosti,

n počet členů,

d diference,

a_k k-tý člen posloupnosti,

potom kterýkoliv k-tý člen , známe-li diferenci d, vypočteme

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$$

Platí, že každý člen je aritmetickým průměrem sousedních dvou členů:

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot (a_{k-1} + a_{k+1})$$

Součet členů aritmetické posloupnosti nazýváme **aritmetická řada:**

Df

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + \underbrace{(a_1 + (n-1) \cdot d)}$$

konečný počet členů a_n, tj. konečná řada

součet prvních n členů aritmetické řady je

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \qquad (2\text{-}1)$$

což lze říci jinak, že sečteme první a poslední člen aritmetické řady a vynásobíme ½ počtu všech n členů této řady.

Dosazením za $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, pak lze též spočítat součet aritmetické řady jako

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$$

2.4.2 Geometrická posloupnost a řada

Posloupnost, v níž podíl každých dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, se nazývá **geometrická.**

Df

a) a_1 značíme 1. člen posloupnosti

b) a_n je pak n-tý člen posloupnosti

c) n je počet členů

d) q je kvocient

Geometrická posloupnost má tedy členy:

$$a_1,\ a_1 \cdot q,\ a_1 \cdot q^2, \ldots,\ a_1 \cdot q^n .$$

Součet *n* členů geometrické posloupnosti nazýváme **geometrická řada:**

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots, + a_n \cdot q^{n-1}$$

Je-li

$q>1$, pak je řada rostoucí,

$q \in (0,1)$, pak je řada klesající,

$q<1$, pak je řada střídavá,

$q=1$, pak se jedná o řadu s konstantními členy.

Poslední člen a_n geometrické řady vypočteme:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Součet prvních ***n*** členů geometrické řady pro q # 1 je dán vztahem:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (2\text{-}2)$$

Každý člen geometrické řady je geometrickým průměrem jeho dvou sousedních členů:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

Tyto poznatky budeme potřebovat v kapitole 6 Důchody.

SHRNUTÍ KAPITOLY OPAKOVÁNÍ MATEMATICKÝCH POJMŮ

Od této chvíle byste měli bez problémů znát nejen definice, ale i obsah pojmů, které jsme si zopakovali ze střední školy. Jimi jsou:

procento, procentový základ, funkce, lineární, exponenciální a logaritmická funkce, průměr aritmetický, geometrický, harmonický, posloupnost a řada aritmetická, geometrická.

Závěrem bych si dovolila znovu připomenout zopakování např. hodnot k a q ze vztahu pro lineární funkci. Není potřeba se snažit sehnat doporučenou literaturu tento obor obsahující, ale kteroukoliv středoškolskou učebnici matematiky, která podrobně vysvětluje pojem *lineární funkce*.

KONTROLNÍ OTÁZKA 2

1. Vysvětlete pojem „procento“a vyjmenujte typy úloh, které se počítají.
2. Vysvětlete pojmy „funkce“, „průměr“ a „posloupnost a řada“
3. Vyjmenujte ty funkce, průměry a řady, které budeme potřebovat a byly zopakovány.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 2

Vaším úkolem je nakreslit graf libovolné funkce lineární a do téže kartézské soustavy x,y zakreslete zvolenou funkci logaritmickou s přirozeným logaritmem.

3 ÚROKOVÁNÍ A ÚROKOVÁ MÍRA

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY ÚROKOVÁNÍ A ÚROKOVÁ MÍRA

Tato kapitola je rozdělena do pěti podkapitol.

- V první se budeme věnovat pojmům souvisejícím s jednoduchým úrokováním. Těmito pojmy je úrok, úrokovací období, metody úrokování.

- Ve druhé podkapitole se seznámíte s typy úrokování tak, abyste byli schopni rozpoznat jednoduché od složeného úročení, polhůtní od předlhůtního.

- Ve třetí kapitola se budeme již podrobně věnovat jednoduchému úrokování polhůtnímu i výpočtům tohoto druhu úrokování.

- Čtvrtá podkapitola obsahuje vysvětlení pojmu jednoduché úrokování předlhůtní a s ním spojené výpočty, dále pak porovnání jednoduchého úročení polhůtního s předlhůtním.

- V páté podkapitole se budeme zabývat různými druhy úrokové míry, jako je efektivní úroková míra, úroková intenzita, nominální a reálná úroková míra. Ukážeme si některé aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období.

CÍLE KAPITOLY ÚROKOVÁNÍ A ÚROKOVÁ MÍRA

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:

Budete umět

- jednoduché úrokování polhůtní,
- jednoduché úrokování předlhůtní,
- používat základní rovnici pro jednoduché úročení,
- spočítat diskont,
- vysvětlit pojem efektivní úroková míra,
- vysvětlit pojem úroková intenzita,
- obsah pojmů nominální a reálná úroková míra,
- vysvětlit, co to je časová hodnota peněz..

Získáte:

Získáte

- schopnost ze zadaných prvků vypočítat kteroukoliv neznámou pro jakýkoliv druh jednoduchého úročení,
- pomocí aproximačních vztahů vypočítat počet úrokovacích období.

Budete schopni:

Budete schopni

- rozlišit jednoduché úrokování polhůtní od předlhůtního,
- spočítat současnou hodnotu při jednoduchém úročení,
- zjistit, za jakých podmínek docílíte stejného úroku.
- spočítat reálnou úrokovou míru, budete-li znát nominální úrokovou míru a míru inflace.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 270 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY Úrokování a úroková míra

Metody úrokování, typy úrokování, úrokování jednoduché a složené, úrokování polhůtní a předlhůtní, diskont, úrokovací období, efektivní úroková míra, úroková intenzita, reálnou úrokovou míru, nominální úroková míra, reálná úroková míra, míra inflace, časová hodnota peněz.

PRŮVODCE STUDIEM 3

Základním pojmem oboru Finanční a pojistná matematika A je pojem úrokování, pro který nestačí znát jen jeho definici, ale i metody úrokování, typy úrokování. Samozřejmě, že začneme od toho nejsnadnějšího, ale i v praxi často používaného úrokování, jímž je úročení jednoduché, a to jak polhůtní, tak i předlhůtní. Budete znát základní rovnici jednoduchého úročení, základním pojmem úrokování je úroková míra a s tímto pojmem spojené pojmy další, jako jsou efektivní úroková míra, úroková intenzita, reálnou úrokovou míru, nominální úroková míra, reálná úroková míra, míra inflace, časová hodnota peněz..

3.1 Jednoduché úrokování

V úvodu této podkapitoly si znovu zopakujeme již známé pojmy úrok, úrokovací období, ale budeme se jimi zabývat z jiného pohledu. Dále se seznámíte s metodami úrokování.

3.1.1 Úrok

V ekonomii a bankovnictví často používaný pojem **úrok**. Z hlediska věřitele, tak i dlužníka hrají důležitou roli.

Z pohledu vkladatele (věřitele) je **úrok odměnou** za to, že půjčil peníze někomu jinému (vklad).

Z pohledu dlužníka je **úrok cena**, kterou platí za získání peněz (úvěru).

Vyjádří-li se úrok jako počet procent z hodnoty kapitálu, pak mluvíme o tzv. **úrokové sazbě,** jednu setinu úrokové sazby pak nazýváme **úroková míra**.

3.1.2 Úrokovací období

Doba, za kterou se úroky pravidelně připisují se nazývá **úrokové období** (nebo též **úrokovací období).**

Úrokovací období - **p.a**. (per annum) znamená **roční,**

- **p.s**. (per semestre) znamená **pololetní,**
- **p.q**. (per quartale) znamená **čtvrtletní,**
- **p.m.** (per mensem) znamená **měsíční.**

Úrokovací období ve dnech je možné vyjádřit dvěmi způsoby podle různých uzancí (obyčejů, zvyklostí).

Můžeme tedy počítat:

a) skutečný počet dnů období nebo

b) celé měsíce jako 30 dnů.

Délka roku ve dnech může být v zásadě uváděna též dvojím způsobem:

a) rok jako 365 (resp. 366) dnů, nebo

b) rok jako 360 dnů.

3.1.3 Metody úrokování

V předcházející podkapitole jste se seznámili s možnými způsoby vyjádření úrokovacího období ve dnech, stejně tak vyjádření délky roku ve dnech.

Potom kombinací těchto uvedených možností počítaní dnů v úrokovacím období dostáváme různé metody pro stanovení délky úrokovacího období:

- **anglická metoda** je založena na skutečném počtu dnů úrokového období (čitatel) a délce roku 365 (resp. 366) dnů (jmenovatel),

- **francouzská metoda** (MEZINÁRODNÍ) je opět založena na skutečném počtu dnů úrokového období (v čitateli), ale délka roku se započítává jako 360 dnů (ve jmenovateli),

- **německá metoda** (OBCHODNÍ) je založena na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dnů (v čitateli) a délky roku jako 360 dnů (ve jmenovateli).

Nejčastěji se používá metoda **obchodní**, někdy je možné použít i **mezinárodní**.

3.2 Typy úrokování

Úrokování (nebo též **úročení**) dělíme na dva základní typy (způsoby), a to na

jednoduché a složené,

nebo podle doby placení (připsání) úroku pak na

polhůtní a předlhůtní.

3.2.1 Jednoduché a složené úročení

Úrokování (nebo též *úročení*) dělíme na dva základní typy (způsoby):

jednoduché,

složené.

O jednoduchém úročení hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky nepřipočítají k původnímu kapitálu a tudíž se ani tyto úroky neúročí.

Jinak lze tedy říci, že v případě jednoduchého úrokování se úroky stále počítají jen z původního kapitálu.

O složeném úročení hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky připočítají k původnímu kapitálu a znovu se úročí původní kapitál navýšený o připsaný úrok.

Jinak lze tedy říci, že v případě složeného úrokování se počítá i úrok z úroku.

3.2.2 Polhůtní a předlhůtní úročení

Úročení tedy, jak již bylo řečeno, dělíme podle doby placení (připsání) úroku na:

- **polhůtní** (DEKURZIVNÍ) znamená, že úroky se vyplácí (připisují) na konci úrokovacího období,
- **předlhůtní** (ANTICIPATIVNÍ) znamená, že úroky se vyplácí (připisují)na záčátku úrokovacího období.

3.3 Jednoduché úročení polhůtní

Jednoduché úročení polhůtní se vyznačuje tím, že:

- úrok se počítá stále z téže počáteční hodnoty,
- úroky se k počáteční hodnotě nepřipisují,
- úroky jsou vypláceny na konci (tzn. po) uplynutí úrokovacího období.

Úrok je vždy hodnota z počátečního kapitálu, jehož výši tedy musíme znát, dále je nutné znát úrokovou sazbu a počet dní do doby splatnosti kapitálu.

Výši úroku tedy vypočteme:

$$\text{úrok} = \frac{\text{kapitál} \cdot \text{úroková sazba v procentech} \cdot \text{doba splatnosti ve dnech}}{100 \cdot 360}.$$

Označíme-li použité termíny každý jedním písmenem tak, že

K je peněžní částku (kapitál),

p je roční úrokovou sazbu v %,

d je doba splatností kapitálu ve dnech,

u znamená úrok,

pak lze úrok zapsat matematickým vzorcem:

$$u = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$$

Jak vidíme, v tomto vztahu je délka roku brána jako 360 dnů.

Jak již bylo výše řečeno, položíme-li

$$\frac{p}{100} = i \,,$$

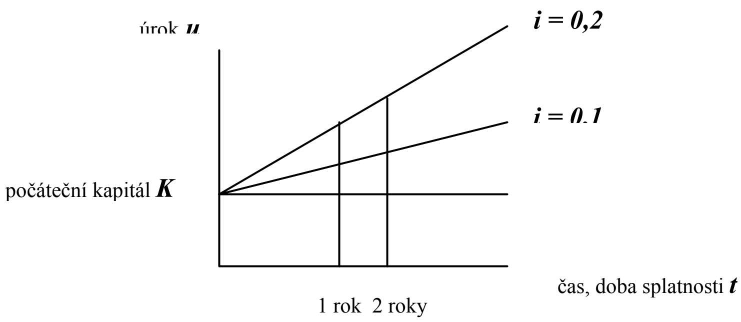
pak **i** se nazývá **úroková míra** a udává se v setinách,

$$\frac{d}{360} = t$$

je pak doba splatnosti v letech, pak můžeme úrok též vypočítat ze vztahu

$$u = K \cdot i \cdot t$$

Úrok lze znázornit graficky:



Z grafu je vidět závislost úroku na době splatnosti kapitálu, kterou lze vyjádřit jako **lineární funkci času.**

3.3.1 Výpočet pomocí úrokových čísel a úrokových dělitelů

Úrokové číslo označíme UC a definujeme ho ve shodě s předcházející symbolikou jako

$$UC = \frac{K \cdot d}{100} \,,$$

kde d je splatnost kapitálu splatnost ve dnech, K je kapitál.

Úrokový dělitel označíme UD a definujeme ho ve shodě s předcházející symbolikou jako

$$UD = \frac{360}{p},$$

kde p je roční úroková sazba v procentech.

Úrokový dělitel značí, za kolik dní činí úrok u ze 100 Kč právě 1 Kč.

Lze též definovat **úrokový násobitel** UN jako

$$UN = \frac{p}{360} = \frac{1}{UD},$$

z čehož je patrno, že úrokový násobitel je převrácená hodnota úrokového dělitele.

Dosadíme-li do vztahu $u = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$ za uvedené hodnoty UC a za zbývající UD, dá se pak výše úroku spočítat jako podíl:

$$u = \frac{UC}{UD}$$

Tento výpočet pomocí úrokových čísel a úrokových dělitelů má smysl používat v případě měnící se výše kapitálu během úrokovacího období při neměnné úrokové sazbě.

Označme kapitál K_1, který je uložen a úročen d_1 dní,

K_2 nechť je uložen a úročen d_2 dní,

.

.

. atd. až

K_r je uložen a úročena d_r dní.

Je zřejmé, že úrokový dělitel $UD = \dfrac{360}{p}$ je neměnný, po celou dobu je tedy konstantní.

Potom můžeme celkový úrok ze všech vložených hodnot $K_1, K_2, \ldots, K_r$ na příslušnou dobu $d_1, d_2, \ldots, d_r$ spočítat jako:

$$\text{úrok} = \frac{\text{součet úrokových čísel}}{\text{úrokový dělitel}}.$$

Matematickou symbolikou pak velikost úroku je

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{r} UC_j}{UD}.$$

Tento způsob výpočtu se v praxi používá se při výpočtu úroků na běžných účtech.

3.3.2 Základní rovnice pro jednoduché úročení

Základní rovnice pro jednoduchého úročení je rovnice, pomocí které zjistíme konečnou **výši zúročeného kapitálu** za dobu ***t***.

Pak je to součet počátečního (vloženého) kapitálu $\boldsymbol{K_0}$ a úroků za dobu ***t***:

$$K_t = K_0 + u\text{, kde } u = K_0 \cdot i \cdot t\text{,}$$

přičemž je K_0 počáteční finanční kapitál,

$i = \frac{p}{100}$ je roční úroková míra,

$t = \frac{d}{360}$ je doba splatnosti kapitálu v letech,

K_t je stav kapitálu za dobu t,

u je úrok,

pak dostáváme

$$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

a odtud též, že

$$u = K_t - K_0 .$$

Ze základní rovnice jednoduchého úročení

$$K_t = K_0 + u \text{, nebo } K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t) \qquad (3\text{-}1)$$

lze vyjádřit kteroukoliv veličinu:

- základní kapitál

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t} \text{, nebo z } u = K_0 \cdot e \cdot t \text{ je pak}$$

$$K_0 = \frac{u}{i \cdot t},$$

- doba splatnosti (úročení)

$$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i} \text{ nebo } t = \frac{u}{K_0 \cdot i},$$

- úroková míra

$$i = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t} \text{ nebo } i = \frac{u}{K_0 \cdot t}.$$

3.3.3 Současná hodnota při jednoduchém úročení

Velmi často se v bankovnictví i v ekonomii vůbec můžete setkat s tím, že potřebujete porovnat dvě finanční částky v čase.

To se nejčastěji stává, rozhodujeme-li se platit v hotovosti, či využít možnosti úvěru a platit v budoucnosti.

Je nutné mít na paměti, že čím dříve máme peníze, tím dříve je můžeme investovat a ponesou nám zisk (formou úroku).

Měli bychom mít na paměti, že peníze v čase mají různou hodnotu.

Abychom mohli peníze porovnávat v čase, potřebujeme proto znát pojem **současná hodnota.**

Současnou hodnotou rozumíme kapitál, který bude-li v časovém období úročen, přinese budoucí hodnotu.

$$\text{současná hodnota} = \frac{\text{budoucí hodnota}}{1 + \text{úroková sazba} \cdot \text{úroková doba}}$$

s využitím již matematického zápisu

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}, \text{ kde}$$

K_0 znamená současnou hodnotu,

K_t je budoucí hodnota,

i je úroková míra,

t je úrokovací období (v letech).

Výpočet současné hodnoty se nazývá též **diskontování**.

Je-li $t = 1$ rok, pak $K_0 = K_1 \cdot \frac{1}{1+i}$, kde

$\frac{1}{1+i}$ se nazývá **diskontní faktor**

a udává současnou hodnotu 1 Kč = K_1 splatné za 1 rok = t.

3.3.4 Diskont

Diskont je **úrok** ode dne výplaty do dne splatnosti pohledávky. Počítá se podle vzorce pro jednoduché úročení.

Dá se počítat buď z nominální hodnoty pohledávky nebo ze současné hodnoty pohledávky.

Diskont počítaný **z nominální hodnoty** pohledávky nazýváme **obchodní diskont**:

$$D_{ob} = K_t \cdot i_D \cdot t \text{, kde}$$

K_t je nominální hodnota pohledávky,

i_D je diskontní sazba,

t je čas od doby výplaty do doby splatnosti pohledávky v letech.

Po srážce obchodního diskontu bude vyplacena částka:

$$K_{ob} = K_t - D_{ob} = K_t - K_t \cdot i_D \cdot t = K_t(1 - i_D \cdot t)$$

Diskont počítaný **ze současné hodnoty** pohledávky nazýváme **matematický diskont:**

$$D_{mat} = K_0 \cdot i_D \cdot t\,,$$

kde K_0 je současná hodnota pohledávky.

Když za $K_0 = \dfrac{K_t}{1 + i_D \cdot t}$ dosadíme do D_{mat}, dostaneme:

$$D_{mat} = \frac{K_t \cdot i_D \cdot t}{1 + i_D \cdot t}\,,$$

pak vidíme, že

$$D_{mat} = \frac{D_{ob}}{1 + i_D \cdot t}\,,$$

z čehož se dá lehce dokázat, že $D_{ob} > D_{mat}$.

To znamená, že pro banky je proto výhodnější používat D_{ob}.

Matematický diskont úzce souvisí s **předlhůtním** (anticipativním) **úročením.**

3.4 Jednoduché úročení předlhůtní

Jednoduché úročení **předlhůtní** (anticipativní) znamená, že úrok je placen **na začátku** úrokovaného období.

Příjemce kapitálu nedostává celou nominální částku, ale **obnos snížený o úrok, což je vlastně obchodní diskont**.

V době splatnosti kapitálu je třeba zaplatit celou nominální částku, tj.

vyplacená částka = nominální hodnota - úrok

Předpokládejme, že doba splatnosti kapitálu je 1 rok, proto předem zaplatíme úrok za 1 rok, pak můžeme psát, že

$$K_0 = K_1 - K_1 \cdot l = K_1 \cdot (1 - l),$$

kde K_1 je kapitál splatný za 1 rok,

l je úroková míra,

K_0 je vyplacená částka (nebo též hodnota dluhu na počátku).

Vyjádřeme hodnotu kapitálu K_t v čase t, kde $t \in (0,1)$, tj. v libovolném čase mezi dobou výplaty kapitálu a dobou splatnosti (to je případ splacení kapitálu před dobou splatnosti) při předlhůtním (anticipativním) úročení, bude pak platit, že hodnota kapitálu

K_t = vyplacená částka + úrok za dobu t,

matematicky zapsáno

$$K_t = K_0 + K_1 \cdot l \cdot t,$$

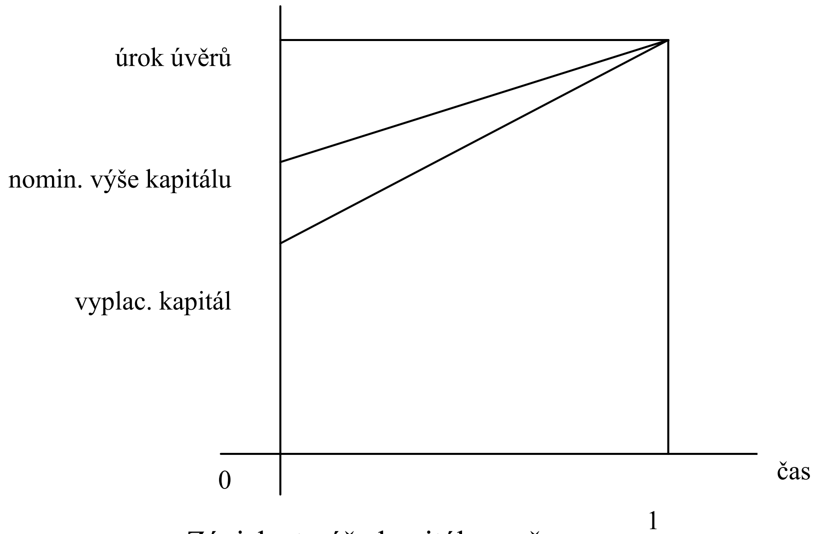
pak dosadíme-li do této rovnice za $K_0 = K_1 - K_1 \cdot l = K_1 \cdot (1 - l)$, dostaneme

$$K_t = K_1 - K_1 \cdot l + K_1 \cdot l \cdot t = K_1 \cdot (1 + (t-1) \cdot l)$$

a nazýváme ji

základní rovnice pro jednoduché úročení předlhůtní.

Grafické znázornění anticipativního (předlhůtního) úročení:



Závislost výše kapitálu na čase.

3.4.1 Porovnání jednoduchého úročení polhůtního a předlhůtního

Dosadíme-li do vztahu $K_t = K_1 - K_1 \cdot l + K_1 \cdot l \cdot t = K_1 \cdot (1 + (t-1) \cdot l)$ za $K_1 = \frac{K_0}{1-l}$, dostaneme základní rovnici pro jednoduché úročení předlhůtné ve tvaru

$$K_t = \frac{K_0}{1-l} \cdot (1 + t \cdot l - l) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{l}{1-l} \cdot t\right)$$

Jestliže $\frac{l}{1-l}$ nahradíme *i*, a dosadíme do $K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{l}{1-l} \cdot t\right)$ dostáváme základní rovnici $K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$, což je rovnice základní rovnice pro jednoduché úročení polhůtné.

Vyjádříme-li ze vztahu $i = \frac{l}{1-l} \Rightarrow l = \frac{i}{1+i}$ což je vlastně **matematický diskont pro *t*** = 1 a $\mathbf{K_t}$ = 1.

JEDNODUCHÉ DEKURZIVNÍ	**JEDNODUCHÉ ANTICIPATIVNÍ**
rovnice pro zúročený kapitál po době t:	rovnice pro zúročený kapitál po t:
$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{I}{1-I} \cdot t\right)$ nebo
	$K_t = K_1 \cdot [1 + I \cdot (t-1)]$

Závislost kapitálu resp. úroku na době splatnosti je u obou úrokování lineární.

úrok je připisován **na konci**	úrok je připisování **na počátku**
úrokového období	úrokového období
$(u = K_0 \cdot i \cdot t)$	$(u = K_0 \cdot I \cdot t)$

K_0 je počáteční kapitál, který je s časem úročen

platí $K_0 = \dfrac{K_1}{1+i}$

i je úroková sazba dekurzivní

platí vztah

$$i = \frac{I}{1-I}$$

K_0 je kapitál, který obdržel klient a jež se s časem úročí

platí $K_0 = K_1 \cdot (1-I)$

I je úroková sazba anticipativní

platí vztah

nebo $I = \dfrac{i}{1+i}$

Úročíme-li tentýž kapitál K_o anticipativně nebo dekurzivně (s odpovídající úrokovou sazbou), výsledný zúročený kapitál je shodný. Úrokování se liší pouze způsobem připisováni úroků.

Příklad: K_t = ?, je-li K_0 = 100 Kč; i = 0,08; tedy $I = \dfrac{i}{1+i} = 0{,}0740074$;
t = 9 měs = 0,75 roku.

DEK: $K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$

$$K_t = 100 * (1 + 0{,}08 * 0{,}75)$$

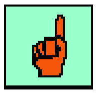
$$K_t = 106\,\text{Kč}$$

ANT: $K_t = K_0 \cdot \left(1 + \dfrac{I}{1-I} \cdot t\right)$

$$K_t = 100 * \left(1 + \frac{0{,}074074}{1 - 0{,}074074} * 0{,}75\right)$$

$$K_t = 105{,}99999\,\text{Kč}$$

3.5 Úroková míra



Pod pojmem úroková míra můžeme mít na mysli různé hodnoty, a to efektivní úrokovou míru, reálnou úrokovou míru, nominální úrokovou míru, míru inflace, ale též bychom měli znát pojem úroková intenzita. V následujících podkapitolách si proto tyto pojmy vysvětlíme.

3.5.1 Efektivní úroková míra

Z předcházejícího již víme, že při stejné úrokové sazbě je pro věřitele výhodnější, připisují-li se úroky vícekrát ročně, protože se opět úrokují.

- Připisují-li se úroky *m*-krát ročně, bude celkový úrok při stejné úrokové sazbě (za předpokladu dalšího úročení těchto vkladů) vyšší, než v případě, že se úroky připíší jen jednou na konci vkladu.

Má-li být v obou případech dosaženo stejného finančního efektu, musí být nominální úroková sazba při ročním úrokování vyšší, než při úrokovacím období kratším než jeden rok.

- Takovou úrokovou sazbu, pak nazveme **efektivní úroková sazba**, která se udává v procentech. My však počítáme s hodnotou převedenou na část celku, tj.procenta vydělená 100 a počítáme s touto hodnotou, kterou pak nazýváme **efektivní úroková míra i_e.**

Efektivní úroková míra i_e je tedy taková roční úroková míra, při níž hodnota vloženého kapitálu je po jednom roce stejná, jako hodnota kapitálu, který je úročen *m*-krát do roka, přičemž stejně tak jsou úročeny *m*-krát ročně při úrokové míře *i* připisované úroky.

- Při stejné úrokové míře *i*, je hodnota kapitálu při ročním úrokovacím období nižší, než při úrokovacím období *m*-krát ročně.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i) \qquad \text{x} \qquad K_1 = K_0 \cdot (1 + i/m)^m$$

Aby bylo v obou případech dosaženo stejného úroku, pak mluvíme o **efektivní úrokové míře**, značíme $\mathbf{i_e}$ a vypočítáme jako:

$$1+i_e = (1+i/m)^m,$$

odtud pak

$$i_e = (1+i/m)^m - 1.$$

3.5.2 Úroková intenzita

Nejdříve pro tuto podkapitolu musíme definovat pojem spojité úrokování.

Spojité úrokování říkáme, že je každé takové úrokování,při němž ***počet úrokovacích období v roce roste do nekonečna***, tj. délka úrokovacího období se zkracuje téměř na nulu (konverguje k nule).

Úroková intenzita (nebo též ***istantánní úroková míra***) je taková roční úroková míra, při níž úrok z vloženého kapitálu je roven úroku při spojitém úrokování.

$$1 + i_i = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

Víme, že

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e, \quad kde \;\; e \doteq 2{,}718 \quad je \quad Eulerova \quad konstanta\,,$$

což by znamenalo, že při roční úrokové sazbě 100% by 1 Kč vzrostla při spojitém úrokování na 2,718 Kč.

- Pro úrokovou intenzitu platí, že

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{i}{m}\right)^m = e^{i}, \quad resp. \quad e^{f},$$

kde hodnotu f nazýváme úrokovou intenzitou.

Vztah mezi efektivní úrokovou mírou a úrokovou intenzitou je:

$$i_e = e^f - 1, \text{ nebo } \quad f = \ln(1+i_e)$$

Nechť je

K_0 počáteční kapitál,

K_t hodnota kapitálu za dobu t,

f úroková míra při spojitém úrokován,

pak při spojitém úrokování platí:

$$K_t = K_0 \cdot e^{f \cdot t}\text{, odtud pak } K_0 = K_t \cdot e^{-f \cdot t}\text{.}$$

3.5.3 Nominální a reálná úroková míra

Nominální úroková míra je taková roční úroková míra, při níž se nezohledňuje inflace. Inflace znehodnocuje úroky.

Reálná úroková míra je taková roční úroková míra, do níž se zahrneme inflaci.

Nechť

K_r	reálná výše kapitálu na konci úrokovacího období,
K_0	počáteční kapitál,
i	nominální úroková míra,
i_r	reálná úroková míra,
i_i	míra inflace.

Předpokládejme, že úrokovací období je roční.

Reálnou výši kapitálu na konci úrokovacího období vypočteme tak, že nejprve počáteční kapitál úročíme nominální úrokovou mírou, pak diskontujeme inflační mírou:

$$K_r = K_0 \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i_i}$$

Ale zároveň reálnou výši kapitálu získáme, zúročíme-li počáteční kapitál reálnou úrokovou mírou:

$$K_r = K_0 \cdot (1+i_r), \tag{3-2}$$

odtud pak dostaneme reálnou úrokovou míru $\boldsymbol{i_r}$ jako poměr výše úroku $(K_r – K_0)$ a počátečního kapitálu K_0

Dáme-li předcházející vztahy do rovnosti, dostáváme vztah známý pod názvem **Fischerova rovnice**:

$$i = i_r + i_i + i_r \cdot i_i\,, \tag{3-3}$$

v něm je pak součin $i_r \cdot i_i$ pro nízké hodnoty inflace a reálné úrokové míry relativně velmi malý. Často ho proto zanedbáváme a interpretujeme vztah mezi nominální a reálnou úrokovou mírou jako

$$i = i_r + i_i \tag{3-4}$$

3.5.4 Aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období

1. Aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období potřebných ke **zdvojnásobení** kapitálu (nominální hodnoty):

nechť i_m je úroková míra pro jedno úrokovací období v setinách,

n je počet úrokovacích období, tj. počet m-tin, pak

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^n\,.$$

Máme-li hodnotu K_0 a chceme-li ji mít po n úrokovacích obdobích za dané úrokové míry i_m dvojnásobnou, tj. $K_n = 2K_0$, pak vyjádříme n ze vztahu:

$$2K_0 = K_0 \cdot (1 + i_m)^n\,.$$

Rovnici zlogaritmujeme a dostáváme:

$$\ln 2K_0 = \ln K_0 + n \cdot \ln(1 + i_m)\,,$$

z ní dostaneme

$$n = \frac{\ln 2K_0 - \ln K_0}{\ln(1+i_m)} = \frac{\ln 2 + \ln K_0 - \ln K_0}{\ln(1+i_m)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+i_m)}$$

- Dostali jsme však vztah pro přesné zjištění počtu úrokovacích období potřebných ke zdvojnásobení kapitálu:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i_m)}.$$

- Aproximační vztahy pro zdvojnásobení kapitálu:

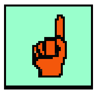
  a) pravidlo 69

$$n \sim \frac{69}{100 \cdot i_m} + 0{,}35,$$

  b) pravidlo 72

$$n \sim \frac{72}{100 \cdot i_m}.$$

2. Aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období potřebných ke trojnásobení kapitálu (nominální hodnoty):



Nechť

i_m je úroková míra pro jedno úrokovací období v setinách,

n je počet úrokovacích období, tj. počet m-tin, pak:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i_m)^n.$$

Máme-li hodnotu K_0 a chceme-li ji mít po n úrokovacích obdobích za dané úrokové míry i_m trojnásobnou, tj. $K_n = 3K_0$, pak vyjádříme n ze vztahu:

$$3K_0 = K_0 \cdot (1+i_m)^n$$

Rovnici zlogaritmujeme a dostáváme:

$$\ln 3K_0 = \ln K_0 + n \cdot \ln(1 + i_m),$$

z ní dostaneme

$$n = \frac{\ln 3K_0 - \ln K_0}{\ln(1 + i_m)} = \frac{\ln 3 + \ln K_0 - \ln K_0}{\ln(1 + i_m)} = \frac{\ln 3}{\ln(1 + i_m)}$$

- Dostali jsme však vztah pro přesné zjištění počtu úrokovacích období potřebných ke zdvojnásobení kapitálu:

$$n = \frac{\ln 3}{\ln(1 + i_m)}$$

- Aproximační vztahy pro zdvojnásobení kapitálu:

pravidlo 110

$$n \sim \frac{110}{100 \cdot i_m} + 0{,}52.$$

3.5.5 Časová hodnota peněz

Díky úrokování a inflaci se hodnota peněz v čase může velmi výrazně měnit.

Je proto nutné ve finančních a obchodních transakcích nahradit systém všech finančních částek a závazků v různých časových okamžicích jiným systémem s odlišnými parametry, který je z pohledu investora výhodnější.

Všechny částky a závazky vztáhneme k jedinému časovému bodu, který se nazývá

REFERENČNÍ DATUM (local date).

To lze tak, že každou finanční částku lze "posunout vpřed“ na časové ose pomocí úročení, nebo „posunout vzad“ pomocí diskontování.

I když referenční datum může být na časové ose teoreticky kdekoliv, z numerického hlediska často vhodná volba tohoto časového bodu zjednoduší výpočty.

Porovnáváním původního systému a nového (částek a závazků) se stanoví

HODNOTOVÁ ROVNICE (equation of value),

kterou vyřešíme vzhledem k příslušné neznámé.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3.5.5.1

Podnikatel dluží bance 200.000,-Kč splatných za jeden rok a 300.000,-Kč splatných za tři roky. Banka souhlasí, aby dluh vyrovnal okamžitě, přičemž požaduje roční úrokovou sazbu 8 % s kvartálním úrokováním. Protože podnikatel momentálně disponuje s větší hotovostí a nemá možnost ji investovat s výhodnějším zhodnocením (vyšší úrokovou sazbou), než banka navrhuje, splatí bance ihned. Kolik bance zaplatí?

Řešení příkladu

Nechť současné datum je zároveň referenční datum, x je částka nutná pro okamžité vyrovnání, pak označíme

K_{t1} kapitál splatný za jeden rok (200.000,-Kč),

K_{t2} kapitál splatný za tři roky (300.000,-Kč), potom

$$x = \frac{K_{t_1}}{(1+\frac{i}{4})^4} + \frac{K_{t_2}}{(1+\frac{i}{4})^{12}}$$ *

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3.5.5.2

Osoba A si vypůjčila 50.000,-Kč od osoby B. Souhlasí se splacením ve dvou stejných splátkách po uplynutí jednoho a dvou roků při úrokové sazbě 9%. Jakou částku po každé zaplatí?

Řešení příkladu

Nechť ***x*** je táž částka nutná pro dvakrát splacení. Pak můžeme psát hodnotovou rovnici:

$$K_0 \cdot (1+i)^2 = x \cdot (1+i) + x\,,$$

ze které dostaneme hledanou hodnotu

$$x = \frac{K_0 \cdot (1+i)^2}{2+i}$$ *

SHRNUTÍ KAPITOLY ÚROKOVÁNÍ A ÚROKOVÁ MÍRA

Po nastudování této kapitoly budete vědět, jak dělíme úrokování, jaké druhy úrokovacích období mohou existovat, jaké metody úrokování se dají používat.

Dále byste měli znát rozdíl mezi jednoduchým a složeným úrokováním, stejně tak rozdíl mezi polhůtním a předlhůtním úrokováním.

Stejně tak budete znát pojem diskont a diskontování.

Budete znát obsah pojmu efektivní úroková míra a jeho využití v praxi. Budete znát pojem úroková intenzita a tím i spojité úrokování.

Dále budete umět vypočítat nominální a reálnou úrokovou míru, budete vědět, jaký význam pro tyto pojmy má inflační úroková míra.

Budete vědět, co znamená tzv. časová hodnota peněz.

Měli byste znát matematické vzorce pro výpočet jednoduchého úrokování polhůtního a předlhůtního, vztah mezi nimi, ale také výpočet matematického a obchodního diskontu a jejich vztah.

Budete znát nejen přesné matematické výpočty počtu úrokovacích období nutných pro násobky počátečního kapitálu, ale též pro rychlý odhad výpočty přibližné, tj. aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období pro zdvojnásobení, ale též pro ztrojnásobení investovaného kapitálu.

KONTROLNÍ OTÁZKA 3

1. Vysvětlete pojem „úrokování“a vyjmenujte metody úrokování.
2. Vysvětlete pojmy „jednoduché úrokování“ a „složené úrokování“.
3. Vysvětlete pojmy „polhůtní úrokování“ a „předlhůtní úrokování“.
4. Vysvětlete pojem „diskont“ a „diskontování“.
5. Vysvětlete pojem efektivní úroková míra.
6. Vysvětlete pojmy úroková intenzita a spojité úrokování.
7. Vysvětlete vztah inflační úrokové míry (inflace) k nominální a reálné úrokové míře.
8. Co označujeme pod pojmem aproximační vztahy pro výpočet počtu úrokovacích období a vyjmenujte ty, které znáte.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 3

PŘÍKLADY:

1. Jaký úrok zaplatí klient, který obdrží úvěr ve výši 250 000 Kč a musí ho splatit jednorázově za 11 měsíců, je-li úroková sazba 16% p. a.
2. Jaký je stav vkladu 8 000 Kč na 7 měsíců při úrokové sazbě 10,55% p. a.
3. Jak velký byl počáteční vklad, který při úrokové sazbě 5% vzrostl od 12. 1. 1996 do 28. 2.1996 o 154,26 Kč.
4. Jakou dobu byl uložen vklad 12 000 Kč při roční úrok. Sazbě 4,5%, když vzrostl na 13 560 Kč?
5. Při jaké úrok. Sazbě bude úrok z vkladu 20 000 Kč činit za 9 měsíců 2060 Kč.

6. Jaký obnos si se splatností 5 měsíců můžeme půjčit, máme-li možnost p této době použít na splacení úvěru a úroků 16 000 Kč. Úroková sazba je 11 % p. a.

7. Předpokládejme úvěr ve výši 100 000 Kč splatný najednou za 1 rok při úrokové sazbě 10 % p. a. Ukažte rozdíl mezi polhůtním a předlhůtním úrokováním.

8. Jaká úroková intenzita odpovídá efektivní úrokové sazbě 11 %?

9. Na kolik vzroste kapitál 120.000,-Kč za 6 let při spojitém úročení a sazbě 2,5%?

10. Jaká je současná hodnota kapitálu, který za 6 let vzroste na 100.000,-Kč při 11,8% úrokové intenzitě?

4 SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Tato kapitola je rozdělena do pěti podkapitol.

- V první se budeme věnovat pojmům souvisejícím s složeným úrokováním. Odvodíme si základní rovnici pro složené úrokování.

- Ve druhé podkapitole budeme porovnávat jednoduché a složeného úročení

- Ve třetí kapitole se budeme výpočtu doby splatnosti při složeném úrokování.

- Čtvrtá podkapitola obsahuje výpočet současné hodnoty složeného úrokování.

- V páté podkapitole si ukážeme výpočet úrokové míry při složeném úrokování.

- Šestou kapitolu budeme věnovat porovnání jednoduchého a složeného úrokování.

CÍLE KAPITOLY SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:

Budete umět

- používat základní rovnici pro složené úročení,
- složené úrokování polhůtní,
- področní složené úrokování,
- kombinovat jednoduché a složené úrokování.

Získáte:

Získáte

- schopnost ze zadaných prvků vypočítat kteroukoliv neznámou pro složené úročení.

Budete schopni:

Budete schopni

- rozlišit jednoduché úrokování od složeného, ale i tyto dva druhy úrokování vzájemně kombinovat,
- spočítat při složeném úročení dobu splatnosti, současnou hodnotu i úrokovou míru.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 180 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY Složené úrokování

Úrokování, področní složené úrokování, složené úrokování polhůtní a předlhůtní, doba splatnosti, současná hodnota při složeném úrokování.

Klíčová slova

PRŮVODCE STUDIEM 4

Základním pojmem této kapitoly je složené úrokování (úročení). Budete znát základní rovnici **složeného úročení**. Dovíte se, že u složeného úrokování počítáme **jen polhůtní**, neboť v praxi se nevyužívá složené úrokování předlhůtní.

Z předcházejícího důvodu proto budeme používat jen pojem složené úročení (úrokování) a vždy budeme mít zároveň na mysli složené úrokování polhůtní.

Budete umět rozeznat, kdy se jedná o jednoduché úrokování a kdy o složené. Stejně tak budete schopni tyto dva druhy úrokování kombinovat a poznáte, kdy to musíte použít.

4.1 Základní rovnice pro složené úrokování

V úvodu této kapitoly si zopakujeme pojmy *jednoduché a složené úrokování* z trošku jiného pohledu.

- **Jednoduché úrokování**

je ***aritmetická řada***, neb úroky se počítají z téhož základu.

Celkový úrokový výnos roste potom při jednoduchém úrokování ***lineárně***.

- **Složené úrokování**

je ***geometrická řada***, neb úroky se připisují k původnímu kapitálu a v následujícím období se úročí opět, ale nyní součet ***základní kapitál+úrok***.

Celkový úrokový výnos roste proto při složeném úrokování ***exponenciálně.***

Je-li

K_0 základní kapitál,

i je úroková míra v setinách,

t je doba splatnosti kapitálu v letech,

$K_1,\ldots,K_t$ výše kapitálu na konci 1. až t-tého roku,

potom stav kapitálu:

po *1*. roku $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0\,(1 + i),$

po *2*. roku $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1\,(1 + i) = K_0\,(1 + i)^2,$

.
.
.

po t. roku $$K_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot i = K_0 (1 + i)^t \qquad (4\text{-}1)$$

Stavy kapitálu na konci jednotlivých let tvoří, jak vidět, členy geometrické posloupnosti s kvocientem, který se rovná úrokovacímu faktoru (1+i).

Celkový úrokový výnos pak skutečně neroste jako u jednoduchého úročení lineárně, ale exponenciálně.

Základní rovnicí pro složené úročení nazveme vztah kapitálu na konci t-tého roku:

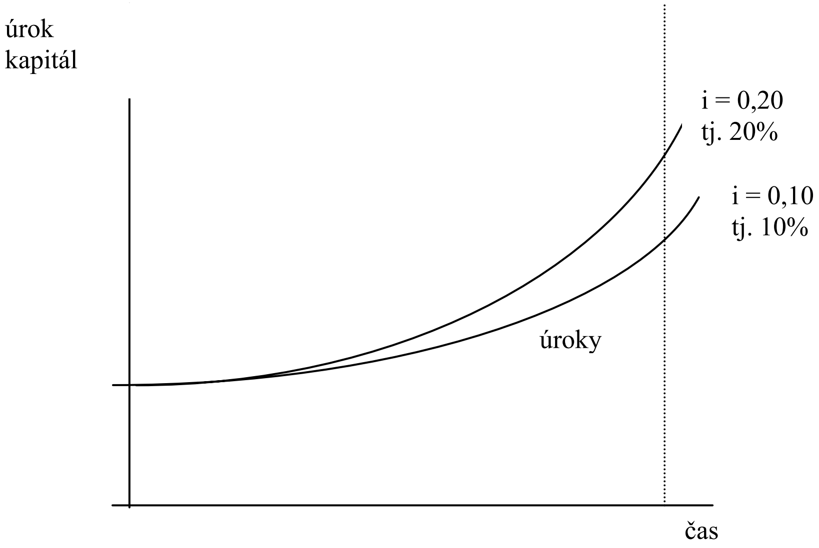
$$K_t = K_0 (1 + i)^t$$,kde

(1+i) se nazývá **úrokovací faktor** a

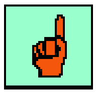
(1 + i)^t se nazývá **úročitel.**

Úročitel $(1 + i)^t$ nám řekne, na kolik vzroste 1Kč za dobu t, při úrokové míře i.

Grafická závislost výše kapitálu (nebo výše úroku) na době splatnosti při složeném úrokování:



4.1.1 Področní složené úrokování



Je-li úrokové období kratší než 1 rok, pak se jedná o tzv. **področní složené úrokování**.

Předpokládejme, že úrokovací období je 1/m-tina roku, tj. k připisování úroků dochází m - krát ročně a je-li

K_0	základní kapitál,
i/m	je úroková míra v setinách za 1 m-tinu roku,
$K^1,\dots,K^m$	výše kapitálu na konci 1. až m-té části roku ($K^m = K_1$),

potom stav kapitálu: pak výše kapitálu:

po 1. části roku je $\quad K^1 = K_0\,(1 + i/m)$,

po 2. části roku je $\quad K^2 = K_0\,(1 + i/m)^2$,

$$\vdots$$

po m-té části roku je $K^m = K_0\ (1 + i/m)^m$, kde

Stav kapitálu za *t*-let je $\boldsymbol{K_t = (K^m)^t = K^{m\cdot t} = K_0\ (1 + i/m)^{m\cdot t}}$ *(4-2)*

4.2 Kombinace jednoduchého a složeného úrokování

Ke kombinaci jednoduchého a složeného úročení dochází vždy tehdy, jestliže

1. úroky jsou po určitou dobu připisovány k základnímu vkladu (počátečnímu),
2. s ním jsou dále úročeny (složené úročení),
3. ale na konci období je potřeba spočítat úrok za dobu kratší, než je úrokovací období (jednoduché úročení).

Předpokládejme, že úroky se připisují vždy na konci roku. Doba t, po kterou je kapitál uložen, není přirozené číslo, pak můžeme zapsat, že

$\boldsymbol{t = n + l}$, kde

n je přirozené číslo vyjadřující počet let,po které je kapitál uložen,

$l < 1$ označuje necelou část roku.

Konečná výše kapitálu **při ročním připisování úroků** za dobu **t > 1** se vypočte:

- $K_n = K_0\ (1 + i)^n$, kde K_n je výše kapitálu po n-letech,

pak výše kapitálu za dobu t je

- $K_t = K_n\ (1 + l\cdot i) = K_0\ (1 + i)^n\ (1 + l\cdot i)$

$$\boldsymbol{K_t = K_0\,(1 + i)^n\,(1 + l \cdot i)}$$

Když se úroky připisují m-krát do roka, ale t > 1 není přirozené číslo, tj.

$t = n+l$, pak $\boldsymbol{K_n = K_0\,(1 + i/m)^n}$, kde

n je však nyní počet m-tin. Je-li l je číslo < 1 značící část *m-tiny* roku, potom

$$\boldsymbol{K_t = K_0\,(1 + i/m)^n\,(1 + l \cdot i)}$$

Pozn.4.2.1:

Vezměme dobu, po kterou jsme investovali počáteční kapitál, např. 22 měsíců, pak:

- v případě úrokovacího období **¼ roku** (tzn., že $\boldsymbol{m = 4}$), tj. 3 měsíce je

  pro $t = n + l$ pak $n = 7$, $l = 1/3$, $i_{č.} = i/4$,

- pokud se ale bude jednat o roční úrokování, je

  pro $t = n + l$ ale $n = 1$, $l = 10/12$, $i_{č.} = i$.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4.2.1

Co je větší?

$K_t = K_0\,(1 + i)^t$, **kde $t > 1$ je racionální číslo**

nebo

$K_t = K_0\,(1 + i)^n\,(1 + l \cdot i)$, ***kde t = n + l ?***

Řešení příkladu

Nechť $K_t = K_0\,(1 + i)^n\,(1 + i)^l$, máme dokázat, že

$$1 + l \cdot i > (1 + i)^l, \text{ kde } l < 1, \text{ i} < 1.$$

Po zlogaritmování dostaneme

$$\ln(1 + l \cdot i) > l \cdot \ln(1 + i) \qquad (4\text{-}3)$$

Označme

$$B = \ln(1 + l \cdot i) / \ln(1 + i) > 1,$$

pak dosazením do (1) dostaneme

$$\ln(1 + l \cdot i) > \ln(1 + i)\, B > 1, \text{ ale } l < 1$$

*

4.3 Výpočet doby splatnosti

Ze základního vzorce pro složené polhůtní úročení je možné spočítat ostatní veličiny.

Pro výpočet doby splatnosti kapitálu zlogaritmujeme vzorec

$K_t = K_0 (1 + i)^t$ a dostáváme

$\ln K_t = \ln K_0 + t \cdot \ln(1+i)$, odtud pak vyjádříme dobu t jako

$t = (\ln K_t - \ln K_0)/\ln(1+i)$.

Není-li $t=n+l$ přirozené číslo, pak počítáme l ze vztahu:

$$K_t = K_0 (1 + i)^n (1 + l \cdot i),$$

roznásobíme a dostáváme

$$K_t = K_0 (1 + i)^n + K_0 (1 + i)^n \cdot l \cdot i,$$

nyní již vyjádříme l jako

$$l = \frac{K_t - K_0\,(1 + i)^n}{K_0\,(1 + i)^n \cdot i},$$

upravíme a máme:

$$l = \frac{(K_t / K_0) - (1 + i)^n}{(1 + i)^n \cdot i}$$

Je-li úrokovací období < 1 rok, k úrokování dochází m-krát do roka, pak t vypočteme ze vztahu:

$$K_t = K_0\,(1 + i/m)^{m \cdot t},$$

zlogaritmováním

$$\ln K_t = \ln K_0 + m \cdot t \cdot \ln(1 + i/m),$$

odtud dostáváme

$$\boldsymbol{t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{m \cdot \ln(1 + i/m)}}$$

Výpočet l zbytku úrokovací doby (části úrokového období <1) vypočteme ze vztahu:

$$K_t = K_0\,(1 + i/m)^n\,(1 + l \cdot i),$$

odtud dostaneme

$$\boldsymbol{l = \frac{(K_t / K_0) - (1 + i/m)^n}{i \cdot (1 + i/m)^n}},$$

kde n je počet úrokovacích období.

4.4 Výpočet současné hodnoty při složeném úročení

Současná hodnota $\mathbf{K_0}$ při složeném úročení vypočteme např. ze vztahu:

$K_t = K_0\,(1 + i)^t$, odtud pak je

$$\boldsymbol{K_0 = K_t/(1 + i)^t}$$

a znamená, jak velký kapitál dnes musíme uložit, abychom po čase t a při úrokové sazbě i dosáhli kapitálu $\mathbf{K_t}$.

Faktor ***1/(1 + i)*** se nazývá ***odúročitel*** nebo ***diskontní faktor***

a znamená současnou hodnotu 1Kč splatné za t let při úrokové sazbě i. Diskontní faktor nám možňuje posouvat peněžní částky v čase.

- Obnos získaný dnes má pro nás větší cenu, než **tentýž** obnos získaný za t let.

- Čím dříve máme kapitál, tím dříve ho můžeme investovat a tím dříve nám přináší úrok!

Známe-li budoucí hodnotu K_t, t není přirozené číslo, pak současná hodnota je:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^n.(1+l\cdot i)},$$

kde n je nejblíže nižší přirozené číslo k číslu t, $l=t-n$.

Současná hodnota se též užívá pro investiční rozhodování, kdy hledáme nejvýhodnější variantu.

- Porovnáme současnou hodnotu budoucích příjmů z investice s nyní vloženým kapitálem.

- Varianta, u níž je největší rozdíl mezi současnou hodnotou budoucích příjmů z investice a na počátku vloženým kapitálem (cenou investice), je nejvýhodnější. Označuje se jako **čistá současná hodnota**.

Hledejme takovou úrokovou míru, při níž se bude rovnat součet současných hodnot budoucích příjmů z investice hodnotě právě vloženého kapitálu.

Takovou úrokovou míru nazýváme **vnitřní míra výnosnosti** (vnitřní výnosové procento):

$$\boldsymbol{K_t = u_1/(1 + i) + u_2/(1 + i)^2 + \ldots + u_t/(1 + i)^t},$$

kde K je vynaložený kapitál,

t je doba životnosti investice,

$u_1, u_2, \ldots, u_t$ jsou výnosy z investice v jednotlivých letech,

i je vnitřní míra výnosnosti.

- Platí, že čím vyšší vnitřní míra výnosnosti, tím vyšší je výnos z investice.
- Určení veličiny i je možné jen za pomoci počítače.

4.5 Výpočet úrokové míry a úroku

Z kterékoliv rovnice pro složené úročení je možné též vypočítat úrokovou míru i, např. z rovnice

$$K_t = K_0\,(1 + i)^t$$

dostáváme pak

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\,.$$

Stejně dobře je možné z kterékoliv rovnice pro složené úrokování vypočítat úrok u.

Je nutné si uvědomit, že pro úrok platí vztah

$$u = K_t - K_0.$$

Do něho za K_t dosadíme

$$K_t = K_0 (1 + i/m)^{t \cdot m},$$

pak dostáváme vztah pro výpočet úroku:

$$u = K_0 ((1 + i/m)^{t \cdot m} - 1)$$

4.6 Srovnání jednoduchého a složeného úročení

Srovnání jednoduchého a složeného úročení.

- **Při jednoduchém úročení** je stav vkladu za dobu t dán matematickým vzorcem:

  $\boldsymbol{K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)}$ základní rovnice pro jednoduché úročení.

  Položíme-li $K_0 = q$ a $K_0 \cdot i = k$, dostáváme vztah pro **lineární funkci**:

  $$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t,$$

  po dosazení dostaneme

  $$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

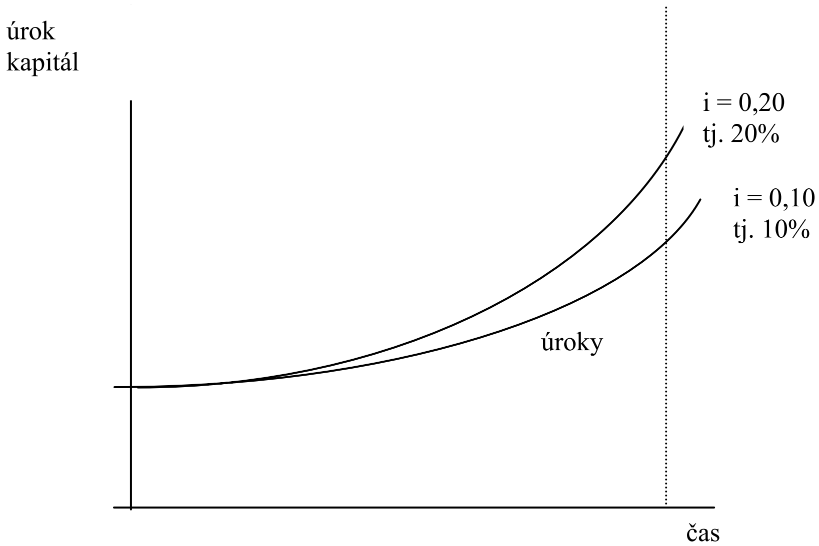
- **Při složeném úročení** je stav vkladu za dobu t dán matematickým vzorcem:

  $\mathbf{K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t}$ základní rovnice pro složené úročení.

  Položíme-li K_0 = q a $(1 + i)$ = a, dostáváme vztah pro exponenciální funkci:

$$\mathbf{y = q \cdot a^x}$$

- Pro t = 0 a t = 1 dostáváme pro oba druhy úrokování stejné funkční hodnoty.
- Pro t ∈ (0,1) je exponenciální funkce < lineární funkce
- Pro t > 1 je exponenciální funkce > lineární funkce



Pro věřitele je výhodnější při splatnosti kratší než 1 rok počítání úroku pomocí jednoduchého úročení.

SHRNUTÍ KAPITOLY SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Po nastudování této kapitoly budete znát, podstatu složeného úrokování a budete umět složené úrokování kombinovat s jednoduchým úročením.

Budete umět vypočítat kteroukoliv veličinu z rovnic pro složené úrokování – dobu splatnosti, současnou hodnotu, úrokovou sazbu i výši úroku.

Budete znát matematické vzorce pro výpočet složeného úrokování polhůtního, vztah mezi jednoduchým a složeným úrokováním.

KONTROLNÍ OTÁZKA 4

1. Vysvětlete pojem složené úrokování.
2. Vysvětlete pojmy področní složené úrokování
3. Vysvětlete, proč užíváme jen polhůtní složené úrokování.
4. Kdy je pro věřitele výhodnější jednoduché úrokování a kdy naopak složené.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 4

PŘÍKLADY:

1) Uložili jsme částku 12.000,-Kč. Jaká bude výše kapitálu za 4 roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je roční a úroková sazba činí 3,75% p.a.
2) Uložili jsme částku 12.000,-Kč. Jaká bude výše vkladu za 4 roku při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je čtvrtletní a roční úroková sazba je 3,75% p.a.
3) Na kolik Kč vzroste vklad 50.000,-Kč uložený na 5 let a 4 měsíce při 2,75% p.a.
4) Určete dobu splatnosti kapitálu 500.000,-Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 600.000,-Kč, při 5% úrokové

sazbě a měsíčním polhůtním úročení.

5) Kolik musíme uložit, abychom za 6 let a 3 měsíce měli obnos 500.000,- Kč při roční úrokové sazbě 3 % p.a.

6) Máme možnost koupit ojetý automobil. Je pro nás výhodnější zaplatit hotově 150.000,- Kč nebo dát zálohu 90.000,-Kč a za 3 roky doplatit 80.000,-Kč. Co je pro nás výhodnější máme-li možnost uložit peníze při 3% úrokové sazbě a připisování úroku čtvrtletním.

7) Jaká byla úroková sazba z vkladu, jestliže částka 240.000,-Kč vzrostla za 5 let na 265.400,-Kč. Úroky byly připisovány 1x ročně ponechány na účtu a dále úročeny.

5 SPOŘENÍ

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY SPOŘENÍ

V předchozí 3., 4. a 5. kapitole jsme si vysvětlili, jak vypočítat konečnou (budoucí) nebo počáteční (současnou) hodnotu určitého kapitálu, přičemž jeho počáteční hodnota se v průběhu doby nezvyšovala ani nesnižovala.

V této kapitole bude naším cílem vypočítat, kolik uspoříme i s úroky z úspor za danou dobu, pokud budeme ukládat v pravidelných intervalech pevné částky (např. budeme každý měsíc spořit 1.000,-Kč, na konci roku pak budeme mít 12.000,-Kč plus zhodnocení ve formě úroků.

Kapitolu spoření rozdělíme na dva větší celky:

- **spoření krátkodobé**, kterým budeme rozumět spoření, jehož doba nepřesáhne jedno úrokové období (obvykle jeden rok), úroky budou připisovány na konci doby spoření, nejpozději na konci úrokového období, a jednotlivé úložky budou úročeny na základě jednoduchého úročení,

- **spoření dlouhodobé**, o kterém budeme hovořit v případě, že doba spoření bude delší než jedno úrokové období. V tomto případě se úroky na konci každého úrokového období připíší k dříve naspořené částce a dále se s touto částkou úročí.

Tato kapitola je nakonec ale rozdělena do tří podkapitol.

- V první podkapitole se budeme věnovat **krátkodobému** spoření, a to jak **předlhůtnímu, tak i polhůtnímu**, vysvětlení těchto pojmů.

- Ve druhé podkapitole se budeme věnovat **dlouhodobému** spoření, a to stejně, jako v předchozí podkapitole, jak

předlhůtnímu, tak i polhůtnímu, vysvětlíme si, v čem spočívá rozdíl těchto pojmů.

- Ve třetí podkapitole budeme porovnávat krátkodobé a dlouhodobé spoření a ukážeme si **kombinování** těchto obou způsobů spoření.

CÍLE KAPITOLY SPOŘENÍ

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět: • rozlišit pouhé úrokování od spoření, • rozlišovat pojmy krátkodobé spoření předlhůtní a polhůtní, stejně jako pojmy dlouhodobé spoření předlhůtní a polhůtní, • vzájemně kombinovat krátkodobé a dlouhodobé spoření.	*Budete umět*

Získáte: • schopnost, kdy uplatnit krátkodobé a kdy dlouhodobé spoření, • schopnost poznat, kdy musíte kombinovat krátkodobé spoření s dlouhodobým.	*Získáte*

Budete schopni: • vypočítat jakýkoliv příklad týkající se spoření, • spočítat ať už hodnotu jednorázového vyrovnání u penzijního připojištění, • tak též vypočíst hodnotu prostředků vyplacených stavební spořitelnou.	*Budete schopni*

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 270 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY SPOŘENÍ

Spoření, krátkodobé a dlouhodobé spoření, předlhůtní a polhůtní spoření.

PRŮVODCE STUDIEM 5

Základním pojmem této kapitoly je spoření, což znamená pravidelné ukládání stejné (konstantní) finanční částky.

Spoření pak dělíme na:

a) krátkodobé- tj. pravidelné ukládání konstantní částky v jednom úrokovacím období,

b) dlouhodobé- tj. pravidelné ukládání konstantní částky po dobu delší než je jedno úrokovací období.

Pokud se tyto stejné částky ukládají

- ***na počátku*** každé *m-tiny roku*, tj. na počátku úrokovacího období, pak mluvíme o ***spoření předlhůtním,***
- ***na konci*** každé *m-tiny roku*, tj. na konci úrokovacího období, pak mluvíme o ***spoření polhůtním***.

5.1 Krátkodobé spoření

Krátkodobé spoření se nazývá takové spoření, tj. pravidelné ukládání stejné částky, které nepřesahuje jedno úrokovací období.

V dalších dvou podkapitolách budeme předpokládat, že:

- úrokové období je jeden rok. To znamená, že úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku,
- předpokládejme, že pravidelné částky se budou ukládat *m-krát* za rok a budou úročeny jednoduchým úrokováním,
- se budou částky ukládat na počátku nebo na konci každé *m-tiny* roku, rozlišujeme **spoření předlhůtní nebo polhůtní**.

5.1.1 Krátkodobé spoření předlhůtní

Krátkodobé spoření **předlhůtní:**

Předpokládejme, že

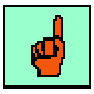
- celková naspořená částka za 1 rok je 1 Kč,
- ukládáme **na počátku každé *1/m-tiny* roku** tudíž *1/m-tinu* koruny.

Úkolem je zjistit, kolik máme na konci roku včetně úroku, jedná-li se o roční úrokovací období a roční úroková míra je ***i***.

Platí, že pro

- měsíční spoření je $m = 12$,

- čtvrtletní spoření je m = 4,
- pololetní spoření je m = 2,
- roční spoření je m = 1.



Do tabulky si vepíšeme, jak vypadají úroky ze splátek:

pořadí úložky	*úrokovací doba*	*úrok*
1.	m * 1/m	1/m * i * m/m
2.	(m – 1) * 1/m	1/m * 1 * (m -1)/m
3.	(m – 2) * 1/m	1/m * i * (m – 2)/m
m.	1 * 1/m	1/m * i * 1/m

Připomeňme si:

Úrokovací doba je část roku, po kterou je každá úložka jednoduše úročena.

Je proto dána součinem, v němž první činitel vyjadřuje počet období (část roku), po kterou je daná splátka úročena, druhý činitel vyjadřuje délku tohoto období (vyjádřenou jako část úrokového období).

Pro případ roku, kdy např. *m = 12* je pak úrokovací doba *1/12 roku*.

Sečteme úroky ze všech ***m*** splátek:

je to součet aritmetické řady, v níž $\boldsymbol{a_1 = m}$, $\boldsymbol{a_n = 1}$, počet členů ***m***, neboť

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left(m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 1\right) = \frac{i}{m^2} \cdot \underbrace{\frac{m}{2} \cdot (m+1)}_{\text{součet aritmetické řady, } a_1 = \text{m},\ a_n = 1\text{, počet členů } m.}$$

Upravíme a dostáváme celkový úrok na konci roku:

$$u = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i \ .$$

Celková naspořená částka za 1 rok je:

$$S_1 = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i \ .$$

Je to vlastně celková roční uložená částka 1 Kč plus úrok z této částky.

Není-li celková částka uspořená za 1 rok 1 Kč, ale ***(x*m)*** **Kč**, tj. každou m-tinu roku spoříme na jejím počátku ***x*** **Kč**, pak dostaneme na konci roku částku:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} * i\right) \qquad (5\text{-}1)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.1

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1.500 Kč při úrokové sazbě 3% p. a.?

Řešení příkladu

Využijeme vzorec *(5-1)* a do něho dosadíme za $m = 12$, $i = 0{,}03$, $x = 1.500$. Vypočítáme naspořenou částku S_x:

$$S_x = m \cdot x \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i \right) =$$

=12*1.500*(1+13/24*0,03)=18.292,50

Do konce roku uspoříme při ukládání počátkem každého měsíce18.292,50 Kč. *

Předcházející příklad ilustruje při stavebním spoření

- naspořenu částku,
- spoříme-li měsíčně 1.500 Kč (od poplatků peněžnímu ústavu abstrahujeme),
- přičemž 25% z této částky činí státní podpora, která je ale limitována částkou 4.500 Kč.

V našem příkladu činí 25 % z naspořené částky 18.292,5 * 0,25 = 4.573,13 Kč.

To by pro klienta znamenalo, že by v takovém případě dostal státní podporu jen ve výši 4.500 Kč.

Z výše uvedeného vyplývá, že z hlediska výše míry výnosnosti by bylo lepší spořit měsíčně jen tolik, aby naspořená částka včetně úroků činila právě 18.000 Kč (viz následující příklad).

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.2

Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok našetřili 18.000 Kč při úrokové sazbě 3 % p. a.?

Řešení příkladu

Jedná se o krátkodobé spoření předlhůtní a pro výpočet využijeme vzorce *(5-1)*. Do tohoto vzorce pak dosadíme za $S_x = 18.000$, $m = 12$, $i = 0{,}03$.

Ze vzorce *(5-1)*, což je

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

pak vyjádříme vztah pro výši úložky *x* a dosazením zadaných hodnot vypočteme hledanou hodnotu ***x:***

$$x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} = \frac{18000}{12 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}03} = 1476{,}01 .$$

Měsíčně je tedy nutné spořit 1476,01 Kč. *

5.1.2 Krátkodobé spoření polhůtní

O **krátkodobém spoření polhůtním** hovoříme tehdy,

- ukládáme-li stejné částky vždy **na konci určitého období**.

Pro odvození vzorce pro výpočet celkové naspořené částky při krátkodobém spoření polhůtním předpokládáme opět,

- že úrokovací období je roční, a dále,
- že budeme na konci každé *m-tiny* roku ukládat *1/m Kč*.

Platí tedy, že celkem v jednom roce bylo uloženo $m * 1/m$ Kč = 1 Kč.

Úroky z jednotlivých splátek při spoření krátkodobém polhůtním jsou uvedeny v následující tabulce:

pořadí úložky	*úrokovací doba*	*úrok*
1.	$(m - 1) * 1/m$	$1/m * i * (m - 1)/m$
2.	$(m - 2) * 1/m$	$1/m * i * (m - 2)/m$
$(m - 1)$.	$1 * 1/m$	$1/m * i * 1/m$
m	$0 * 1/m$	$1/m * i * 0/m$

Tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období (části roku), je oproti předlhůtnímu spoření počet těchto období (po které je splátka úročena) o jedno období nižší.

Z poslední úložky v tomto případě nebudeme mít žádný úrok, protože bude uložena na konci roku.

Celkový úrok pro krátkodobé polhůtní spoření vypočítáme stejně jako v případě předlhůtního spoření podle vzorce pro součet konečné aritmetické řady:

Sečteme úroky ze všech ***m*** splátek a dostaneme opět

součet aritmetické řady, v níž $\boldsymbol{a_1 = m}$, $\boldsymbol{a_n = 1}$, počet členů ***m***, neboť

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left((m-1) + (m-2) + \ldots + 1 \right) = \frac{i}{m^2} \cdot \underbrace{\frac{m}{2} \cdot (m-1)}$$

součet aritmetické řady, a_1 = m, a_n = 1, počet členů m.

Upravíme a dostáváme celkový úrok na konci roku:

$$u' = \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \ .$$

Celková naspořená částka za 1 rok je:

$$S_1' = 1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \ .$$

Je to vlastně celková roční uložená částka 1 Kč plus úrok z této částky.

Není-li celková částka uspořená za 1 rok 1 Kč, ale *(x*m) Kč*, tj. každou *m*-tinu roku spoříme na jejím počátku *x Kč*, pak dostaneme na konci roku částku:

$$S_x = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \qquad (5\text{-}2)$$

Rozdíl mezi připsaným úrokem za 1 rok u předlhůtního a polhůtního krátkodobého spoření:

předlhůtné spoření je $S_x = m \cdot x\left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$,

polhůtné spoření je $S_x = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$,

odečteme, tj. $S_x - S_x^{'}$ a dostáváme

$$S_x - S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot m} \cdot i - \left(-\frac{1}{2 \cdot m} \cdot i\right)\right] = m \cdot x \cdot \frac{2}{2m} \cdot i = x \cdot i,$$

kde $x \cdot i$ je roční úrok z jedné splátky $\boldsymbol{x}$.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.3

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li koncem každého měsíce 1.500 Kč při úrokové sazbě 3 % p. a.?

Řešení příkladu

Využijeme vzorec *(5-2)* a do něho dosadíme za $m = 12,\ i = 0{,}03,\ x = 1.500$, odtud pak vypočítáme naspořenou částku S_x':

$$S_x' = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) = 12*1.500*(1+11/24*0{,}03) = 18.247{,}50$$

Do konce roku uspoříme při ukládání koncem každého měsíce18.247,50 Kč.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.4

Kolik musíme spořit na konci každého měsíce, abychom za rok našetřili 18.000 Kč při úrokové sazbě 3 % p. a.?

Řešení příkladu

Jedná se o krátkodobé spoření polhůtní a pro výpočet využijeme vzorce *(5-2)*, do kterého pak dosadíme za $S_x = 18.000,\ m = 12,\ i = 0{,}03$.

Ze vzorce *(5-2)*, což je

$$S_x' = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

pak vyjádříme vztah pro výši úložky ***x*** a dosazením zadaných hodnot vypočteme hledanou hodnotu ***x:***

$$x = \frac{S'_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} = \frac{18.000}{12 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}03)} = 1.479{,}65$$

Měsíčně je tedy nutné spořit 1479,65 Kč, což je o 3 Kč více, než při úložkách na začátku měsíce.

Rozdíl mezi úsporami při předlhůtním a polhůtním spoření je de facto v ročním úroku z jedné splátky.

Ve dvou srovnatelných předchozích příkladech (5.1.1 a 5.1.3) je rozdíl 45 Kč, což je úrok z 1500 Kč za rok, neboť 1500 * 0,03 = 45 Kč.

Budeme-li stavební spořitelně posílat částku 1500 Kč za rok na konci měsíce, bude to pro nás výhodnější, neboť první úložku máme vlastně k dispozici celý rok. To je patrné porovnáním tabulek úroků pro předlhůtní a polhůtní krátkodobé spoření.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.5

Kolik je nutno koncem každého měsíce splácet věřiteli, jestliže nám zapůjčil částku 18.000 Kč, kterou chce splácet měsíčními splátkami po dobu dvanácti měsíců? Úroková sazba činí 10 % p.a.

Řešení příkladu

Vyjdeme z úvahy, že věřitel mohl částku 18.000 Kč uložit při dané úrokové sazbě, a na konci roku by tedy disponoval částkou, kterou vypočteme dle vztahu *(3-1)*:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) = 18.000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 1) = 19.800\,.$$

Na konci roku by tedy měl věřitel částku 19.800 Kč. Stejnou hodnotu musí mít, bude-li mu dlužník na konci každého měsíce splácet částku ***x***; tuto částku vypočteme ze vztahu *(5-2)*:

$$S'_x = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right), \text{ odkud}$$

$$x = \frac{S'_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} = \frac{19.800}{12 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}1)} = 1.577{,}69$$

Dlužník musí splácet částku 1.577,69 Kč.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.1.6

Při kolikaprocentní úrokové sazbě uspoříme za jeden rok 10.000 Kč, jestliže koncem každého čtvrtletí ukládáme 2.400 Kč?

Pozn.: Nezapomeňme, že úroková sazba je úroková míra 100, tj. ***i****100.

Řešení příkladu

Využijeme vzorce *(5-2)* a dosadíme S'_x = 10.000, m = 4, x = 2.400 a vyjádříme úrokovou míru i:

$$S'_x = m \cdot x\left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right), \text{ odtud}$$

vyjádříme i:

$$i = \frac{S'_x - m \cdot x}{\frac{m \cdot x \cdot (m-1)}{2 \cdot m}} = \frac{10.000 - 4 \cdot 2.400}{\frac{4 \cdot 2.400 \cdot (4-1)}{2 \cdot 4}} = \frac{400}{\frac{960 \cdot 3}{8}} = 0{,}111$$

Požadovanou částku uspoříme při úrokové sazbě 11,1 %. *

Pozn.:

Bude-li úrokové období kratší než jeden rok, např. pololetní, čtvrtletní apod., přizpůsobíme jednak úrokovou míru *i* délce úrokového období, jednak počet úložek *m*. Odvozené vztahy samozřejmě platí, neboť jsou zcela obecné.

5.2 Dlouhodobé spoření

O dlouhodobém spoření budeme hovořit, jestliže

- půjde o spoření za několik úrokových období,
- pro odvození vzorců pro výpočet celkové naspořené částky za *n* období budeme předpokládat, že v rámci úrokového období spoříme pouze jednou,
- dále, že úrokové období je jeden rok.

Podle toho, zda částka bude uložena

- na počátku úrokového období, budeme opět hovořit o **spoření předlhůtním**,
- na konci úrokového období, budeme mluvit o **spoření polhůtním.**

5.2.1 Dlouhodobé spoření předlhůtní

Dlouhodobé spoření předlhůtní:

znamená, že ukládáme

- n-krát
- a Kč **na počátku** každého roku,

pak na konci n-tého období při úrokové míře i včetně úroku máme:

pořadí úložky	*úrokovací doba*	*úrok*
1.	n	$a * (1 + i)^n$
2.	(n – 1)	$a * (1 + i)^{n-1}$
n.	1	$a * (1 + i)$

Pro určení celkové hodnoty uspořené (částky a ukládáme vždy na začátku období) včetně úroků na počátku n-tého období vypočítáme zúročenou výši všech vkladů ke konci n-tého období a sečteme je:

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right]$$

Jedná se tedy o součet geometrické řady, v níž je:

- $q = 1 + i$,
- $a_1 = a \cdot (1 + i)$.

Pak součet této řady je:

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (5\text{-}3)$$

Hodnotu

$$s_n^i = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (5\text{-}4)$$

nazýváme **střadatel předlhůtní**.

Udává, kolik ušetříme za *n* období při úrokové míře *i*, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč:

$$S = a \cdot s_n^i \qquad (5\text{-}5)$$

odtud lze pak vyjádřit velikost splátky

$$a = \frac{S}{s_n^i} \qquad (5\text{-}6)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.2.1

Kolik uspoříme za tři roky, budeme-li ukládat na počátku každého roku 12.000 Kč při neměnné 5 % úrokové sazbě p. a. a ročním připisování úroků?

Řešení příkladu

Pro výpočet využijeme vzorce *(5-3)*, kde $a = 12.000$, $i = 0{,}05$, $n = 3$.

Potom

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12.000 \cdot (1+0{,}05) \cdot \frac{(1+0{,}05)^3 - 1}{0{,}05} = 39.721{,}5$$

Za tři roky uspoříme 39.721,50 Kč.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.2.2

Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má dle prognózy vývoje cen stát v té době 750.000 Kč.

Kolik musíme tedy spořit na počátku každého roku, abychom za pět let uspořili 750.000 Kč?

Úspory dáváme na účet, úročený sazbou 5 % p.a. s ročním připisováním úroků.

Řešení příkladu

Pro výpočet využijeme vzorce *(5-3)* dosadíme-li $S = 750.000$, $i = 0{,}05$, $n = 5$

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

odtud pak vypočítáme výši úložky a:

$$a = \frac{S \cdot i}{(1+i)\cdot\left[(1+i)^n - 1\right]} = \frac{750.000 \cdot 0{,}05}{1{,}05 \cdot (1{,}05^5 - 1)} = 129.267{,}71$$

Počátkem každého roku je třeba spořit 129.267,71 Kč. *

Pozn.:

Bude-li úrokové období kratší než jeden rok, tj. úroky budou připisovány častěji, např. dvakrát ročně při pololetním úrokovém období, čtyřikrát ročně při čtvrtletním úrokovém období atd., bude nutno přizpůsobit úrokovou sazbu tomuto období.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.2.3

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1.500 Kč při úrokové sazbě 3 % p.a. a měsíčním připisování úroků?

Řešení příkladu

V tomto případě se jedná o dlouhodobé předlhůtní spoření, neboť spoříme měsíčně a úrokové období je též měsíční.

Všimněme si, že zadání příkladu je podobné příkladu 5.1.1, kde jsme použili krátkodobé spoření. Zde jsme též spořili měsíčně, ale úrokové období bylo roční.

Nyní tedy pro řešení využijeme vztah *(5-3)*, do něhož dosadíme za a = 1.500, n = 12 (počet měsíců je počet úrokových období), i = 0,03/12

= 0,0025 p.m. (měsíční úroková míra):

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1.500 \cdot 1{,}0025 \cdot \frac{1{,}0025^{12} - 1}{0{,}0025} = 18.295{,}2$$

Naspořená částka na konci roku činí 18.295,20 Kč *

Pozn.:

Srovnáme-li vypočtený výsledek s výsledkem příkladu 5.1.1 vidíme, že při měsíčním připisování úroků naspoříme částku vyšší v našem případě o 2,70 Kč.

5.2.2 Dlouhodobé spoření polhůtní

O **dlouhodobém spoření polhůtním** hovoříme v případě, že jde o spoření

- za několik úrokovacích období,
- ukládáme-li ***n***-krát ***a*** Kč **na konci** každého roku.

Ukládáme-li částky na konci úrokového období, v našem případě na konci roku, mluvíme o spoření polhůtním (nebo též polhůtním).

Naším úkolem je vypočítat, kolik uspoříme za ***n*** období, ukládáme-li na konci každého období částku ***a*** při roční úrokové míře ***i***.

Stále předpokládáme, že úrokové období je roční, tedy že úroky jsou připisovány na konci roku.

ukládáme částku ***a,*** vypočítáme hodnoty všech úložek ke konci n-tého období a sečteme je.

Postup je zřejmý z následující tabulky:

pořadí úložky	*úrokovací doba*	*úrok*
1	n – 1	a * (1 + i)$^{n - 1}$
2	n - 2	a * (1 + i)$^{n - 2}$
n – 1	1	a * (1 + i)
n	0	a

Pro určení celkové hodnoty uspořené (částky *a* ukládáme vždy na konci období) včetně úroků na konci n-tého období vypočítáme zúročenou výši všech vkladů ke konci n-tého období a sečteme je:

$$S' = a \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right]$$

Jedná se opět o součet geometrické řady, v níž je:

- q = 1 + i,
- a_1 = a.

Pak součet této řady je:

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5-7}$$

Hodnotu

$$s_n^{'i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5-8}$$

nazýváme **střadatel polhůtní**.

Udává, kolik ušetříme za *n* období při úrokové míře *i*, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč:

$$S' = a \cdot s_n^{'i} \tag{5-9}$$

odtud lze pak vyjádřit velikost splátky

$$a = \frac{S'}{s_n^{'i}} \tag{5-10}$$

Výrazy *(5-4)* pro střadatel předlhůtní a *(5-8)* pro střadatel polhůtní se liší pouze faktorem (1 + i).

Platí, že:

$$s_n^i = s_n^{'i} \cdot (1+i),$$

což se slovně dá vyjádřit též, že střadatel předlhůtní = (1 + i) * střadatel polhůtní.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.2.4

Vyjdeme ze zadání pro příklad 5.2.2 s tím rozdílem, že částky na nákup automobilu chceme ukládat na konci roku, abychom za pět let uspořili 750.000 Kč při úrokové sazbě 5 % p.a. a ročním úrokovém období?

Řešení příkladu

Použijeme vzorec *(5-10)*, do něhož dosadíme n = 5, S = 750.000, i=0,05, dostáváme

$$a = \frac{S'}{s'^{i}_{n}} = \frac{S'}{\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}} = \frac{S' \cdot i}{(1+i)^{n}-1},$$

po dosazení máme $a = \dfrac{750.000 \cdot 0{,}05}{1{,}05^{5} - 1} = 135.731{,}1$.

Koncem každého roku budeme ukládat 135.731,10 Kč. *

Částka, kterou spoříme na konci roku, je vyšší než pro příklad 5.2.2, kdy jsme spořili na počátku roku.

Pozn.

Částku, kterou je nutno spořit na konci roku, lze snadno vypočítat z částky, kterou spoříme na počátku roku, a to tak, že ji vynásobíme faktorem (1 + i). To vyplývá ze vztahu mezi střadatelem polhůtním a střadatelem předlhůtním, který je uveden výše.

Tedy pro kontrolu: 129.267,71 * (1 + 0,05) = 135.731,10 Kč.

Chceme-li spočítat dobu potřebnou pro naspoření částky $\boldsymbol{S'}$ při dané úrokové míře $\boldsymbol{i}$, přičemž pravidelně ukládáme částky $\boldsymbol{a}$, vyjdeme ze vztahu *(5-7)* , který po úpravách můžeme zapsat ve tvaru:

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{S \cdot i'}{a} + 1 = (1+i)^n \text{, pak}$$

tuto rovnici zlogaritmujeme a pomocí kapitoly 2.2.3 dostaneme:

$$\ln(\frac{S' \cdot i}{a} + 1) = n \cdot \ln(1+i) \text{, z toho již máme}$$

$$n = \frac{\ln(\frac{S' \cdot i}{a} + 1)}{\ln(1+i)} \qquad (5\text{-}11)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.2.5

Za jak dlouho uspoříme 50.000 Kč při ročním polhůtném ukládání 7.000 Kč při neměnné 4 % úrokové sazbě p.a.? Předpokládáme roční připisování úroků.

Řešení příkladu

Použijeme vztah *(5-11)* a dosadíme $S' = 50.000$, $a = 7.000$, $i = 0{,}04$, potom

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{50.000 \cdot 0{,}04}{7.000} + 1\right)}{\ln 1{,}04} = 6{,}4$$

Uvedenou částku uspoříme přibližně za 6,4 roku.

Pozn.

Bude-li úrokovací období kratší než jeden rok, např. pololetní, čtvrtletní apod., přizpůsobíme tomuto období úrokovou sazbu obdobně jako v příkladu 5.2.3.

5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

Naším úkolem v této části bude zjistit, kolik uspoříme do konce n-tého období, jestliže ukládáme m-krát za jedno úrokové období.

Tento problém rozdělíme opět podle toho, zda ukládáme na počátku nebo na konci určité části, tedy m-tiny úrokového období, což znamená, že

- budeme aplikovat vztah buď pro **krátkodobé spoření předlhůtní**,
- nebo pro **krátkodobé spoření polhůtní**

a na tuto hodnotu uspořenou v jednom úrokovém období včetně úroku budeme aplikovat v obou případech vztah pro **dlouhodobé spoření polhůtné**, neboť hodnota je spočtená pro konec úrokového období, tj.

ukládána je vždy na konci této doby.

Pro další vzorové výpočty volíme roční úrokové období.

5.3.1 Kombinace krátkodobého spoření předlhůtního a dlouhodobého spoření

Pro spoření krátkodobé **předlhůtní** platí, že výše uspořené hodnoty na konci prvního roku je při pravidelném spoření částky ***x*** **na počátku** ***m***-tiny roku:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right).$$

Nyní tuto částku **na konci** každého roku fakticky dále ukládáme, čímž jsme převedli naši úlohu na případ dlouhodobého spoření polhůtního.

Znamená to, že budeme **koncem roku** ukládat místo částky ***a***, kterou jsme uvažovali ve vzorci pro dlouhodobé spoření polhůtní, částku $\boldsymbol{S_x}$.

Potom na konci ***n***-tého roku bude celková naspořená částka podle vzorce *(5-5)*, kde nahradíme částku ***a*** částkou $\boldsymbol{S_x}$, rovna:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (5\text{-}12)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.3.1

Kolik uspoříme za tři roky, spoříme-li začátkem každého měsíce 1.000 Kč při neměnné 5 % roční úrokové sazbě? Předpokládáme roční připisování úroků.

Řešení příkladu

Pro výpočet použijeme vzorec *(5-12)* a dosadíme x = 1.000, n = 3, m = 12, i = 0,05. Všimněme si, že první část výpočtu je podle téhož vzorce, jaký jsme použili při řešení příkladu 5.1.1, dosadíme uvedené hodnoty

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12 \cdot 1.000 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 38.854{,}56$$

Při uvedených podmínkách uspoříme 38.854,56 Kč. *

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.3.2

Nyní se podívejme na příklady 5.2.2 a 5.2.4 Tentokrát nebudeme na automobil spořit ročními úložkami, ale čtvrtletními. Kolik tedy musíme spořit počátkem každého čtvrtletí, abychom za pět let uspořili 750.000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 5 % a ročním připisování úroků?

Řešení příkladu

Za jednotlivé veličiny dosadíme $\boldsymbol{S}$= 750.000, $\boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{n}$ = 5, $\boldsymbol{i}$ = 0,05. Chceme vypočítat výši úložky $\boldsymbol{x}$.

I v tomto příkladu máme již část výpočtu hotovou. Z příkladu 5.2.4 známe totiž částku, kterou je třeba spořit na konci roku. Z ní vypočítáme čtvrtletní úložku a postupujeme pak stejně jako v příkladu na krátkodobé spoření (viz příklad 5.1.2). Výsledek bude stejný jako při níže uvedeném postupu.

Neznáme-li částku, kterou je třeba spořit na konci roku, použijeme vzorec 7.5,

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m + 1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$, ze kterého

vyjádříme x:

$$x = \frac{S}{m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}} = \frac{750.000}{4 \cdot (1 + \frac{5}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1{,}05^{5} - 1}{0{,}05}} = 32.904{,}5$$

Čtvrtletně je nutno ukládat 32.904,50 Kč.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.3.3

Jak dlouho je nutno spořit počátkem každého měsíce 500 Kč, aby uspořená částka dosáhla výše 50.000 Kč při neměnné 4 % roční úrokové sazbě a ročním připisování úroků?

Řešení příkladu

Pro výpočet použijeme vzorec *(5-12)*,

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m + 1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$, ze kterého

vyjádříme nejprve člen, který obsahuje ***n*** v exponentu

$$\frac{S \cdot i}{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} + 1 = (1 + i)^n \text{ , potom}$$

pomocí zlogaritmování vyjádříme dobu spoření ***n*** a po dosazení za ***S***=50.000, ***x***=500, ***i***=0,04, ***m***=12 dostaneme

$$n = \frac{\ln\left[\frac{S \cdot i}{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} + 1\right]}{\ln(1+i)} = \frac{\ln(\frac{50.000 \cdot 0{,}04}{12 \cdot 500 \cdot (1 + \frac{13}{24} 0{,}04)} + 1)}{\ln 1{,}04} = 7{,}2$$

Uvedenou částku uspoříme za 7,2 roku.

*

Podívejme se ještě na případ, kdy úrokové období nebude roční. V tomto případě bude nutno vypočítat nejprve naspořenou částku na konci úrokového období (viz příklad 5.2.3) a dále použít střadatel polhůtní, kde bude přizpůsobena jednak úroková sazba, jednak počet úrokových období.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.3.4

Kolik naspoříme za tři roky, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1.000 Kč při úrokové sazbě 4,8 % p.a. a čtvrtletním úrokovém období?

Řešení příkladu

Využijeme vztah *(5-12)*, do něhož dosadíme za

x=1.000, m=3,
i=0,048/4=0,012, neboť roční úrokovou míru je nutné vydělit počtem úrokových období v roce a dostaneme teprve čtvrtletní úrokovou míru,

n=3*4=12, neboť chceme spořit tři roky po čtyřech úrokových obdobích a dostaneme

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3 \cdot 1.000 \cdot (1 + \frac{4}{6} \cdot 0{,}012) \cdot \frac{1{,}012^{12} - 1}{0{,}012} = 38.781{,}45$$

Za tři roky naspoříme částku 38.781,45 Kč. *

5.3.2 Kombinace krátkodobého spoření polhůtního a dlouhodobého spoření

Pro spoření krátkodobé **polhůtní** platí, že výše uspořené hodnoty na konci prvního roku je při pravidelném spoření částky ***x* na konci *m*-**tiny roku:

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \; .$$

Nyní, opět jako v předcházejícím odstavci, budeme tuto částku **na konci** každého roku fakticky dále ukládat, čímž jsme zase převedli naši úlohu na případ dlouhodobého spoření polhůtního.

Znamená to, že budeme **koncem roku** ukládat místo částky ***a***, kterou jsme uvažovali ve vzorci pro dlouhodobé spoření polhůtní, částku $\boldsymbol{S'_x}$.

Potom na konci ***n***-tého roku bude celková naspořená částka podle vzorce *(5-5)*, kde nahradíme částku ***a*** částkou $\boldsymbol{S_x}$, rovna:

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (5\text{-}13)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5.3.5

Kolik budeme mít k dispozici na účtu na konci roku, jestliže jsme na počátku roku uložili částku 10.000 Kč a koncem každého měsíce spoříme na tento účet 1.000 Kč? Úroková sazba je 5 % p.a. s pololetním připisováním úroků.

Řešení příkladu

Řešení rozdělíme na dvě části:

1. spočítáme budoucí hodnotu částky 10.000 Kč podle vztahu *(4-2)* z kapitoly páté, kam dosadíme $\boldsymbol{K_0}$ = 10.000, $\boldsymbol{i}$ = 0,05, $\boldsymbol{m}$ = 2, $\boldsymbol{t}$ = 1:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot t} = 10.000 \cdot (1 + \frac{0{,}05}{2})^2 = 10.506{,}25$$

2. spočítáme naspořenou částku podle vztahu *(5-13)*, kde $\boldsymbol{m}$ = 6 (počet úložek v jednom úrokovém období), $\boldsymbol{x}$ = 1000, $\boldsymbol{i}$ = 0,1/2 = 0,05 p.s. (pololetní úroková míra), $\boldsymbol{n}$ = 2 (počet pololetí v jednou roce):

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 6 \cdot 1.000 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}025) \cdot \frac{1{,}025^2 - 1}{0{,}025} = 12.276{,}56$$

Celkem budeme mít na účtu součet naspořené částky $\boldsymbol{S'}$ a zúročené částky $\boldsymbol{K_t}$, tj.:10.506,25 + 12.276,56 = 22.782,81 Kč.

KONTROLNÍ OTÁZKA 5

1. Vysvětlete pojem spoření.
2. Vysvětlete pojmy krátkodobé a dlouhodobé spoření.
3. Vysvětlete, kdy se jedná o předlhůtní a kdy o polhůtní spoření.
4. Kdy je pro věřitele výhodnější jednoduché úrokování a kdy naopak složené.
5. Vysvětlete, proč užíváme při kombinaci krátkodobého a dlouhodobého spoření jen dlouhodobé spoření polhůtní.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 5

PŘÍKLADY:

1) Kolik uspoříme do konce roku, ukládáme-li koncem každého měsíce 1.500,- Kč při 3 % úrokové sazbě.

2) Kolik musíme spořit na konci každého měsíce, abychom za rok našetřili 80.000,- Kč při 3,5 % úrokové sazbě.

3) Při kolika % úrokové sazbě uspoříme za 1 rok 80.000,- Kč, jestliže koncem každého čtvrtletí ukládáme 18.000,- Kč.

4) Kolik uspoříme za 5 let, budeme-li ukládat na počátku každého roku 20.000,- Kč při neměnné úrokové sazbě 3 %.

5) Kolik musíme ukládat koncem každého roku, abychom za 20 let uspořili 2.000.000,- Kč při 3,5 % p.a.

6) Za jak dlouho uspoříme 100.000,-- Kč při ročním polhůtním ukládání 14.000,- Kč při neměnné 3 % úrokové sazbě.

7) Kolik uspoříme za 20 let, spoříme-li začátkem každého měsíce 2.500,- Kč při neměnné 3 % roční úrokové sazbě.

8) Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom za 20 let uspořili 2.000.000,- Kč při neměnné roční úrokové sazbě 3 %.

9) Kolik uspoříme za 20 let, spoříme-li koncem každého čtvrtletí 6.000,- Kč, při neměnné 3 % roční úrokové sazbě.

10) Kolik musíme spořit koncem každého měsíce, abychom za 20 let uspořili 2.000.000,- Kč, při neměnné roční úrokové sazbě 3 %.

11) Jak dlouho je nutno spořit koncem každého měsíce 5.000,- Kč, aby uspořená částka byla ve výši 500.000,- Kč při neměnné 3 % roční úrokové sazbě.

6 DŮCHODY

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY DŮCHODY

V předchozí 7. kapitole jsme se zabývali pojmem *spoření* a vším, co s touto problematikou souvisí. Naučili jsme se rozeznat krátkodobé spoření od dlouhodobého, stejně jako předlhůtní od polhůtního, ale i vzájemně kombinovat krátkodobé a dlouhodobé spoření, včetně výpočtů kterékoliv veličiny z použitého vztahu.

V této kapitole bude naším cílem naučit se vypočítat, kolik a zároveň po předem danou dobu z uspořené (nebo příp. zděděné, či pouze vydělané) částky, i s následným úrokováním, nám bude v pravidelných intervalech a ve výši stejné hodnoty vypláceno. Týž způsob využití problematiky této kapitoly bude výpočet výše pravidelné splátky, jestliže si vezmeme úvěr, který budeme muset pravidelně splácet po předem dohodnutou dobu.

Takové pravidelné platbě v konstantní výši po dohodnutou dobu říkáme anuita, nebo-li důchod, značit budeme ***a***.

Kapitolu DŮCHODY rozdělíme na tři větší celky:

- **důchod bezprostřední**, kterým budeme rozumět takový důchod, s jehož výplatou začneme nyní, tj. ihned,
- **důchod odložený**, o kterém budeme hovořit v případě, že jeho výplata bude realizována až po uplynutí předem dohodnuté doby,
- **důchod věčný,** který znamená neomezenou dobu výplaty. V ostatních všech případech se totiž jedná o důchod, který je vyplácen po předem dohodnutou dobu a tyto důchody pak nazýváme **dočasné**.

Každý ze tří v předešlém jmenovaných celků je dále rozdělen do dvou podkapitol.

- V první podkapitole se budeme vždy věnovat **polhůtnímu důchodu**, což znamená, že anuitní platby jsou realizovány vždy na konci určitého časového intervalu.
- Ve druhé podkapitole se budeme vždy věnovat **předlhůtnímu důchodu**, což znamená, že anuitní platby jsou realizovány vždy na počátku určitého časového intervalu.

V souvislosti s důchody budeme počítat:

- **počáteční** (současnou) ***D*** hodnotu důchodu, což bude součet současných hodnot všech v budoucnu realizovaných plateb důchodu, který udává, kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušných výplat důchodu (anuit) po danou dobu,
- **konečnou** (budoucí) hodnotu ***S*** důchodu ***a***, což bude součet všech výplat důchodu, přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí. Konečná hodnota důchodu tedy udává, kolik bychom celkem získali ke konci posledního roku, kdybychom všechny výplaty důchodu okamžitě po jejich vyplacení při dané úrokové sazbě uložili (investovali se stejným úrokem). Konečná hodnota důchodu je tedy stejná jako naspořená částka.

Podle vztahu *(4-1)* vypočítáme současné hodnoty jednotlivých výplat důchodu a, tyto hodnoty sečteme a tím získáme počáteční hodnotu důchodu *D*.

Konečná hodnota důchodu ***S*** bude sumu úročených výplat důchodu ***a***. Vypočteme ji podle vztahu *(5-3)*, resp. *(5-7)* v závislosti na tom, zda výplaty jsou prováděny předlhůtně nebo polhůtně.

Mezi počáteční a konečnou hodnotou důchodu platí vztah:

$$S = D \cdot (1+i)^n \,, \qquad (6\text{-}1)$$

kde

S je budoucí hodnota důchodu,

D je současná hodnota důchodu,

i je roční úroková míra, neb uvažujeme roční úrokové období,

n je počet úrokových období (let), ve kterých dochází k výplatě anuit.

CÍLE KAPITOLY DŮCHODY

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:

Budete umět

- rozlišit důchod dočasný a věčný,
- rozlišovat důchod předlhůtní a polhůtní,
- poznat, kdy se jedná o důchod bezprostřední a kdy o odložený.

Získáte:

Získáte

- schopnost, kdy uplatnit výpočty pro důchod bezprostřední polhůtní a kdy bezprostřední předlhůtní,
- schopnost, kdy uplatnit výpočty pro důchod odložený polhůtní a kdy odložený předlhůtní,
- schopnost poznat, kdy uplatnit výpočty pro důchod věčný polhůtní a kdy věčný předlhůtní.

Budete schopni:

Budete schopni

- vypočítat jakýkoliv příklad týkající se důchodu,
- spočítat splátky úvěru z dané vypůjčené částky,
- vypočíst hodnotu prostředků, které si můžeme půjčit, jsme-li schopni splácet námi stanovenou výši po dohodnutou dobu.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 270 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY DŮCHODY

Důchod, anuita, bezprostřední a odložený důchod, předlhůtní a polhůtní důchod, dočasný a věčný důchod.

PRŮVODCE STUDIEM 6

Základním pojmem této kapitoly je **důchod**, nebo též **anuita**, jímž budeme rozumět pravidelné platby ve stejné výši.

Někdy je možno se setkat též s přístupem, že anuita je chápána jako série plateb. Terminologie tedy není jednotná.

Podle toho, ***kdy jsou anuity placeny***, rozlišujeme **důchod**:

- **předlhůtní** znamená, že anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu,
- **polhůtní** znamená, že anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu.

Pro začátek budeme předpokládat, že úrokové období a interval k výplatě důchodů je stejný.

Podle toho, ***jak dlouho se anuita bude vyplácet***, rozlišujeme důchod:

- **dočasný** znamená, že důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu,

- **věčný** znamená, že důchod je vyplácen neomezeně dlouho.

Podle toho, ***kdy začneme s výplatou anuity***, rozlišujeme **důchod**:

- **bezprostřední** a znamená, že s výplatou důchodu začneme nyní,

- **odložený,** který znamená, že jeho výplata je realizována až po uplynutí určité doby.

6.1 Důchod bezprostřední

U důchodu bezprostředního začíná jeho výplata hned v daném období.

Podle toho, zda se budou jednotlivé výplaty důchodu vyplácet na počátku nebo na konci období, rozlišíme důchod:

- bezprostřední předlhůtní a
- důchod bezprostřední polhůtní.

6.1.1 Důchod bezprostřední polhůtní

Naším úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu důchodu $\boldsymbol{D}$, budeme-li vždy koncem úrokového období získávat jednotlivé platby (anuity) $\boldsymbol{a}$ po $\boldsymbol{n}$ období při úrokové míře $\boldsymbol{i}$. Počáteční hodnota $\boldsymbol{D}$ se rovná součtu současných hodnot všech výplat k výchozímu datu.

Současnou hodnotu každé výplaty důchodu (anuity) vypočítáme podle vzorce *(4-1)* tak, že výplatu diskontujeme k výchozímu datu.

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je dán součtem konečné geometrické řady, kde

- $a_1 = a\,v$ je první člen řady a

- $q = v$ je kvocient,
- $v=1/(1+i)$ je diskontní faktor,

která nám dává počáteční hodnotu důchodu ***D***. Pro součet současných hodnot výplat důchodu využijeme vzorec *(2-2)* pro součet geometrické řady a získáme:

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (6\text{-}2)$$

kde :

D	je počáteční (současná) hodnota důchodu,
a	je pravidelná platba (anuita),
i	je roční úroková míra,
n	je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,
v	je diskontní faktor 1/(1+i).

Výraz:

$$a_{n}^{i} = \frac{1-v^n}{i} \qquad (6\text{-}3)$$

se nazývá **zásobitel polhůtní** a udává počáteční hodnotu jednotkové důchodové platby, vyplácené vždy koncem úrokového období po ***n*** období při úrokové míře ***i***.

Ze vztahu *(6-1)* mezi počáteční a konečnou hodnotou důchodu vyplývá též vztah mezi střadatelem polhůtním, který je dán vztahem *(5-8)*, a zásobitelem polhůtním, který je dán vztahem *(6-3)*. Platí:

$$s_n^i = a_n^i (1+i)^n \text{, kde}$$

$s^i{}_n$ je střadatel polhůtní – viz vztah *(5-8)*,

$a^i{}_n$ je zásobitel polhůtní,

i je roční úroková míra,

n je počet úrokových období (let), ve kterých je vyplácena anuita.

Z uvedeného vyplývá, že naspořenou částku, ukládáme-li pravidelně polhůtně částky ve výši a, je možno spočítat jednak podle vztahu *(5-8)* pomocí střadatele a jednak podle vztahu *(6-3)* pomocí zásobitele a úrokovacího faktoru.

Podobně jako u spoření může docházet k tomu, že splátky důchodu jsou vypláceny častěji než jedenkrát v úrokovém období (v našem případě je roční).

Budeme nyní předpokládat, že na konci každé ***m***-tiny roku jsou vypláceny splátky důchodu ve výši ***x*** Kč.

Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme vzorec *(6-2)* s tím, že nejprve musíme vypočítat, jaká bude celková hodnota výplat důchodu na konci roku.

Použijeme k tomu vztah *(5-2)* pro krátkodobé polhůtní spoření. Částku ***a*** ve vztahu *(6-2)* nahradíme částkou $\boldsymbol{S'_x}$ ze vztahu *(5-2)*. Tím jsme nahradili ***m*** výplat důchodu ve výši ***x*** Kč jednou výplatou důchodu ve výši $\boldsymbol{S'_x}$ Kč na konci úrokového období (roku):

$$D = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \qquad (6\text{-}4)$$

kde

D	je počáteční (současná) hodnota důchodu,
m	je počet stejných částí úrokového období (roku),
x	je výše pravidelné platby (v rámci úrokového období je jich $\boldsymbol{m}$),
i	je roční úroková míra,
n	je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,
v	je diskontní faktor 1/(1+i).

Zde je třeba si uvědomit, že počáteční hodnota ročního důchodu o hodnotě např. 12.000 Kč se bude lišit od počáteční hodnoty měsíčního důchodu o hodnotě 1.000 Kč. Ačkoli vyplacená částka bude stejná, přesto počáteční hodnota v druhém případě musí být vyšší, neboť výplaty důchodu jsou poskytovány již v průběhu roku.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.1.1

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16.000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5% p.a.

Řešení příkladu

Zde se jedná o výpočet současné hodnoty polhůtního důchodu. Je to cena, kterou jsme ochotni zaplatit za to, že budeme ročně získávat platby ve výši ***a***, požadujeme-li úrokovou míru (úrokovou sazbu = výnosnost) ***i***.

Dosadíme do vzorce *(6-2)* za ***a*** = 16.000, ***n*** = 20, ***i*** = 0,05:

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 16.000 \cdot \frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 199.395{,}37..$$

Je nutné investovat dnes částku 199.395,37 Kč, která nám zajistí výplaty pravidelných částek (anuit) podle požadovaných parametrů

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.1.2

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, z níž budeme mít ke konci každého čtvrtletí výnos 4000 Kč po dobu dvaceti let, požadujeme-li míru výnosnosti 5 % p.a. a předpokládáme-li roční úrokové období?

Jaká je počáteční hodnota důchodu 4000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu dvaceti let při neměnné roční úrokové sazbě 5 %?

Řešení příkladu

Dosadíme do vzorce *(6-4)* za $\boldsymbol{x} = 4.000$, $\boldsymbol{m} = 4$, $\boldsymbol{n} = 20$, $\boldsymbol{i} = 0{,}05$:

$$D = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i} = 4 \cdot 4.000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}05^{20}}}{0{,}05} = 203.134{,}03$$

Počáteční hodnota důchodu, tedy cena investice, je 203.134,03 Kč.

Srovnáme-li výsledky příkladů 6.1.1 a 6.1.2, vidíme, že počáteční hodnota důchodu v případě čtvrtletních výplat je vyšší než v případě, že platby jsou vypláceny až na konci roku. Vyplacená částka je sice stejná, ale v případě čtvrtletních výplat jsou nám peníze dříve k dispozici.

6.1.2 Důchod bezprostřední předlhůtní

důchod bezprostřední

Nyní budeme chtít vypočítat počáteční hodnotu důchodu ***D´*** ve výši ***a*** Kč, vypláceného vždy počátkem úrokového období po ***n*** období při úrokové sazbě

i. Úrokové období je zde opět roční. Počáteční hodnota ***D´*** se rovná, stejně jako v případě důchodu bezprostředního polhůtního, součtu současných hodnot všech výplat důchodu.

Současnou hodnotu každé výplaty důchodu (anuity) vypočítáme podle vzorce *(4-1)* tak, že výplatu diskontujeme k výchozímu datu.

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je v případě předlhůtních výplat dán součtem konečné geometrické řady, kde

- a_1 = je první člen řady a
- $q = v$ je kvocient,
- $v=1/(1+i)$ je diskontní faktor.

$$D^{'} = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}5)$$

$D^{'}$ je počáteční (současná) hodnota důchodu,

a je pravidelná platba (anuita),

i je roční úroková míra,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Výraz:

$$a'^{i}_{n} = \frac{1-v^n}{i \cdot v} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (6\text{-}6)$$

se nazývá **zásobitel předlhůtní** a udává počáteční hodnotu jednotkové důchodové platby (anuity), vyplácené vždy počátkem úrokového období po ***n*** období při úrokové míře ***i***.

Ze srovnání vztahů *(6-2)* a *(6-5)* vyplývá, že počáteční hodnota předlhůtního důchodu bude za stejných podmínek vyšší než počáteční hodnota polhůtního důchodu, neboť hodnota diskontního faktoru ***v*** je menší než 1.

Vztah mezi počáteční hodnotou polhůtního a předlhůtního důchodu můžeme vyjádřit vztahem:

$$D' = D \cdot (1+i) = \frac{D}{v}\text{, nebo též } D = v \cdot D'\text{, kde} \qquad (6\text{-}7)$$

D' je současná hodnota předlhůtního důchodu,

D je současná hodnota polhůtního důchodu,

i je roční úroková míra,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Abychom ukázali rozdíl mezi předlhůtními a polhůtními důchody, uvedeme dále příklad se stejnými hodnotami jako pro důchod polhůtní.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.1.3

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a počátkem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16.000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5 % p.a.

Řešení příkladu

Zde se jedná o výpočet současné hodnoty předlhůtního důchodu. Dosadíme $a = 16.000$, $n = 20$, $i = 0{,}05$ a vypočítáme D' podle vzorce *(6-5)*:

$$D^{'} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 16.000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 209.365{,}13$$

Investujeme-li dnes částku 209.365,13 Kč, zajistí nám tato částka výplaty pravidelných částek podle požadovaných parametrů. *

Vzhledem k tomu, že známe vztah mezi současnou hodnotou polhůtního a současnou hodnotou předlhůtního důchodu, můžeme též využít výsledku z příkladu (6.1.1) a vztahu *(6-7)*, pak dostáváme:

$$D^{'} = D \cdot (1+i) = 199.395{,}37 \cdot 1{,}05 = 209.365{,}13$$

Dále je možno vyjádřit rozdíl současné hodnoty předlhůtního a současné hodnoty polhůtního důchodu. Rozdíl je dán rozdílem konečných geometrických řad, které vyjadřují současné hodnoty všech splátek důchodu předlhůtního a polhůtního, a činí $a \cdot (1-v^n) = 16.000 \cdot (1-(1/1{,}05^{20}))$, což je v našem příkladu 9.969,79 Kč.

Nyní budeme předpokládat, že důchod je vyplácen častěji než na konci či začátku úrokového období, a to na počátku každé m-tiny roku, kdy je vyplácena částka x Kč.

Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme vzorec *(6-2)* s tím, že místo částky *a* vypočítáme, stejně jako u důchodu bezprostředního polhůtního, jaká bude celková hodnota jednotlivých výplat důchodu i s úroky do konce úrokového období (roku). Použijeme vztah *(5-1)* pro krátkodobé spoření předlhůtní. Počáteční hodnota důchodu se pak vypočítá:

$$D' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \qquad (6\text{-}8)$$

kde

D' je počáteční (současná) hodnota důchodu,

m je počet stejných částí úrokového období (roku),

x je výše pravidelné platby (v rámci úrokového období je jich ***m***),

i je roční úroková míra,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Zde je vidět, že používáme zásobitel polhůtní, a nikoli předlhůtní, ačkoli jednotlivé výplaty důchodu jsou vypláceny na počátku každé *m*-tiny roku. Je to z toho důvodu, že podle vzorce *(5-1)* pro krátkodobé předlhůtní spoření vypočítáme vlastně výplatu důchodu, kterou bychom získávali na konci roku.

Zde opět, stejně jako u důchodu polhůtního, je třeba si uvědomit rozdíl mezi důchodem s roční výplatou anuit a důchodem s měsíční výplatou anuit.

V tomto případě hodnota investice, která nám přinese roční výnosy ve výši např. 12.000 Kč (tzn. počáteční hodnota důchodu s ročními výplatami ve výši 12.000 Kč) se bude lišit od hodnoty investice s měsíčními výnosy ve výši 1.000 Kč (tedy od počáteční hodnoty důchodu s měsíčními výplatami ve výši 1.000 Kč).

I když vyplacená částka bude stejná, přesto počáteční hodnota ve druhém případě, tj. při měsíčních výplatách, bude nižší, neboť splátky jsou poskytovány postupně v průběhu roku a ne najednou na jeho počátku.

6.2 Důchod odložený

Odložení důchodu znamená, že s jeho výplatou se nezačne ihned, ale až po uplynutí určitého počtu úrokových období, v našem případě ročních.

Uvažujeme tedy, že s výplatou důchodu se započne po k letech. Například člověk v produktivním věku investuje své volné finanční prostředky a za nějakou dobu (např. v důchodovém věku) začne na základě této již zhodnocené investice pobírat pravidelné platby.

Odložený důchod můžeme opět rozdělit podle toho, kdy dochází k výplatám důchodu:

- na **důchod odložený předlhůtní** a
- na **důchod odložený polhůtní**.

6.2.1 Důchod odložený polhůtní

Důchod odložený polhůtní je vyplácen:

- vždy **na konci** určitého časového intervalu

a jeho vyplácení je

- **odloženo** o $\boldsymbol{k}$ let.

Úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu takového důchodu, který je vyplácen po dobu $\boldsymbol{n}$ let při úrokové míře $\boldsymbol{i}$.

Využijeme poznatků o bezprostředním polhůtním důchodu. Víme, že počáteční hodnota $\boldsymbol{D}$ bezprostředního polhůtního důchodu ve výši a se vypočítá jako součet současných hodnot budoucích anuit.

U odloženého polhůtního důchodu je to stejné s tím rozdílem, že současnou hodnotu výplaty důchodu, která bude vyplacena v $\boldsymbol{j}$-tém roce splatnosti důchodu, vypočítáme tak, že hodnotu této výplaty $\boldsymbol{a}$ diskontujeme k výchozímu datu, což znamená, že diskontní faktor umocníme na $(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

Počáteční hodnota ***K*** odloženého polhůtního důchodu se pak pomocí vztahu *(6-2)* vypočítá:

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \qquad (6\text{-}9)$$

K je počáteční (současná) hodnota odloženého důchodu,

k je počet úrokových období (let), po která nejsou vypláceny anuity,

i je roční úroková míra,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

a je velikost anuity (pravidelné platby),

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Počáteční hodnota ***K*** odloženého polhůtního důchodu je vlastně diskontovaná počáteční hodnota ***D*** bezprostředního polhůtního důchodu k výchozímu datu (hodnota ***D*** je vynásobená diskontním faktorem, umocněným na ***k***-tou).

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.2.1

Máme k dispozici 30.000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4 % roční úrokové sazbě?

Řešení příkladu

Ze vztahu *(6-9)* vyjádříme anuitu (roční výplatu) ***a***, pak za jednotlivé veličiny dosadíme ***K*** = 30.000, ***k*** = 2, ***n*** = 5, ***i*** = 0,04 a vypočteme velikost anuity ***a***.

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \Rightarrow a = \frac{K \cdot i}{v^k \cdot (1 - v^n)} = \frac{30.000 \cdot 0{,}04}{\frac{1}{1{,}04^2} \cdot (1 - \frac{1}{1{,}04^5})} = 7.288{,}7$$

Vyplacená částka bude každý rok činit 7288,7 Kč. *

Není-li interval k vyplácení důchodu shodný s úrokovým obdobím a dochází-li k vyplácení důchodu **na konci** každé ***m***-tiny roku, vypočítáme stejně jako v případě bezprostředního důchodu polhůtního nejprve, kolik budou činit jednotlivé výplaty i s úroky do konce roku. Využijeme tedy vztah pro krátkodobé polhůtní spoření.

Počáteční hodnota odloženého polhůtního důchodu, který je vyplácen ***m***-krát do roka při úrokové sazbě ***i***, bude podle vztahů *(6-9)* a *(5-3)* dána vztahem:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}10)$$

K je počáteční (současná) hodnota odloženého důchodu polhůtního,

k je počet úrokových období (let), po která nejsou vypláceny anuity,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

m je počet stejných částí úrokového období (roku),

x je velikost anuity (pravidelné platby) m-krát do roka(nebo za úrokové období),

i je roční úroková míra,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.2.2

Jak velkou částku musíme dnes při neměnné úrokové sazbě 6 % p.a. uložit novorozenému dítěti, aby v 19 letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečoval po dobu 7 let (do 26 let věku) měsíční polhůtní důchod ve výši 3.000 Kč?

Řešení příkladu

Pro řešení využijeme vztah *(6-10)*, do něhož dosadíme za x = 3.000, n = 7, i = 0,06, k = 19, m = 12:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = 1{,}06^{-19} \cdot 12 \cdot 3.000 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}06) \cdot \frac{1-1{,}06^{-7}}{0{,}06} = 68.248{,}39$$

K zabezpečení měsíčních výplat ve výši 3.000 Kč, které se začnou vyplácet za 19 let a budou trvat 7 let, musíme dnes uložit 68.248,39 Kč. *

6.2.2 Důchod odložený předlhůtní

Vzhledem k tomu, že všechny úvahy jsou stejné jako pro důchod odložený polhůtní, uvedeme zde pouze základní vzorce.

Počáteční hodnota důchodu odloženého o ***k*** let, vypláceného po dobu ***n*** let vždy **na počátku roku** při úrokové sazbě ***i***, je dána vztahem:

$$K' = v^{k-1} \cdot a \cdot \frac{1-v^n}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}11)$$

K' je počáteční (současná) hodnota odloženého důchodu předlhůtního,

k je počet úrokových období (let), po která nejsou vypláceny anuity,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

a je velikost anuity (pravidelné platby),

i je roční úroková míra,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Srovnáním vztahů *(6-9)* a *(6-11)* zjistíme, že pro současnou hodnotu polhůtního odloženého důchodu a současnou hodnotu předlhůtního odloženého důchodu platí stejný vztah jako pro odpovídající důchody bezprostřední – vztah *(6-7)*:

$$K^{'} = K \cdot (1+i)\,.$$

V případě, že se důchod vyplácí předlhůtně m-krát za rok, a to ve výši x, bude počáteční hodnota takového důchodu vypočtena na základě vztahu pro krátkodobé spoření předlhůtní a vztahu pro vyjádření zásobitele polhůtního. Součin obou výrazů musíme ještě vynásobit diskontním faktorem mocněným na k-tou:

$$K^{'} = v^{k} \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-v^{n}}{i}\text{, kde} \qquad \textit{(6-12)}$$

$K^{'}$ je počáteční (současná) hodnota odloženého důchodu předlhůtního,

k je počet úrokových období (let), po která nejsou vypláceny anuity,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

m je počet stejných částí úrokového období (roku),

x je velikost anuity (pravidelné platby) m-krát do roka(nebo za úrokové období),

i je roční úroková míra,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

6.3 Důchod věčný

Důchod věčný je důchod, jehož **výplata není časově omezena**. Setkat se s ním můžeme u některých druhů cenných papírů (např. u tzv. konzoly, viz kap. 9), které nemají splatnost a majitel má nárok na výplatu důchodu po neomezenou dobu.

Podle toho, kdy jsou jednotlivé výplaty důchodu vypláceny, hovoříme o důchodu

- věčném předlhůtním a
- věčném polhůtním.

Ale stejně tak i důchod věčný může být

- bezprostřední a
- odložený.

Uvedeme tedy opět vztahy pro výpočet současné hodnoty pro jednotlivé typy věčného důchodu.

Současná hodnota věčného důchodu je částka, která nám, našim potomkům, jejich potomkům zajistí pravidelné výplaty důchodu, pokud ji investujeme při dané úrokové sazbě.

6.3.1 Důchod věčný polhůtní

Počáteční hodnotu ***D*** věčného důchodu vypočítáme jako limitu vztahu *(6-2)* pro počáteční hodnotu důchodu bezprostředního polhůtního:

$$D = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-v^n}{i} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{a}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}13)$$

D je počáteční (současná) hodnota důchodu,

a je pravidelná platba - anuita,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

i je roční úroková míra.

Bude-li o ***k*** let, musíme vztah *(6-13)* vynásobit diskontním faktorem, umocněným na ***k***-tou. Získáme tedy:

$$K = v^k \cdot \frac{a}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}14)$$

K je počáteční (současná) hodnota odloženého důchodu věčného,

a je pravidelná platba - anuita,

k je počet období (let), po která nejsou placeny anuity,

i je roční úroková míra,

v je diskontní faktor 1/(1+i).

Je-li věčný důchod vyplácen ***m***-krát za úrokovací období, nahradíme velikost roční výplaty a pomocí vztahu pro krátkodobé spoření předlhůtní, resp. polhůtní podle vztahů *(5-1)*, resp. *(5-2)* podle toho, kdy jsou prováděny jednotlivé výplaty.

Počáteční hodnota bude pro polhůtní případ dána vztahem:

$$D = \frac{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)}{i}, \text{ kde} \qquad (6\text{-}15)$$

D je počáteční (současná) hodnota věčného,

m je počet stejných částí úrokového období (roku),

x je velikost anuity (pravidelné platby) m-krát do roka(nebo za úrokové období),

i je roční úroková míra.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.3.1

Jaká částka nám (a našim pozůstalým) zajistí čtvrtletní polhůtní věčný důchod ve výši 5.000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 4 % p.a.?

Řešení příkladu

Dosadíme za jednotlivé veličiny $\boldsymbol{x}$ = 5.000, $\boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{i}$ = 0,04. Podle vztahu *(6-15)* platí:

$$D = \frac{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)}{i} = \frac{4 \cdot 5.000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}04)}{0{,}04} = 507.500$$

K tomu, aby bylo možno věčně získávat každé čtvrtletí částku 5.000 Kč, musíme při dané úrokové sazbě (míře výnosu) uložit (investovat) částku 507.500 Kč. *

6.3.2 Důchod věčný předlhůtní

Počáteční hodnota věčného důchodu předlhůtního se vypočítá podobně ze vztahu *(6-5)* pro současnou hodnotu bezprostředního důchodu předlhůtního pomocí limity jako v předchozím oddíle. Je vyjádřena vztahem:

$$D' = \lim_{n \to \infty} a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a + \frac{a}{i}\text{, kde} \qquad (6\text{-}16)$$

$D^{'}$ je počáteční (současná) hodnota důchodu,

a je pravidelná platba - anuita,

n je počet úrokových období (let), ve kterých jsou placeny anuity,

i je roční úroková míra.

Ostatní výpočty a odvození vycházejí z uvedeného vzorce a postupů z předchozího oddílu. Vidíme, že počáteční hodnota věčného předlhůtního důchodu se liší od počáteční hodnoty polhůtního důchodu pouze o první platbu a, která je vyplacena na počátku.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.3.2

Jak vysoká dnes složená částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního důchodu ročního ve výši 12.000 Kč od pětašedesáti let našeho věku , je-li nám dnes třicet let a uvažujeme investování při ne,měnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení příkladu

Jedná s eo výpočet současné hodnoty věčného důchodu předlhůtního odloženého. Dosadíme ***a*** = 12.000, ***k*** = 65-30=35, ***i*** = 0,05 a modifikujeme vztah *(6-16)*:

$$K^{'} = (1+i)^{-k} \cdot a \cdot (1+\frac{1}{i}) = 1{,}05^{-35} \cdot 12.000 \cdot (1+\frac{1}{0{,}05}) = 45.685{,}15$$

Dnes je nutné investovat částku 45.685,15 Kč. *

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.3.3

Za deset let (ve věku pětašedesáti let) hodláme odejít do důchodu. Kolik musíme koncem každého měsíce investovat do otevřeného podílového fondu dluhopisů s průměrnou roční 5 % úrokovou sazbou, abychom si zajistili až do osmdesáti let života jisté přilepšení ke starobnímu důchodu? Pravidelně si budeme chtít koncem každého čtvrtletí vybírat z účtu částku 5.000 Kč.

Řešení příkladu

Musíme porovnat hodnotu úspor, které získáme za deset let, s počáteční hodnotou důchodu, vypláceného po příštích patnáct let:

Spoření		**Důchod**	
m_1	12	m_2	4
n_1	10	n_2	15
i	0,05	i	0.05
x_1	?	x_2	5.000

Vyjdeme ze vztahu pro rovnost naspořené částky *(5-13)* na levé straně níže uvedené rovnice a ze vztahu pro počáteční hodnotu důchodu *(6-4)* na pravé straně:

$$m_1 \cdot x_1 \cdot (1 + \frac{m_1 - 1}{2 \cdot m_1} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} = m_2 \cdot x_2 \cdot (1 + \frac{m_2 - 1}{2 \cdot m_2} \cdot i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n_2}}{i},$$

$$12 \cdot x_1 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 4 \cdot 5.000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-15}}{0{,}05},$$

pak

$x_1 = 1.370$

Musíme po dobu deseti let koncem každého měsíce ukládat 1.370 Kč *

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6.3.4

Právě jste vyhráli v loterii. Můžete si vybrat mezi:

a) okamžitým získáním 380.000 Kč, nebo

b) po dobu pěti let dostávat 100.000 Kč.

Co je nyní výhodnější, můžeme-li peníze reinvestovat při úrokové sazbě 12% p.a.?

Řešení příkladu

Porovnáme současnou hodnotu důchodu s pravidelnými ročními platbami 100.000 Kč s okamžitě vyplacenou částkou 380.000 Kč. Protože není jasné, kdy budou částky 100.000 Kč placeny, vypočítáme jak současnou hodnotu polhůtního, tak předlhůtního důchodu.

Řešení pro polhůtní důchod:

dosadíme $\boldsymbol{a} = 100.000$, $\boldsymbol{n} = 5$, $\boldsymbol{i} = 0{,}12$. Podle vztahu *(6-2)* dostaneme

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 100.000 \cdot \frac{1-(1{,}12)^{-5}}{0{,}12} = 360.477{,}62.$$

Z výpočtu vidíme, že je lepší okamžitě získat částku 380.000 Kč, neboť současná hodnota výplat po 100.000 Kč na konci roku je nižší.

Řešení pro předlhůtní důchod:

Kdybychom však platby ve výši 100.000 Kč získávali vždy na začátku roku, byla by současná hodnota důchodu podle vztahu *(6-7)*:

$$D' = D \cdot (1+i) = 360.477{,}62 \cdot 1{,}12 = 403.734{,}93.$$

V tomto případě, nejsme-li schopni hotovost lépe investovat, je lepší získávat pravidelné platby ve výši 100.000 Kč. *

KONTROLNÍ OTÁZKA 6

1. Vysvětlete pojem důchod.
2. Vysvětlete pojmy bezprostřední a odložený důchod.
3. Vysvětlete, kdy se jedná o předlhůtní a kdy o polhůtní důchod.
4. Jaký je rozdíl mezi dočasným a věčným důchodem?

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 6

PŘÍKLADY:

1) Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední polhůtní důchod,

ve výši 36.000Kč po dobu 15 let při neměnné roční úrokové sazbě 4 %

2) Jaká je počáteční hodnota důchodu 9.000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu 15 let při neměnné roční úrokové sazbě 4 %.

3) Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední předlhůtní důchod ve výši 36.000 Kč po dobu 20 let při neměnné roční úrokové sazbě 3,5 %.

4) Jaká je počáteční hodnota důchodu 9.000 Kč, který se vyplácí na počátku každého čtvrtletí po dobu 15 let při neměnné úrokové sazbě 3,5 %.

7 ČASOVÁ HODNOTA PENĚZ A INVESTIČNÍ ROZHODOVÁNÍ

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY ČASOVÁ HODNOTA PENĚZ A INVESTIČNÍ ROZHODOVÁNÍ

V předchozí 8. kapitole jsme se zabývali pojmem *důchody* a vším, co s touto problematikou souvisí. Naučili jsme se rozeznat bezprostřední důchod od důchodu odloženého, důchod dočasný od důchodu věčného, stejně jako předlhůtní výplaty důchodu od polhůtních, ale i vzájemně kombinovat výplaty důchodu v průběhu úrokového období a připisování úroků pouze jednou za úrokové období.

V této kapitole bude naším cílem seznámit se s podmínkami i důležitými předpoklady adekvátního finančního rozpočtu. Mezi tyto patří správný odhad budoucích příjmů a výdajů včetně jejich správného umístění na časové ose.

Důležitou roli zde hrají daně z příjmů a odpisy. Zároveň si zde vysvětlíme důležité pojmy, jimiž jsou hodnotová rovnice, současná hodnota investice a vnitřní míra výnosnosti.

Tato kapitola bude rozdělena do tří podkapitol:

- Daně z příjmů, v níž se budeme zabývat rozdělením daní z příjmů, pojmem daňová sazba.
- Odpisy, kde se seznámíme nejen s obsahem tohoto pojmu, ale i s možnými metodami odpisů.
- Kritéria investičního rozhodování, jimiž jsou výnosnost, riziko a likvidita. Předtím si ale vysvětlíme a ukážeme na příkladech využití tzv. hodnotové rovnice, současné hodnoty a vnitřní míry výnosnosti.

CÍLE KAPITOLY ČASOVÁ HODNOTA PENĚZ A INVESTIČNÍ ROZHODOVÁNÍ

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět: • vysvětlit pojem daň z příjmů a její užití, • rozlišovat různé odpisové metody, • poznat, kdy se jedná o výhodnou a kdy nevýhodnou investici.	*Budete umět*

Získáte: • schopnost, kdy uplatnit daň z příjmů dle zařazení, • schopnost, kdy uplatnit odpis a který druh použít, • schopnost orientovat se při investičním rozhodování.	*Získáte*

Budete schopni: • sestavit a vypočítat hodnotovou rovnici, • spočítat současnou hodnotu, • vypočíst vnitřní míru výnosnosti.	*Budete schopni*

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 135 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY ČASOVÁ HODNOTA PENĚZ A INVESTIČNÍ ROZHODOVÁNÍ

Hodnota peněz,peněžní toky, investice, ocenění investice, daň z příjmů, daňová sazba marginální a průměrná, odpisy, současná hodnota investičního rozpočtu, hodnotová rovnice, vnitřní míra výnosnosti, výnosnost, riziko, likvidita, index rentability.

PRŮVODCE STUDIEM 7

Celá tato kapitola by měla vyústit ve schopnost posoudit výhodnost investování finančních prostředků v souvislosti s časem.

Rozhodování o výhodnosti navrhované investice je většinou velmi odpovědný úkol. Může trvat i několik let, než se firmě vrátí investované prostředky a projekt začne vykazovat zisk.

Jedním z důležitých předpokladů adekvátního finančního rozpočtu je správný odhad budoucích příjmů a výdajů včetně jejich správného umístění na časové ose.

Je proto velmi důležité správně předpovědět finanční toky spojené s investicí.

Velmi důležitou roli v investičním rozhodování mají:

- daně z příjmů a
- odpisy, v nichž se budeme zabývat různými metodami odpisů.

Investiční rozhodování ovlivňují i další faktory, jimiž jsou:

- současná hodnota investičního rozpočtu,
- vnitřní míra výnosnosti,
- index rentability,
- doba splatnosti.

7.1 Daně z příjmů

Daň je povinná zákonem určená platba do veřejného rozpočtu, která se vyznačuje neúčelovostí a neekvivalentností tzn. ukládá se jako jednostranná povinnost bez nároku plátce na plnění ze strany státu. Daně jsou placené pravidelně v určitých intervalech nebo při určitých okolnostech např. darování nebo dědění.

Charakteristický znak daní představuje jejich mimoekonomické donucení, jímž si státní moc prosazuje podíl na důchodech a majetku podřízených subjektů. Toto donucení mělo v historickém vývoji zjevnější či zastřenější formu, což je patrné i z různých názvů daní, pocházejících z otrokářské nebo feudální společnosti.

Pro posouzení ekonomického vlivu daní a jejich třídního dopadu je důležité **zjištění daňového zdroje**, tj. té složky prvotního rozdělení daňového důchodu, která je daní postihována. **Zdrojem daní** jsou tedy mzdy, důchody malovýrobců, zisk a renta; v krajních případech je postihován nejen výnos kapitálu, ale i sám kapitál.

Ekonomicky je daň formou redistribuce národního důchodu. Daň je jedním z příjmů **veřejných rozpočtů** , mezi které patří dále např. poplatky a půjčky. Poplatky jsou ekvivalentem za služby poskytované veřejným sektorem, půjčky jsou dobrovolné návratné platby poskytované za účelem získání úroku nebo uložení peněz, jednorázová daň je nazývána dávkou.

7.1.1 Rozdělení daní

V České republice upravuje daně ***Zákon č. 212/1992 Sb. o soustavě daní***, ***v platném znění***. Základní dělení daní je na:

- přímé a
- nepřímé.

Do přímých patří:

- daň z příjmů fyzických osob,
- daň z příjmů právnických osob,
- daň z nemovitostí,
- daň silniční,
- daň z dědictví,
- daň darovací,
- daň z převodu nemovitostí,

a do nepřímých:

- daň spotřební (z piva, vína, lihu, uhlovodíkových paliv a maziv, tabákových výrobků),
- daň z přidané hodnoty,

Daně k ochraně životního prostředí:

- nebyly sice doposud v ČR uzákoněny, ale vzhledem k harmonizaci těchto daní a návrhům ekologické daňové reformy v zemích Evropské unie, se předpokládá i u nás jejich brzké zavedení.

Zdaňovacím obdobím se rozumí kalendářní rok, nestanoví-li příslušný zákon jinak. Daň není možné vymáhat po uplynutí tří let od konce kalendářního roku, ve kterém měl poplatník nebo plátce povinnost podat přiznání nebo hlášení, případně dlužník srazit daň nebo zálohu na tuto daň.

Každá z výše uvedených daní, ať přímých či nepřímých, se dále dělí podle toho ***koho*** nebo ***čeho*** se týká.

Uvedeme jen jako příklad zařazení do daňových skupin pro daň dědickou.

Zařazení osob do skupin pro výpočet dědické daně:

- **sk. I.** příbuzní v řadě přímé a manželé,

- **sk. II.** příbuzní v řadě pobočné (sourozenci, synovci, neteře, strýcové a tety); manželé dětí (zeťové a snachy), děti manžela, rodiče manžela, manželé rodičů a osoby, které se zůstavitelem žily nejméně po dobu jednoho roku před převodem nebo smrtí zůstavitele ve společné domácnosti a které z tohoto důvodu pečovaly o společnou domácnost nebo byly odkázány výživou na zůstavitele,

- **sk. III.** ostatní právnické a fyzické osoby.

V následujícím odstavci si ukážeme **podrobné rozdělení všech daní**, ale v dalším se budeme zabývat již pouze daní z příjmů.

Daň z příjmů dělíme na:

- DPFO – daň z příjmů fyzických osob,
- DPPO – daň z příjmů právnických osob,
- společná ustanovení.

Daň z nemovitosti se skládá z daně z:

- pozemků,
- staveb.

Daň silniční je stanovena pro daň z:

- osobních automobilů,
- nápravy a ostatních vozů.

Dědická daň

- Rozdělení do skupin
- Sk.I-výše daně
- Sk.II-výše daně
- Sk.III-výše daně

Daň darovací

- Rozdělení do skupin
- Sk.I-výše daně
- Sk.II-výše daně
- Sk.III-výše daně

Daň z převodu nemovitostí

DPH se dělí na:

- služby,
- zboží.

Spotřební daň je stanovena pro:

- minerální oleje,
- líh,
- pivo,
- víno a meziprodukty,
- tabákové výrobky.

Daň z příjmů fyzických osob

Fyzické osoby (poplatníci), které mají na území naší republiky bydliště nebo se zde převážně zdržují (alespoň 183 dnů), mají povinnost zaplatit daň z příjmů. Tato daň se vztahuje jak na příjmy plynoucí ze zdrojů na území ČR, tak i ze zahraničí.

Předmětem daně se stávají příjmy:

- ze závislé činnosti a funkční požitky (**§6**),
- z podnikání a z jiné samostatné výdělečné činnosti (**§7**),
- z kapitálového majetku (**§8**),
- z pronájmu (**§9**) a
- ostatní příjmy (**§10**).

Veškeré příjmy mohou být buď peněžní nebo nepeněžní (např. dosažené směnou).

Do předmětu daně nepatří:

- úvěry a půjčky s výjimkou, která je uvedena v zákoně (**§3**);
- příjmy z rozšíření nebo zúžení společného jmění manželů (Občanský zákoník **§143**);
- příjem od České republiky na základě přiznání Evropským soudem pro lidská práva;
- příjmy získané nabytím akcií nebo podílových listů dle zvláštního předpisu a jiné příjmy uvedené v zákoně.

V **§4** jsou uvedeny veškeré příjmy, které jsou **osvobozeny od daně**:

- ceny ze soutěží, které **nepřesahují 10.000Kč**. Výjimkou jsou ceny ze sportovních soutěží u poplatníků, kteří mají sportovní činnost jako předmět podnikání;
- penze, která **nepřesahuje 144.000Kč** ročně;

- dávky sociální péče, státní sociální podpory a státní dávky upravené zvláštními předpisy,
- stipendia,
- příjem z prodeje bytu nebo rodinného domu včetně souvisejícího pozemku v případě, že zde měl prodávající bydliště nejméně 2 roky před prodejem nebo pokud doba mezi nabytím a prodejem nepřesáhne pět let,
- dotace, granty a příspěvky na pořízení hmotného majetku, jeho technické zhodnocení nebo na odstranění následků živelné pohromy. Výjimkou jsou dotace a příspěvky, které se účtují do příjmů dle zvláštního právního předpisu.

Více ve výše uvedeném zákoně.

Daň z příjmů právnických osob

Poplatníky se stávají organizační složky státu dle zvláštního předpisu i všechny osoby, které nejsou osobami fyzickými.

Od daně je zcela osvobozena ústřední ***banka České republiky***.

Daňovou povinnost vztahující se na příjmy plynoucí ze zdrojů na území ČR i ze zahraničí mají poplatníci se sídlem nebo místem svého vedení (řízení poplatníka) na území České republiky.

Za **zdaňovací období** se počítá:

- kalendářní nebo hospodářský rok, dále pak
- období od rozhodného dne fúze, převodu jmění na společníka nebo rozdělení obchodní společnosti či družstva, a to do konce kalendářního či hospodářského roku, ve kterém byly fúze, převod jmění na společníka nebo rozdělení zapsány v obchodním rejstříku,
- účetní období, jestliže je delší než nepřetržitě po sobě jdoucích dvanáct měsíců.

Předmětem daně **jsou**

- příjmy z veškeré činnosti a z nakládání s majetkem, není-li v zákoně stanoveno jinak.

Mezi předmět daně nově **nepatří**

- příjmy, které plynou z titulu spravedlivého zadostiučinění či smírného urovnání záležitosti přiznaného Evropským soudem pro lidská práva ve výši, kterou je ČR povinna uhradit,

- příjmy, které se získaly nabytím akcií dle zvláštního zákona (92/1991 Sb.), zděděním nebo darováním nemovitosti, movité věci nebo majetkového práva s výjimkou příjmů z nich plynoucích. Ostatní ustanovení jsou uvedeny v zákoně.

Od daně jsou **nově osvobozeny příjmy:**

- z cenově regulovaného nájemného z bytu, nájemného, garáží a úhrad za plnění poskytovaná s užíváním těchto bytů a garáží v domech ve vlastnictví a spoluvlastnictví bytových družstev, zřízených po roce 1985, na jejichž výstavbu byla poskytnuta finanční, úvěrová a jiná pomoc dle zvláštních právních předpisů,

- z nájemného z bytů a garáží v domech, které jsou ve vlastnictví a spoluvlastnictví bytových družstev (dříve „lidová bytová družstva“), z nájemného z bytů a garáží užívaných společníky nebo členy poplatníků, vzniklých proto, aby se stali vlastníky domů, a z úhrad za plnění poskytovaná s užíváním uvedených bytů a garáží, a to za předpokladu, že u nájemného z bytů budou dodržena pravidla regulace nájemného z bytů platná do 17.12.2002 týkající se uvedených bytů, pokud zvláštní právní předpis nestanoví pravidla jiná,

- plynoucí z odpisu závazků při vyrovnání nebo při nuceném vyrovnání, jestliže jsou dle zvláštního právního předpisu zaúčtovány ve prospěch výnosů,

- poplatníků, kteří nejsou založeni nebo zřízeni za účelem podnikání, které jim plynou jako odvod části výtěžku loterií a jiných podobných her povolených podle zvláštního právního předpisu.

7.1.2 Daňová sazba

Jak jsme již v předchozím textu zdůraznili, daně z příjmů jsou důležitou součástí daňového systému každého státu, který může navíc obsahovat další přímé daně (např. daň z nemovitostí či jejich převodu, daň z dědictví a darování, silniční daň aj.) nebo nepřímé daně (daň z přidané hodnoty, spotřební daň např. z tabákových výrobků aj.).

Daňová sazba je poměr odváděné daně a zdanitelného příjmu. Rozlišujeme v této souvislosti dva druhy pojmů:

- **průměrná daňová sazba**, která je poměrem celkové výše odváděné daně k celkové výši zdanitelného příjmu;

- **marginální daňová sazba**, která se při dané výši příjmu platí z jednotkového přírůstku tohoto příjmu (tj. z každé koruny navíc).

Než si uvedeme výše daňových sazeb, je nutné seznámit se s pojmem ***základ daně***, neb na tento základ se pak uplatní příslušná daňová sazba.

Základ daně

Základem daně fyzických osob se stává částka, která se získá ***sečtením příjmů a odečtením prokazatelných výdajů dle* §6 *až* §10** a to za zdaňovací období, čímž je **kalendářní rok**.

Nezdanitelná část základu daně, tj.odpočitatelné hodnoty z příjmu znamená, že příjem se **sníží** o částky uvedené v přehledu:

- na poplatníka o 38.040,
- na dítě o 25.560,
- na manželku(manžela) o 21.720,
- částečný invalida o 7.140,
- plný invalida o 14.280,
- držitel průkazu ZTP/P 50.040.

Dále pak do tzv. daňově uznatelných a tudíž odpočitatelných položek patří:

- platby poplatníka na jeho **penzijní připojištění** se stáním příspěvkem. Jedná se o úhrn příspěvků poplatníka a státu snížený o **6.000Kč**, maximální výše však činní 12.000Kč;

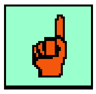
- zaplacené členské příspěvky poplatníka, který je členem odborné organizace. Lze však odečíst pouze částku do výše **1,5%** zdanitelných příjmů, s výjimkou příjmů, které jsou zdaněny srážkou podle zvláštní sazby daně. Maximální výše je ale 3.000Kč za zdaňovací období;

- hodnotu daru poskytnutého obcím, krajům, organizačním složkám státu, právnickým osobám se sídlem na území ČR, pořadateli veřejných sbírek, fyzickým osobám s bydlištěm na území ČR dle ustanovení v zákoně (§15). Úhrnná hodnota darů musí ve zdaňovacím období musí být mezi **2 a 10%** základu daně nebo činit minimálně **1.000Kč**;

- **2.000Kč** za jeden odběr krve bezpříspěvkového dárce,

- úroky zaplacené z úvěru ze stavebního spoření, z hypotečního úvěru poskytnutého bankou nebo pobočkou zahraniční banky sníženým o státní příspěvek, úvěr poskytnutého stavební spořitelnou, bankou nebo pobočkou zahraniční banky ve spojení s úvěrem ze stavebního spoření nebo s hypotečním úvěrem. Tento úvěr musí být použit na financování bytových potřeb, které nejsou určeny k podnikatelské jiné výdělečné činnosti nebo pro účely pronájmu. Odpočitatelná částka však **nesmí překročit 300.000Kč** za všechny poplatníky v téže domácnosti. Splácení úroku jen po část roku se krátí dle měsíců (1/12).

Sazba daně závisí na výši základu pro výpočet daně po všech odpočtech nezdanitelných položek.



Základ daně a daňová sazba

od Kč	do Kč	daň	ze základu přesahujícího Kč
0	109.200	15 %	
109.200	218.400	16.380+20%	109.200
218.400	331.200	38.220+25%	218.400
331.200	a více	66.420+32%	331.200

Jak je odtud patrno, potrestán je každý, kdo čím více vydělává, tím větší procento na dani z příjmu zaplatí.

Základ daně pro právnické osoby

Základem daně je rozdíl, o který příjmy, s výjimkou příjmů, které nejsou předmětem daně, a příjmů osvobozených od daně, převyšují výdaje (náklady), a to při respektování jejich věcné a časové souvislosti v daném zdaňovacím období, upravený podle následujících odstavců.

Pro zjištění základu daně se vychází:

a) **z výsledku hospodaření** (zisk nebo ztráta), a to vždy bez vlivu Mezinárodních účetních standardů, u poplatníků, kteří vedou účetnictví. Poplatník, který sestavuje účetní závěrku podle Mezinárodních účetních standardů, pro tyto účely použije k zjištění výsledku hospodaření zvláštní právní předpis. Pro zjištění základu daně veřejné obchodní společnosti a komanditní společnosti se vychází z výsledku hospodaření upraveného o převod podílů na výsledku hospodaření společníkům veřejné obchodní společnosti nebo komplementářům komanditní společnosti,

b) **z rozdílu mezi příjmy a výdaji** u poplatníků, kteří nevedou účetnictví.

Sazba daně pro právnické osoby

Sazba daně činí

- **24 %,** pokud není stanoveno jinak. Tato sazba daně se vztahuje na základ daně snížený o položky podle § 34 a § 20 odst. 7 a 8 zákona uvedeného v podkapitole 9.1.1, který se zaokrouhluje na celé tisícikoruny dolů,

- **5 %**

a) u investičního fondu. Tato sazba daně se vztahuje na základ daně snížený o položky podle § 34, který se zaokrouhluje na celé tisícikoruny dolů, a

b) u podílového fondu. Tato sazba daně se vztahuje na základ daně snížený podle § 20 odst. 3, který se zaokrouhluje na celé tisícikoruny dolů.

- **15 %** u penzijního fondu. Tato sazba daně se vztahuje na základ daně snížený o položky podle § 34, který se zaokrouhluje na celé tisícikoruny dolů.

Sazba daně 15 % se vztahuje na samostatný základ daně podle § 20b zaokrouhlený na celé tisícikoruny dolů.

U investičního fondu, který v průběhu zdaňovacího období ukončil činnost, se použije sazba daně 5 % jen na část základu daně stanoveného podle § 20a. Obdobně se postupuje u akciové společnosti, ze které v průběhu zdaňovacího období vznikl investiční fond.

Základní sazba daně pro právnické osoby platná pro rok:

- 2004 28 %,
- 2005 26 %,
- 2006 24 %.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7.1.1

Jaká je v České republice v roce 2004 marginální a jaká průměrná daňová sazba pro fyzickou osobu s ročním příjmem ve výši 240 000 Kč?

Řešení příkladu

Marginální daňová sazba je podle odstavce o daňové sazbě fyzických osob zřejmě **25%**, tj. z každé 1 Kč nad 218.400 Kč se odvede daň 0,25 Kč.

Přitom **absolutní výše daně** je hodnota, kterou skutečně tato fyzická osoba zaplatí, tj.:

$$38.220+0,25*(240.000-218.400) = 46.220$$

Potom průměrná daňová sazba je:

$$46.220/240000 = 0,18175,$$

což znamená sazbu ve výši 18,175 %.

*

Platí, že pro libovolný příjem **nemůže průměrná daňová sazba překročit odpovídající marginální sazbu** a obvykle je nižší (jako v předcházejícím příkladu pro příjem 240.000Kč je průměrná daňová sazba 18,175 %, zatímco marginální sazba je 25 %).

7.2 Odpisy

Odpisy jsou v České republice vymezeny zákonem o daních příjmů uvedeným v podkapitole 7.1.1.

Odpisy jsou peněžním vyjádřením postupného opotřebení investičního majetku hmotného i nehmotného charakteru (např. stroje, budovy, software, technické znalosti).

Investor (např. podnik) je fakticky získává jakou součást (jednu z nákladových položek) peněžních příjmů (tržeb) v průběhu ekonomického využívání investice (peněžní příjmy jsou tvořený čistým ziskem a odpisy). Dostane tak nazpět hodnotu investičního majetku, kterou může použít např. pro jeho obnovu či rozšíření (z tohoto pohledu jsou odpisy stabilním zdrojem interního financování podniku).

Důležitou roli však odpisy hrají také z daňového hlediska, neboť tvoří součást peněžních příjmů nepodléhající zdanění.

Rozlišují se přitom

- **účetní odpisy**, které by se měly co nejvíce blížit skutečnému opotřebení investičního majetku, a

- **daňové odpisy**, které se řídí daňovým zákonem.

Odpisy se stanoví z hmotného majetku , jímž se rozumí:

a) samostatné movité věci, popřípadě soubory movitých věcí se samostatným technicko-ekonomickým určením, jejichž vstupní cena (§ 29) je vyšší než 40.000 Kč a mají provozně-technické funkce delší než jeden rok,

b) budovy, domy a byty nebo nebytové prostory vymezené jako jednotky zvláštním předpisem,

c) stavby, s výjimkou
   1. provozních důlních děl,
   2. drobných staveb na pozemcích určených k plnění funkcí lesa, sloužících k zajišťování provozu lesních školek nebo k provozování myslivosti, pokud jejich zastavěná plocha nepřesahuje 30 m^2 a výšku 5 m,
   3. oplocení sloužícího k zajišťování lesní výroby a myslivosti, které je drobnou stavbou,

d) pěstitelské celky trvalých porostů s dobou plodnosti delší než tři roky vymezené v odstavci 9,

e) základní stádo a tažná zvířata,

f) jiný majetek vymezený v zákoně.

Hmotným majetkem pro účely tohoto zákona však **nejsou zásoby**.

Za samostatné movité věci se považují také výrobní zařízení, jakož i zařízení a předměty sloužící k provozování služeb (výkonů) a účelová zařízení a předměty, která s budovou nebo se stavbou netvoří jeden funkční celek, i když jsou s ní pevně spojeny.

7.2.1 Metody odpisů

Odpisová metoda určuje rozložení odpisů během odpisové doby. Ovlivňuje ji celá řada faktorů, především:

- vstupní cena investičního majetku (a případně jeho zbytková hodnota, která se již dále neodepisuje);
- odpisová doba;
- odpisová strategie (zrychlení odpisů v prvních letech investice umožní vzhledem k menším daňovým odvodům brzy nashromáždit velké částky k případnému rozšíření nebo rychlé obnově této investice; počáteční zpomalení odpisů je naopak vhodné v situaci, kdy investor v pozdějších letech investice může vzhledem k její úspěšnosti přecházet do vyšších daňových kategorií).

Rovnoměrné (lineární) odpisové metody odpisují rovnoměrně stejné odpisové procento ze vstupní ceny po celou odpisovou dobu.

Např. při 4leté odpisové době a vstupní ceně 300.000 Kč se každý rok odepíše 300/4 = 25% ze vstupní ceny, tj. 75.000 Kč. Předností této metody je jednoduchost a přehlednost.

Zrychlené (akcelerační, degresivní) odpisové metody odpisují částky postupně klesajícím trendem během odpisové doby. Umožňují rychlejší tvorbu finančních zdrojů. Patří sem např.:

- **metody klesající bilance:** odpisují stejné odpisové procento ze zůstatkové ceny, což je vstupní cena zmenšená o dosavadní odpisy. Např. při tzv. dvojité degresi se 4letou odpisovou dobou a vstupní cenou 300.000 Kč se každý rok odepíše 600/4 = 50% ze zůstatkové ceny, tj. postupně 150.000 Kč, 75.000 Kč, 37.500 Kč a 18.750 Kč. Jejich nevýhodou je, že při nich není odepsána celá vstupní cena (v našem příkladu zůstala neodepsána částka 18.750 Kč),

- **digitální metody (metody kumulativního souhrnu čísel):** roční odpisy zde klesají rovnoměrně o stejné absolutní částky. Např. při 4leté odpisové době a vstupní ceně 300 000 Kč se postupně odpisují 1.200.000/10 = 40%, 900.000/10 = 30%, 600.000/10 = 20% a 300.000/10 = 10% vstupní ceny (desítka ve jmenovateli vznikla jako součet čísel 1 + 2 + 3 + 4, výraz 1.200.000/10 jako 300.000 * (4/10), výraz 900.000/10 jako 300.000 * (3/10) atd.), tj. 120.000 Kč, 90.000 Kč, 60.000 Kč a 30.000 Kč.

Pozn. 7.2.1. Kromě uvedených metod se někdy používají také progresivní odpisové metody, při nichž odpisové částky postupně rostou, a různé nerovnoměrné odpisové metody (např. kombinace metody klesající bilance v prvních letech odpisové doby a digitální metody v pozdějších letech).

U nás v případě daňových odpisů (stav v roce 2004):

- investiční majetek se dělí do 6 odpisových skupin s různými odpisovými dobami

  1. 4 roky,

  2. 6 let,

  3. 12 let,

  4. 20 let,

  5. 30 let,

  6. 50 let.

- Poplatník provádí rovnoměrné (§ 31) nebo zrychlené odpisování (§32). Způsob odpisování pro každý nově pořízený hmotný majetek stanoví vlastník, s výjimkou uvedenou v odstavci 12, a nelze jej změnit po celou dobu jeho odpisování.

- Hmotný majetek se odpisuje nejvýše do vstupní ceny nebo do zvýšené vstupní ceny.

- Pronajímaný hmotný movitý majetek u finančního pronájmu s následnou koupí najatého hmotného majetku lze odepsat až do 90 % vstupní ceny rovnoměrně po dobu trvání pronájmu za předpokladu, že doba pronájmu trvá alespoň 40 % doby odpisování stanovené v odstavci 1, nejméně však 3 roky. Při prodloužení doby pronájmu nad 40 % doby odpisování je možno odepsat za každé jedno procento doby odpisování další jedno procento vstupní ceny nad 90 % až do 100 % vstupní ceny.

Při rovnoměrném odpisování hmotného majetku jsou odpisovým skupinám přiřazeny tyto **maximální roční odpisové sazby**:

Odpisová skupina	v prvním roce odpisování	v dalších letech odpisování $C_{n_0} \cdot v^{n_0}$	pro zvýšenou vstupní cenu
1.	14,2 %	28,6 %	25,0 %
2.	8,5 %	18,3 %	16,7 %
3.	4,3 %	8,7 %	8,4 %
4.	2,15 %	5,15 %	5,0 %
5.	1,4 %	3,4 %	3,4 %
6.	1,02 %	2,02 %	2,0 %

- Při rovnoměrném odpisování se stanoví odpisy hmotného majetku za dané zdaňovací období ve výši jedné setiny součinu jeho vstupní ceny a přiřazené roční odpisové sazby. Poplatník může na základě svého rozhodnutí použít i sazby nižší než maximální sazby uvedené v tomto odstavci;

- odpisová procenta pro první rok jsou pro jednoduchost stanovena záměrně nižší, aby nebylo nutné sledovat, v které části roku byl majetek pořízen;

- pro rovnoměrné odpisování je předepsána rovnoměrná odpisová metoda s odpisovými procenty ze vstupní ceny.

7.3 Investiční rozhodování

Kritéria investičního rozhodování

V rámci investičního rozhodování se posuzují především tři základní kritéria mající obvykle navzájem protichůdné tendence (zlepšení jednoho má za následek zhoršení jiného), takže v praxi je nutné najít vhodný kompromis:

- výnosnost,
- riziko,
- likvidita.

S těmito pojmy investičního rozhodování úzce souvisí pojmy:

- současná hodnota,
- vnitřní míra výnosnosti,
- index rentability a
- doba splatnosti.

7.3.1 Současná hodnota

Současná hodnota (*PV = Present Value*) je v této kapitole míněna hodnota systému peněžních toků vztažených k referenčnímu datu, které leží časově před všemi platbami systému (všechny platby se tedy diskontují).

Název současná hodnota vychází z toho, že příslušné referenční datum se většinou chápe jako současná časová pozice (všechny peněžní toky se tedy týkají přítomnosti nebo budoucnosti). Současná hodnota se vypočte pak podle vzorce

$$PV = \sum_{k=0}^{K} \frac{C_{n_k}}{(1+i)^{n_k}} = \sum_{k=0}^{K} C_{n_k} \cdot v^{n_k} = C_{n_0} \cdot v^{n_0} + C_{n_1} \cdot v^{n_1} + \ldots + C_{n_K} \cdot v^{n_K}, \qquad (7\text{-}1)$$

kde

PV je současná hodnota,

C_{n_k} je peněžní tok (příjem, je-li $C_{n_k} \succ 0$ nebo výdaj, je-li $C_{n_k} \prec 0$) realizovaný od dnešního dne za n_k ročních období,

i roční úroková míra (míra zisku) pro daný systém peněžních toků,

$$v = \frac{1}{1+i} \text{ je diskontní faktor.}$$

Pravidlo současné hodnoty:

je-li ***PV>0***, pak **investuj,**

je-li ***PV<0***, pak **neinvestuj,**

je-li ***PV~0***, potom investici nelze doporučit ani zamítnout.

PV musí být vypočtena pro míru zisku běžně dosažitelnou na kapitálovém trhu v rámci investic se srovnatelnými parametry:např. důvodem pokynu „investuj“ v prvním případě je pak právě dosažení kladného diskontovaného výnosu ve srovnání s jinými běžnými investicemi.

Pokud *PV* nabývá poměrně značné kladné hodnoty, lze na základě pravidla současné hodnoty považovat danou investici za výhodnou: při průměrných cenách kapitálu tato investice nejen pokryje kapitálové výdaje, ale zaručí i slušný (diskontovaný) investiční výnos.

Někdy se také počítá tzv. ***index současné hodnoty*** jako **poměr diskontovaných příjmů k diskontovaným výdajům**, který se pak porovnává s jednotkovou hodnotou (tento postup je zřejmě ekvivalentní s použitím pravidla současné hodnoty)

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7.3.1

Majitel realitní kanceláře koupí na konci roku 2001 dům za 3.000.000 Kč (očekává růst inflace projevující se mimo jiné v růstu cen nemovitostí). Nepočítá s příjmem z nájmu, ale očekává, že na konci roku 2003 vynese prodej domu po daňových odpočtech čistou částku 4.000.000 Kč. Protože měl také jinou investiční příležitost slibující čistou reálnou roční míru zisku 15 %, požaduje přirozeně, aby se mu koupě domu zhodnotila alespoň v této výši. Oceňte koupi domu na základě pravidla současné hodnoty, jestliže víte, že míra inflace za rok 2002 byla 3,1 % a za rok 2003 byla 3,5 %.

Řešení příkladu

Pro výpočet současné hodnoty použijeme čistou nominální úrokovou míru, kterou vypočítáme pomocí vzorce *(3-3)*, tj. tzv. Fisherovy rovnice v kapitole 6.

$$i = i_r + i_i + i_r \cdot i_i$$

nebo můžeme použít původní vztah

$$i = (1 + i_r) \cdot (1 + i_i) - 1$$

Podle vztahu *(3-3)* dostaneme:

pro rok 2002

i=0,15+0,031+0,15*0,031=0,18565, tj. 18,565 %

pro rok 2003

i=0,15+0,035+0,15*0,035=0,19025, tj. 19,025 %.

Podle vzorce *(7-1)* pro C_0=-3.000.000, C_1=0, C_1=4.000.000 je pak

$$PV = -3.000.000 + \frac{0}{1+0{,}18565} + \frac{4.000.000}{(1+0{,}18565)\cdot(1+0{,}19025)} = -165.573$$

Koupě domu je tedy ve srovnání s jinou zmíněnou investiční příležitostí nevýhodná (byla by výhodná, kdyby např. pořizovací cena domu byla aspoň o 500.000 Kč levnější nebo pozdější prodejní cena byla dražší o např. 400.000 Kč, jak lze snadno ověřit).

Koncová hodnota (FV = Future Value) je hodnota systému peněžních toků vztažených k referenčnímu datu, které leží časově za všemi platbami systému (všechny platby se tedy zúročí).

*

7.3.2 Hodnotová rovnice

Hodnotová rovnice se sestaví porovnáním peněžních toků vztažených k vhodně zvolenému referenčnímu datu a řeší se vzhledem k příslušné neznámé.

Jako příklad použití hodnotové rovnice uvedeme např.:

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7.3.2

V dědické závěti otec stanovil, že v případě jeho smrti bude převedena částka 10.000.000 Kč do zvláštního fondu investovaného s úrokovou sazbou 10 % se čtvrtletním úročením, ze kterého každé ze tří dětí dostane při dosažení věku 19 let stejný podíl. Jaký je tento podíl, když v okamžiku smrti otce bylo stáří dětí 9, 12 a 13 let?

Řešení příkladu

Nechť x označuje výši vypláceného podílu a jako referenční datum zvolme okamžik smrti otce, kde $t_1=10$ let, $t_2=7$ let, $t_3=6$ let.

Příslušná hodnotová rovnice má pak tvar

$$10.000.000 = \frac{x}{(1+\frac{0,1}{4})^{4\cdot 10}} + \frac{x}{(1+\frac{0,1}{4})^{4\cdot 7}} + \frac{x}{(1+\frac{0,1}{4})^{4\cdot 6}}\text{, pak}$$

dostaneme x = 7.011.719.

Každé ze tří dětí při dosažení věku 19 let dostane částku 7.011.719 Kč.

7.3.3 nitřní míra výnosnosti

Vnitřní míru výnosnosti (vnitřní výnosové procento, výnosové procento, IRR = Internal Rate of Return) je míra zisku $\boldsymbol{i}^*$, při níž je

- současná hodnota daného systému peněžních toků nulová, tj.
- diskontované příjmy se rovnají diskontovaným výdajům.

Vnitřní míra výnosnosti se nalezne jako řešení rovnice (značení je stejné jako v *(7-1)*

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{C_{n_k}}{(1+i^*)^{n_k}} = 0$$

Pravidlo vnitřní míry výnosnosti:

je-li $i^{*}>i$ a zároveň PV je klesající funkcí míry zisku, pak **investuj,**

je-li $i^{*}<i$, zároveň PV je rostoucí funkcí míry zisku pak **neinvestuj!**

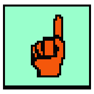
Opět předpokládáme, že ***i*** je míra zisku běžně dosažitelná na kapitálovém trhu v rámci investic se srovnatelnými parametry: důvod k pokynu „investuj“ je pak stejný jako v případě kritéria současné hodnoty, neboť při splnění výše uvedených předpokladů je zřejmě PV > 0.

Pozn. 7.3.1 Obecná aplikace pravidla vnitřní míry výnosnosti je bohužel problematická, neboť současná hodnota se jako funkce míry zisku může chovat různě.

Pozn. 7.3.2 V řadě investičních projektů bývá $C_{no} = C_o<0$, $C_{n1}>0,\ldots, C_{nk} >0$, což může nastat v případě investování do cenných papírů, kdy po počátečním jednorázovém výdaji na zakoupení cenných papírů následuje už jen posloupnost příjmů, které tyto papíry zhodnocují.

Pozn. 7.3.3 Výpočet $i*$ není zcela jednoduchý. Většinou musíme použít finanční kalkulátor, finanční software tabulkových procesů nebo jednoduše metodu pokusů a omylů.

7.3.4 Doba splatnosti (návratnosti)



Doba návratnosti (nebo též říkáme doba splatnosti, doba úhrady) je doba, za kterou postupně kumulované příjmy uhradí celkové výdaje, což jinými slovy znamená investovaný kapitál.

Pravidlo doby návratnosti investice znamená, že nejlepší je ta investice, která má nejkratší dobu návratnosti (splatnosti).

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7.3.3

Podnikatel investoval 100.000 Kč do nákupu počítače s předpokládanou životností 4 roky. Jeho příjmy za první rok byly 30.000 Kč, za první dva roky 78.000 Kč a za první tři roky nechť činily jeho příjmy 127.000 Kč.

Řešení příkladu

Jelikož celkové výdaje má podnikatel jen ve výši nákladu na koupi počítače, tj. 100.000 Kč, vidíme vzhledem k dosahovaným příjmům, že doba splatnosti investice bude mezi 2. a 3. rokem.

Délku návratnosti necelé části roku této investice proto spočítáme:

$$\frac{100.000-78.000}{127.000-78.000}=0{,}44898\,.$$

Doba návratnosti investice je asi 2,45 roku. *

7.3.5 Kritéria investičního rozhodování

Pro investiční rozhodování je nutné posuzovat ve vzájemných souvislostech tři parametry:

- Výnosnost
- Riziko
- Likvidita

Tato tři základní kritéria se obvykle znázorňují graficky do trojúhelníku, kterému pak říkáme ***investiční trojúhelník.*** Tyto tři veličiny mají obvykle navzájem protichůdné tendence (zlepšení jednoho má za následek zhoršení jiného), takže v praxi je nutné najít vhodný kompromis.

Výnosnost

K ocenění investiční výnosnosti se používá např.:

- úroková míra nebo míra zisku,
- pravidlo současné hodnoty,
- pravidlo vnitřní míry výnosnosti,
- pravidlo doby návratnosti.

Riziko

Riziko je stupeň nejistoty očekávaných výnosů z investice:

- měří se především pomocí metod teorie pravděpodobnosti a statistiky,
- udávají se různé stupnice rizika investic jednotlivých typů, např. od téměř bezrizikových k silně rizikovým, jimiž jsou

  a) nemovitosti, drahé kovy, starožitnosti, sbírky,
  b) státní pokladniční poukázky, úročené peněžní vklady se státní garancí,
  c) státní a komunální obligace,
  d) depozitní certifikáty, podílové listy, pojistky a renty,
  e) podnikové obligace,
  f) směnky, finanční spoluúčast, prioritní akcie,
  g) obyčejné (kmenové) akcie,
  h) termínové obchody.

Likvidita

Likviditou nazveme rychlost, s jakou lze přeměnit investici zpět v hotové peněžní prostředky:

- souvisí např. s tím, jak pohotově je investor schopen splácet své závazky,

- udávají se opět různé stupnice likvidity, např. od nejvíce k nejméně likvidním:

  a) peněžní prostředky (tuzemské, devize, valuty),

  b) zlato, vklady, pokladniční poukázky

  c) depozitní certifikáty, obligace a akcie kótované na burze,

  d) obligace a akcie nekótované na burze, podílové listy,

  e) nepřevoditelné akcie či jiné cenné papíry, nemovitosti, starožitnosti, sbírky, finanční spoluúčast, podnikatelské projekty.

KONTROLNÍ OTÁZKA 7

1. Vysvětlete pojem daně.
2. Vysvětlete pojem odpisy.
3. Vysvětlete, co je nutné mít na zřeteli při investičním rozhodování.
4. Co to je likvidita?

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 7

PŘÍKLADY:

1) Oceňte investici do počítače z příkladu 7.3.3 pomocí pravidla pro současnou hodnotu, jestliže dále víte, že podnikatel dosáhl za 4. rok příjmů ve výši 62.000 Kč a na kapitálovém trhu lze zhodnocovat průměrně ročně kapitál s mírou zisku 0,06.

2) Oceňte tutéž investici z předcházejícího příkladu na základě pravidla vnitřní míry výnosnosti

8 RIZIKO VE FINANČNÍ MATEMATICE, FINANČNÍ A ČASOVÉ ŘADY

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY RIZIKO VE FINANČNÍ MATEMATICE

V této 8. kapitole bude naším cílem seznámit se s pojmem *riziko* ve finanční matematice.

V této kapitole však jen velmi stručně uvedeme, jak se riziko ve financích měří a jak se tento nástroj využívá při investování do finančních portfolií. Tato problematika je obsahem samotného předmětu o časových řadách.

Riziko obecně je velmi široký pojem, který užíváme nejen ve finanční matematice, ale stejně tak i v pojistné matematice a v pojišťovnictví vůbec.

Tato kapitola je rozdělena do čtyř podkapitol:

- V první se budeme zabývat definicí rizika obecněji.
- Druhá podkapitola bude popisovat finanční riziko.
- Ve třetí podkapitole si vysvětlíme nejprve pojem časová řada a pak úžeji zaměřený pojem finanční časová řada.
- Ve čtvrté podkapitole si řekneme o analýze časových řad.

CÍLE KAPITOLY RIZIKO VE FINANČNÍ MATEMATICE, FINANČNÍ A ČASOVÉ ŘADY

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět: • vysvětlit pojem riziko, • rozlišovat různé typy rizik, • vysvětlit pojem finanční riziko. • vysvětlit pojem časová řada, • rozlišovat různé druhy časových řad, • vysvětlit finanční časová řada.	*Budete umět*

Získáte: • schopnost, • schopnost, vysvětlit pojem, • schopnost poznat různé.	*Získáte*

Budete schopni: • sestavit a vypočítat, • spočítat, • vypočíst.	*Budete schopni*

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 135 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY RIZIKO VE FINANČNÍ MATEMATICE, FINANČNÍ A ČASOVÉ ŘADY

Riziko, finanční riziko, časová řada, finanční časová řada

PRŮVODCE STUDIEM 8

V této kapitole se budeme zabývat pojmem riziko ve finanční matematice, dále pak pojmem finanční riziko.

V této kapitole se budeme také zabývat též pojmem časová řada a potom též finanční časová řada.

8.1 Riziko

Riziko je stupeň nejistoty očekávaných výnosů z investice. Měří se především pomocí metod teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Df

I když existují různé způsoby, jak měřit riziko (tato problematika je obzvlášť aktuální v pojistné matematice), v oblasti financí se jednostranně preferuje měřit riziko pomocí směrodatné odchylky odpovídajících rizikových náhodných kolísání.

Nejčastěji se ohodnocuje riziko kolísání míry zisku z cenných papírů nebo jejich portfolií.

Často se udávají různé stupnice rizika investic jednotlivých typů, např. (od téměř bezrizikových k silně rizikovým):

- nemovitosti, drahé kovy, starožitnosti, sbírky,
- státní pokladniční poukázky, úročené peněžní vklady se státní garancí,
- státní a komunální obligace,
- depozitní certifikáty, podílové listy, pojistky a renty,
- podnikové obligace,
- směnky, finanční spoluúčast,
- prioritní akcie, obyčejné (kmenové) akcie,
- termínové obchody.

8.2 Finanční riziko

Finanční riziko je definováno jako stupeň nejistoty budoucích výnosů.

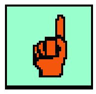
Je rozděleno do pěti základních skupin:

- tržní,
- kreditní,
- likviditní,
- operační a
- riziko právního rámce.

Tržní riziko je funkcí změn ekonomických veličin v tržních podmínkách a je jen stěží zcela oddělitelné od **rizika kreditního.**

Problematika spojená s kreditním rizikem a jeho měřením je proto jedním z nejdůležitějších témat bankovnictví a financí obecně. Na tuto skutečnost reagují banky a finanční instituce vývojem vlastních kreditních modelů.

Finanční riziko je spojeno s využitím cizího kapitálu při financování firmy. Čím větší část aktiv je financována cizím kapitálem společnosti, tím větší je finanční riziko firmy.



Většina lidí, kteří nejsou přímo zainteresováni na problematice finančního rizika, nemá žádný **finanční plán** a ani ho nikdy mít nebude.

K plánování se většinou dostávají až při prvních známkách finančních obtíží. Přitom budoucnost je o **finanční nezávislosti** (penzijní reformy) a tu lze s částkami, které má většina lidí k dispozici, dosáhnout jen když **začneme hodně brzy**.

Největším rizikem tedy je nestanovit si žádný dlouhodobý finanční plán, protože si vůbec neuvědomujeme, že ho ve vlastním zájmu mít musíme a že ho dlouhodobě musíme realizovat.Alternativou je tu chudoba ve stáří.

Oblíbenou položkou ve finančních plánech bývají tzv. „bezrizikové“ produkty. I ty však přinášejí riziko. Jedná se totiž o **riziko inflace**, tedy riziko ztráty kupní síly peněz.

Čím je produkt tzv. bezpečnější (termínový vklad, peněžní trh), tím více trpí inflačními vlivy, které jen stěží pokryje.

Nenabízí tedy zhodnocení peněz, ale v nejlepším případě pouhé uchování jejich kupní síly. I to se v určitých fázích ekonomického cyklu může jevit atraktivně.

Snížit riziko inflace nám umožňují investice do rizikovějších produktů. Čím více bude naše investice přecházet od peněžního trhu přes dluhopisy k akciím, bude se snižovat riziko inflační a narůstat **riziko tržní**. To hodnotou naší investice v čase pohybuje jak směrem nahoru, tak i dolů. Poklesy směrem dolů pak mohou být velice výrazné a proto je toto riziko daleko hůře snášeno než například riziko inflace.

Musíme dobře poznat sami sebe, abychom věděli jaký propad ještě „ustojíme".

Přitom při skutečně dlouhodobých investicích je akceptování určité míry tohoto rizika správné.

S časem totiž tržní riziko klesá a na dlouhodobém horizontu jsou dočasné, i když někdy velice výrazné ztráty, jen malým klopýtnutím na cestě k splněnému cíli.

Současný propad akciových trhů, který trvá již 3 roky, však vyvolává obavy, že se platné zákonitosti porušily a ekonomický cyklus už povede trh akcií jen dolů a trh dluhopisů jen nahoru. Strach má velké oči. Současný vývoj jen potvrzuje tendenci tržní ekonomiky a finančních trhů směřovat k rovnováze. Po období neúměrného růstu přišlo období neúměrného poklesu.

Při investování do jednotlivých akcií podstupujeme obzvláště nebezpečné **riziko nesystematické**. Tedy, koupíme-li akcie jedné firmy a ona zbankrotuje, přijdeme o vše. Tohoto rizika nás zbaví investice do akciových fondů. Správce fondu odstraní toto riziko, za které mimochodem nenabízí trh rizikovou prémii v podobě vyššího očekávaného výnosu (proto je tak nebezpečné), nákupem akcií různých firem. Tržní riziko však zůstává.

I mezi investory funguje **davová obliba**, která se obejde bez přesných důvodů. Bývá součástí investičního sentimentu.

Dnešní situace na trzích přináší obecné zatracování akcií a popularitu **dluhopisů**, se kterými je spojeno **malé tržní riziko**.

I dluhopisové investice však mohou klesat. Zaznamenávaly vysoký výnos v posledních dvaceti letech, v příštích dvaceti je však může čekat výnos nízký. Pravděpodobně budou populární ještě dlouho poté, co již nebudou zajímavé.To je **riziko davové**.

Investor se bez stanovení vlastního cíle a bez odborné pomoci chová chaoticky. Český časopis FondShop napsal v čísle 20/2001, že každý by měl mít vytvořené portfolio s rizikem, které dává do rovnováhy tři složky:

- **časový horizont** (čím více má investor času, tím rizikovější investici si může dovolit)
- **osobní toleranci k riziku** (jaký pokles ještě investor unese, aby nezačal v panice a po probdělých nocích prodávat)
- **skutečnou potřebu výnosu** (čím menší má příjmy, tím vyšší výnos potřebuje a tím vyšší riziko musí nést)

Bereme-li finanční budoucnost svou i našich nejbližších vážně a nikoliv lehkomyslně (ono to nějak dopadne), je dobré změnit postoj k riziku.

Nejdůležitější je však vědět, že **ve světě peněz nelze finanční riziko zcela vyloučit.** Můžeme si jen vybrat míru finančního rizika a akceptovat jeho zvláštnosti.

Čím dříve tak učiníme, tím lépe. Jinak nám hrozí riziko, které jsme nezmínili — **riziko ztráty času**.

- Čas je významný faktor, který se podílí na výnosech – viz 4. kapitola o složeném úrokování, ale i 5. kapitola o spoření.

Finanční riziko patří do skupiny **podnikatelských rizik**, společně s provozním (operačním) rizikem.

Finanční riziko lze obecně vyjádřit funkcí:

$\Delta V = f(\Delta F_1, \Delta F_2, ..., \Delta F_n, t) + \varepsilon$ **Finanční riziko** patří do skupiny **podnikatelských rizik**, společně s provozním (operačním) rizikem.

Finanční riziko lze obecně vyjádřit funkcí:

$$\boldsymbol{\Delta V = f(\Delta F_1, \Delta F_2, ..., \Delta F_n, t) + \varepsilon}$$

kde

V	hodnota podniku
F_1, F_2, F_n	rizikové faktory
T	čas

Finanční riziko lze rozdělit na systematické riziko, které ve výše uvedeném vzorci odpovídá složce $f(\Delta F..., t)$ a specifické riziko (ε).

Jinak se též finanční riziko dělí na kategorie podle směrodatných rizikových faktorů.

Finanční riziko lze rozdělit na systematické riziko, které ve výše uvedeném vzorci odpovídá složce $f(\Delta F..., t)$ a specifické riziko (ε).

Jinak se též finanční riziko dělí na kategorie podle směrodatných rizikových faktorů

Finanční riziko je reprezentováno pěti faktory, které zohledňují finanční stabilitu dané země.

Patří sem

- možnost platební neschopnosti nebo nepříznivé restrukturalizaci dluhu,
- odklad splatných dodavatelských úvěrů,
- možnost neuznání závazku vládou,
- možnost ztrát z devizové kontroly a
- vyvlastnění soukromých investic.

8.3 Časová řada

Důležitými statistickými daty, pomocí nichž můžeme zkoumat dynamiku jevů v čase, jsou tzv. **časové řady**.

Mají základní význam pro analýzu příčin, které na tyto jevy působily a ovlivňovaly jejich chování v minulosti, tak pro předvídání jejich budoucího vývoje.

Časová řada je posloupnost pozorování kvantitativní charakteristiky uspořádaná v čase od minulosti do přítomnosti.

Můžeme uvažovat o třech typech časových řad:

1. časová řada **intervalových ukazatelů,**
2. časová řada **okamžikových ukazatelů**,
3. časová řada **odvozených charakteristik**.

Pro ukazatele **1. typu** platí, že jejich velikost přímo úměrně závisí na zvolené délce intervalu. V těchto případech se často musí data převést na srovnatelné hodnoty (např. přepočet na stejně dlouhé úseky , např. čtvrtletí nemají stejný počet dní apod.).

U řad **2. typu** se ukazatel vztahuje k přesně definovanému okamžiku. Hodnota ukazatele tedy nezávisí na délce intervalu, za který je sledován. Práce s těmito řadami je složitější. Na rozdíl od předešlého typu nemá reálný smysl např. součet hodnot řady, přistupuje se tedy k různým druhům průměrování.

Často je používán tzv. **chronologický průměr**:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n}{n-1} \qquad (8\text{-}1)$$

Tímto jediným číslem pak charakterizujeme úroveň ukazatele za celé období. Je ale zřejmé, že tím dochází ke značnému zjednodušování reality.

Oblíbenější jsou proto různé druhy klouzavých ukazatelů, které jsou schopny částečně eliminovat vliv náhodných vlivů na sledovaný ukazatel a tím časovou řadu "vyhladit".

Používají se jak **klouzavé mediány**, tak **klouzavé průměry**. Vždy se postupuje tak, že udaj časové řady nahradíme zvoleným ukazatelem z okolních časově předcházejících a následujících údajů.

Řady ***3. typu*** jsou odvozovány na základě absolutních údajů okamžikových nebo intervalových.

Příkladem mohou být časové řady součtové nebo časové řady poměrných čísel.

8.4 Analýza finančních časových řad

Analýza časových řad je statistická disciplína, která analyzuje data chronologicky uspořádaná v čase.

Příkladem časové řady jsou objemy peněžních částek na nějakém bankovním účtu na koncích jednotlivých měsíců za období leden 1990 – listopad 1992.

Jedním z hlavních praktických výstupů takových analýz je konstrukce *předpovědí* pro určitá budoucí období, např. V našem případě na konci listopadu 2002 pro prosinec 2002 a leden 2003.

Analýza časových řad nabízí celou škálu metod, které se liší svým zaměřením na určitý typ časových řad, výpočetní náročností, poměrem zastoupených subjektivních a objektivních prvků, oblíbeností v praxi a dalšími charakteristikami.

Analýza časových řad je statistická disciplína, která analyzuje data chronologicky uspořádaná v čase. Příkladem časové řady jsou objemy peněžních částek na nějakém bankovním účtu na koncích jednotlivých měsíců za období např. leden 2002 – listopad 2002.

Jedním z hlavních praktických výstupů takových analýz je konstrukce *předpovědí* pro určitá budoucí období, např. V našem případě na konci listopadu 2002 pro prosinec 2002 a leden 2003.

Analýza časových řad nabízí celou škálu metod, které se liší svým zaměřením na určitý typ časových řad, výpočetní náročností, poměrem zastoupených subjektivních a objektivních prvků, oblíbeností v praxi a dalšími charakteristikami.

Přitom mnoho metod běžně používaných v rámci tzv. Analýzy ekonomických časových řad lze bez větších úprav aplikovat i pro některá časová data ve financích.

Při klasické analýze časových řad se vychází z předpokladu, že každá časová řada může obsahovat čtyři složky:

1) trend,

2) sezónní složku,

3) cyklickou složku,

4) náhodnou složku.

Trend je obecná tendence vývoje zkoumaného jevu za dlouhé období. Je výsledkem dlouhodobých a stálých procesů. Trend může být:

- **rostoucí**,
- **klesající** nebo může existovat řada,
- **bez trendu**.

Sezónní složka je pravidelně se opakující odchylka od trendové složky. Perioda této složky je menší než celková velikost sledovaného období.

Cyklická složka udává kolísání okolo trendu v důsledku dlouhodobého cyklického vývoje (požíváno spíše v makroekonomických úvahách).

Náhodná (stochastická) složka se nedá popsat žádnou funkcí času. "Zbývá" po vyloučení trendu, sezónní a cyklické složky.

Ukazatele, které používáme jako tzv. **míru dynamiky**:

- absolutní přírůstek

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \;,\; t = 2,3,\cdots,n$$

- průměrný absolutní přírůstek

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta y_t}{n-1} = \frac{(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_n - y_{n-1})}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

- relativní přírůstek

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$$

- průměrný koeficient růstu

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_1 k_2 \cdots k_n} = \sqrt[n-1]{\frac{y_2}{y_1}\frac{y_3}{y_2}\frac{y_4}{y_3}\cdots\frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

- Analýza finančních časových řad je relativně nová disciplína, která se samostatně nebo jako součást jiných předmětů vyučuje na významných světových univerzitách.

- Aplikace metod analýzy finančních časových řad vede k informacím, které jsou klíčové pro různé finanční analýzy a metodiky (např. metodika VaR v rámci řízení rizika v bankách a jiných finančních institucích).

- Pro investiční společnosti či obchodníky s cennými papíry jsou důležité předpovědi, ke kterým lze tyto metody rovněž využít.

KONTROLNÍ OTÁZKA 8

1. Vysvětlete pojem riziko
2. Vysvětlete pojem finanční riziko.
3. Vysvětlete, co je davové riziko.
4. Co to je riziko inflace?
5. Vysvětlete pojem časová řada
6. Vysvětlete pojem finanční časová řada.
7. Vysvětlete, co jsou ukazatelé dynamiky.
8. Co to je chronologický průměr?

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 8

Zopakujte výpočet směrodatné odchylky pro vámi šest zvolených hodnot.

Vymyslete si příklad, který bude mít alespoň pět hodnot, na němž budete aplikovat postupně výpočet všech ukazatelů tzv. míry dynamiky.

9 OBLIGACE A AKCIE

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY OBLIGACE A AKCIE

V 7. kapitole jsme se zabývali pojmy *daně, odpisy a investiční rozhodování* a dalšími pojmy, které s touto problematikou souvisí. Naučili jsme se rozhodovat o výhodnosti či naopak nevýhodnosti investice.

V této kapitole bude naším cílem seznámit se s dvěmi důležitými pojmy, které patří jak do finanční matematiky, tak i úzce navazují na předcházející kapitolu. Těmito pojmy jsou ***Obligace (***ekvivalentem pojmu *Obligace* je pojem ***Dluhopis)*** a ***Akcie.***

Obligace a akcie patří mezi nejdůležitější zástupce dlouhodobých cenných papírů.

Emise, tj. vydání, obligací a akcií je základním způsobem zajištění potřebného kapitálu podnikatelského subjektu, kterým může být jakákoliv firma, ale také banka i státní správa.

Tato kapitola bude rozdělena do dvou podkapitol:

- V první podkapitole se budeme zabývat vším, co souvisí s dluhopisy, nebo-li obligacemi. Znamená to, že tento pojem budeme nejprve definovat, ukážeme si jaké typy obligací rozlišujeme, pak se naučíme výpočet ceny obligace, vysvětlíme si, čemu říkáme konzola, rendita a co znamená durace.

- Ve druhé podkapitole se seznámíme s pojmem akcie, který si budeme též nejdříve definovat, řekneme si s jakými druhy akcií se můžeme setkat, ale především se naučíme vypočítat cenu akcie a předvedeme si některé kvantitativní, ale i kvalitativní ukazatele, které ovlivňují akciové kurzy.

CÍLE KAPITOLY OBLIGACE A AKCIE

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět: • vysvětlit pojem obligace, • rozlišovat různé druhy obligací, • vysvětlit pojem akcie a rozdíl od obligace.	*Budete umět*

Získáte: • schopnost, jak rozeznat různé druhy dluhopisů, čím se liší, • schopnost, vysvětlit pojem konzola, rendita, durace, • schopnost poznat různé typy akcií, • vysvětlit pojem dividenda, • vysvětlit pojem předkupní právo.	*Získáte*

Budete schopni: • spočítat cenu obligace, • spočítat výnosnost do splatnosti obligace, • vypočíst cenu akcie, • vypočítat kvantitativní ukazatele ovlivňující akciové kurzy,	*Budete schopni*

- vypočítat cenu předkupního práva.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 135 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY OBLIGACE A AKCIE

Obligace, dluhopis, akcie, konzola, rendita, durace, dividenda, průměrná doba splatnosti, cena a kurz obligace, cena a kurz akcie, kupónová sazba, předkupní právo.

PRŮVODCE STUDIEM 9

V této kapitole se budeme zabývat dvěmi pojmy, a to obligacemi a akciemi.

U obou pojmů budeme hovořit o ceně a o kurzu, ukážeme si rozdíly mezi obligacemi a akciemi.

Seznámíme se s výpočtem rendity, durace, dividendy a všech ostatních veličin, které k výpočtům používáme.

9.1 Obligace

Dluhopis (nebo též **obligace**, bond) je **dlouhodobý obchodovatelný cenný papír**, který má předem stanovenou dobu splatnosti. Vyjadřuje dlužnický závazek emitenta obligace (dlužníka) vůči oprávněnému majiteli obligace (věřiteli). Ke stanovenému datu je nutné nejen splatit majiteli zapůjčenou částku, ale i předem sjednaný úrok.

Dluhopis nebo-li obligace je cenný papír, který vyjadřuje dlužnický závazek emitenta vůči oprávněnému majiteli dluhopisu.

Majitel dluhopisu má nárok požadovat po emitentovi splácení nominální (jmenovité) hodnoty v době splatnosti dluhopisu a v určených termínech včetně předem stanovených výnosů.

Dluhopis se obvykle skládá:

- z pláště a
- z kupónového archu s talonem.

Plášť dluhopisu obsahuje údaje o emitentovi, nominální hodnotu dluhopisu, datum splatnosti, výši a termíny vyplácení úrokových výnosů a jiné údaje.

Kupónový arch s talonem obsahuje kupony k inkasu splatných úrokových výnosů a talon sloužící k získání nového kupónového archu v případě, že původní kupónový arch neobsahoval kupony na všechny úrokové platby až do splatnosti dluhopisu.

Dluhopis mohou emitovat

- **právnické** i
- **fyzické osoby**, které jsou oprávněné k podnikání.

K emisi je u nás zapotřebí povolení od Komise pro cenné papíry. V praxi lze za **nejvýznamnější emitenty** dluhopisů považovat:

- **stát,** který emituje jednak ***krátkodobé státní pokladniční poukázky*** k pokrytí krátkodobého nesouladu mezi příjmy a výdaji ve státním rozpočtu, jednak ***dlouhodobé státní dluhopisy***, které slouží k financování dlouhodobějších státních výdajů;

- **obce a města**, která emitují tzv. ***komunální obligace***, které obvykle mají dlouhodobější povahu a slouží k financování rozvojových potřeb měst a obcí;

- **banky**, které jsou významným emitentem celé řady různých dluhopisů.

Banky emitují skupiny těchto dluhopisů:

- poukázky emitované Českou národní bankou jsou krátkodobé dluhopisy, sloužící jako měnový-politický nástroj, zejména k regulaci množství peněz v oběhu;

- dlouhodobé bankovní dluhopisy slouží bankám k získávání dlouhodobých zdrojů ke krytí aktivních obchodů bank; jsou emitovány v jednorázových rozsáhlých emisích a zpravidla jsou dobře sekundárně obchodovatelné;

- hypoteční zástavní listy mohou být emitovány bankami pouze na základě speciální licence; je pro ně charakteristické to, že zdroje, které z nich plynou, může banka použít pouze na poskytování hypotečních úvěrů;

- vkladní listy, depozitní certifikáty a podobné formy dluhopisů jsou průběžně emitovány bankami podle aktuálních podmínek na trhu (zejména z hlediska výnosnosti); jejich podmínky (splatnost, obchodovatelnost apod.) bývají velmi různorodé.

Významným emitentem dluhopisů je také **podnikový sektor**, avšak schopnost umístit (prodat) na trhu vlastní dluhopisy mají pouze velmi bonitní, zpravidla větší firmy, kde je riziko nesplacení dluhopisů relativně malé.

Může se jednat o dlouhodobé dluhopisy, ale i o krátkodobé komerční papíry, obvykle opakovaně emitované.

9.1.1 Členění dluhopisů

Dluhopisy mohou být členěny podle řady různých charakteristik. Mezi nejdůležitější charakteristiky patří:

- dobu splatnosti,

- způsob stanovení výnosů,
- druh emitenta,
- způsob převoditelnosti a sekundární obchodovatelnosti i
- formu, v jaké jsou emitovány.

V době splatnosti dochází ke splácení nominální hodnoty dluhopisu, proto z hlediska délky doby do splatnosti budeme rozlišovat dluhopisy:

- krátkodobé, které mají splatnost stanovenou do jednoho roku;
- střednědobé se splatností od jednoho do čtyř let;
- dlouhodobé se splatností delší než čtyři roky;
- věčné renty neboli konzoly,
- speciální druhy dluhopisů, které nemají stanovenou splatnost, to znamená, že u nich nikdy nedochází ke splacení nominální hodnoty, jsou vypláceny pouze úrokové výnosy.

Z hlediska formy se dluhopisy mohou vyskytovat ve dvou podobách:

- **dematerializované dluhopisy** jsou vedeny pouze na účtech příslušné instituce (u nás Střediska cenných papírů);
- **listinné cenné papíry**, to znamená, že jsou fyzicky vydány.

Splatnost dluhopisů může být v emisních podmínkách modifikována zvláštními právy emitenta či dlužníka.

Emitent si může vyhradit právo na:

- předčasné splacení dluhopisů (**dluhopisy s call opcí**) nebo naopak
- může být toto právo dáno majiteli dluhopisu (**dluhopisy s put opcí**).

Vedle výše uvedených výnosů mohou dávat některé speciální formy dluhopisů **majiteli určitá dodatečná práva**. V tomto směru jsou nejvýznamnější dva druhy dluhopisů:

- **konvertibilní neboli směnitelné dluhopisy** dávají majiteli právo volby v době splatnosti mezi splacením nominální hodnoty dluhopisu nebo jejich výměnou za stanovený počet akcií emitenta;

- **opční dluhopisy** obsahují vedle samotného dluhopisu ještě tzv. opční list (warrant), na jehož základě má jeho majitel právo – opci na koupi (eventuálně prodej) stanoveného finančního instrumentu (často akcie emitenta) za stanovených podmínek (cena, termín, množství). Opční list se může od dluhopisu oddělit a být obchodován samostatně.

Majitel dluhopisu může dluhopis a práva s ním spojená převádět na jiné osoby.

Z hlediska způsobu převoditelnosti se tudíž rozlišují tří druhy dluhopisů:

- **dluhopisy na majitele** (doručitele), které mohou být převáděny pouhým předáním dluhopisu;
- **dluhopisy na řad** se převádějí indosamentem (rubopisem) a předáním;
- **dluhopisy na jméno** v zásadě převádět plnohodnotně nejde, ale do určité míry je možný převod práv pouze postoupením (cesí).

9.1.2 Cena obligace

Každý **dluhopis musí mít** stanovenou **nominální hodnotu**, to znamená ve skutečnosti finanční částku, která bude vyplacena majiteli dluhopisu v době splatnosti.

Z nominální hodnoty se rovněž odvozuje absolutní výše úrokového výnosu, plynoucího z dluhopisu.

V případě, že dluhopis je předmětem obchodů na sekundárním trhu, je obchodován za svoji tržní cenu.

Tržní cena dluhopisu je obecně dána stavem nabídky a poptávky na trhu, které jsou ovlivňovány řadou faktorů.

Teoretickou cenu dluhopisu můžeme odvodit z podstaty dluhopisu jako cenného papíru, ze kterého plynou majiteli během doby do splatnosti určité výnosy a v době splatnosti nominální hodnota.

Teoretická cena dluhopisu potom není nic jiného než současná hodnota všech budoucích plateb, plynoucích z daného dluhopisu.

Pokud zůstaneme u nejjednoduššího, ale zároveň nejobvyklejšího dluhopisu, jímž je dluhopis

- s pevnou úrokovou sazbou,
- s nárokem na vyplacení nominální hodnoty v době splatnosti,
- bez dodatečných práv

můžeme **teoretickou cenu jako současnou hodnotu všech budoucích plateb z dluhopisu** stanoví:

$$C = \frac{KP}{1+i} + \frac{KP}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{KP}{(1+i)^t} + \frac{NH}{(1+i)^t}\text{, kde} \qquad (9\text{-}1)$$

KP	je roční kupónová platba,
NH	je nominální hodnota,
t	je počet let do doby splatnosti,
i	je úroková míra,
C	je cena obligace.

Výplatu kupónových plateb můžeme chápat jako výplatu důchodu, pak je možné vztah *(9-1)* upravit podle *(6-2)* pro výpočet počáteční hodnoty důchodu. Dostaneme pak cenu obligace ve tvaru:

$$C = \frac{KP.(1+i)^t - KP + NH.i}{i.(1+i)^t} \qquad (9\text{-}2)$$

Úroková míra ***i*** navzájem vyrovnává cenu obligace s budoucími výnosy z ní, proto ji nazýváme ***výnos do doby splatnosti.***

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.1.1

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s pevnou kupónovou úrokovou platbou, kupónovou sazbou 6 % p.a., s nominální hodnotou 10.000 Kč, se splatností 5 let a při tržní úrokové míře 4 %.

Řešení příkladu

Teoretickou cenu dluhopisu vypočítáme podle vztahu *(9-2)*:

$$C = \frac{KP.(1+i)^t - KP + NH.i}{i.(1+i)^t} = 10.890{,}36.$$

Teoretická cena dluhopisu činí 10.890,36 Kč, což je 108,9 %. *

Výpočet teoretické ceny dluhopisu s nulovým kuponem je jednodušší, protože tento dluhopis není spojen se žádnými úrokovými platbami během doby do splatnosti dluhopisu, ale pouze s výplatou nominální hodnoty v době splatnosti.

Teoretickou cenu dluhopisu s nulovým kuponem proto určíme jako současnou hodnotu nominální hodnoty splatné v době splatnosti, to znamená:

$$C = \frac{0.(1+i)^t - 0 + NH.i}{i.(1+i)^t} = \frac{NH}{(1+i)^t} \qquad (9\text{-}3)$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.1.2

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s nulovým kuponem se splatností pět let, nominální hodnota dluhopisu činí 10.000 Kč, při tržní úrokové míře 4 % p.a.

Řešení příkladu

Teoretickou cenu určíme dosazením do vztahu *(9-3)*:

$$C = \frac{NH}{(1+i)^t} = 8.219{,}27.$$

Teoretická cena (nebo říkáme *kurz*) dluhopisu činí 8.219,27 Kč, to je 82,19 %.

Teoretická cena dluhopisu bez splatnosti, **tzv. věčné renty**, je dána rovněž vzorcem. Je však modifikován tím, že zde není splacena nominální hodnota a doba splatnosti je nekonečná. Současná hodnota budoucích výnosů tak získává tvar nekonečné geometrické řady, podle vzorce pro součet geometrické řady potom pro teoretickou cenu platí:

$$C = \frac{KP}{i} \qquad (9\text{-}4)$$

kde

C je teoretická cena dluhopisu jako současná hodnota budoucích výnosů,

KP je roční kupónová platba,

i je tržní roční úroková míra.

Jedná se o speciální případ obligace, kterou nazýváme **konzola**.

Pro takový dluhopis bez splatnosti (tj. věčnou rentu) můžeme na základě předchozího vzorce vyjádřit **výnosnost do doby splatnosti** jako:

$$i = \frac{KP}{C}$$

Doposud ceny dluhopisů, které jsme měli na mysli, byly v absolutním vyjádření (to znamená např. v korunách). Můžeme ji vyjádřit i pomocí tohoto vzorce:

$$C = \frac{C_{\%} \cdot NH}{100} \qquad (9\text{-}5)$$

kde

C je cena dluhopisu v absolutním vyjádření,

$C_{\%}$ je kurz dluhopisu vyjádřený v %,

NH je nominální hodnota dluhopisu.

V praxi se ovšem používá **kotace** v relativním vyjádření a cena, tzv. kurz dluhopisu, je potom stanoven v procentech z nominální hodnoty.

Vzhledem k tomu, že kupónové úrokové platby jsou vypláceny v pravidelných, zpravidla ročních či půlročních termínech, je zřejmé, že čím je výplata kuponu blíže, tím je daný dluhopis (za ostatních neměnných okolností) hodnotnější. Na to musí samozřejmě reagovat i cena dluhopisu.

V praxi by však bylo nepřehledné, aby se kurz dluhopisu denně měnil vlivem zkracující se doby do výplaty kuponu.

Kurz dluhopisů se kotuje bez vlivu kupónové úrokové platby, kterou potom zohledňujeme v tzv. **alikvotním úrokovém výnosu**.

Cena dluhopisu, kterou platí kupující prodávajícímu, se potom skládá z ceny odpovídající:

- kotovanému kurzu a
- alikvotního úrokového výnosu.

Alikvotní úrokový výnos je zjednodušeně řečeno část kupónového úrokového výnosu, odpovídající době od výplaty posledního kuponu do dne, ke kterému jej počítáme (vypořádání obchodu).

Výši alikvotního úrokového výnosu vyjádřenou v % můžeme vypočítat (při standardu, že rok = 360 dnů) podle vzorce:

$$AV_{\%} = \frac{p_k \cdot t_v}{360} \qquad (9\text{-}6)$$

kde

$AV_{\%}$ je alikvotní úrokový výnos vyjádřený v %,

p_k je kupónová úroková sazba dluhopisu vyjádřená v % p.a.,

t_v je délka výnosového období dluhopisu ve dnech, tj. doba od výplaty posledního kuponu do data vypořádání obchodu.

Absolutní výši (např. v korunách) alikvotního úrokového výnosu potom můžeme vypočítat podle vzorce:

$$AV_{abs} = \frac{AV_{\%} \cdot NH}{100} = \frac{p_k \cdot t_v \cdot NH}{360 \cdot 100} \qquad (9\text{-}7)$$

kde

AV_{abs} je alikvotní úrokový výnos vyjádřený absolutně, např. v korunách,

$AV_{\%}$ je alikvotní úrokový výnos vyjádřený v %,

NH je nominální hodnota dluhopisu,

p_k je kupónová úroková sazba dluhopisu vyjádřená v % p.a.,

t_v je délka výnosového období dluhopisu ve dnech.

9.1.3 Výnos z dluhopisů a jeho měření

Z každého dluhopisu mohou jeho majiteli plynout výnosy v zásadě ve dvou základních formách:

- jako **kupónový úrokový výnos**,
- jako **rozdíl mezi cenou, za kterou dluhopis koupil, a cenou, za kterou dluhopis opětně prodal,** resp. nominální hodnotou, která je splacena v době splatnosti dluhopisu.

K měření **výnosnosti investice do dluhopisů** můžeme využít různé ukazatele, které se liší především svoji přesností, na druhé straně také náročností na výpočet.

Jednoduchým ukazatelem je **kupónová výnosnost**, která vyjadřuje vztah mezi kupónovou úrokovou platbou a nominální hodnotou.

Kupónová výnosnost je **kupónová úroková sazba dluhopisu**. Jako míra výnosnosti má řadu nedostatků, protože nezohledňuje:

- kupní ani prodejní cenu dluhopisu, ani
- časové rozložení výnosů, které plynou z dluhopisu.

Proto přesnější mírou je **běžná výnosnost**, která vyjadřuje vztah kupónové úrokové platby k aktuální tržní ceně dluhopisu, tj. ceně, za kterou můžeme dluhopis na trhu koupit, tedy kurz obligace:

$$K_v = \frac{KP}{NH} \cdot 100 \qquad (9\text{-}8)$$

kde

K_v je kupónová výnosnost (sazba) v %,

KP je kupónová úroková platba,

NH je nominální hodnota dluhopisu.

Tomuto ukazateli však zůstávají některé nedostatky i nadále. Proto za nejpřesnější míru výnosnosti investice do dluhopisu lze považovat **výnosnost do doby splatnosti,** kterou můžeme charakterizovat jako:

- roční výnosnost, které dosáhne investor, kupující dluhopis, od jeho zakoupení do jeho doby splatnosti.

Jde vlastně o úrokovou sazbu, která navzájem vyrovnává aktuální tržní cenu dluhopisu se současnou hodnotou budoucích výnosů (včetně splacené jistiny), plynoucích z daného dluhopisu.

Pokud tedy do vztahu *(9-1)*, který určuje teoretickou cenu dluhopisu jako současnou budoucích plateb z dluhopisu, dosadíme na levou stranu aktuální tržní cenu dluhopisu, to znamená:

$$C_{tr} = \frac{KP}{1+i_{ds}} + \frac{KP}{(1+i_{ds})^2} + \dots + \frac{KP}{(1+i_{ds})^t} + \frac{NH}{(1+i_{ds})^t}, \qquad (9\text{-}9)$$

kde

C_{tr} tržní cena dluhopisu,

KP je roční kupónová platba,

NH je nominální hodnota dluhopisu,

t je doba splatnosti dluhopisu v letech,

i_{ds} je míra výnosnosti do doby splatnosti.

Potom bude **míra výnosnosti i_{ds}** vyhovující dané rovnici výnosnosti do doby splatnosti.

Vztah *(9-9)* pro výpočet výnosnosti do doby splatnosti můžeme použít i pro výpočet **výnosnosti za dobu držby** dluhopisu, která je kratší než doba splatnosti, neboli pro případ, kdy dluhopis prodáme ještě před splatností.

Pro výnosnost za dobu držby dluhopisu potom platí:

$$C_a = \frac{KP}{1+i_{dd}} + \frac{KP}{(1+i_{dd})^2} + \dots + \frac{KP}{(1+i_{dd})^j} + \frac{C_k}{(1+i_{dd})^k}, \qquad (9\text{-}10)$$

kde

C_a je aktuální tržní cena dluhopisu (kupní cena),

KP je roční kupónová platba,

C_k je tržní cena dluhopisu v čase k (prodejní cena),

i_{dd} je míra výnosnosti za dobu držby,

j je doba do poslední výplaty kuponu během držby dluhopisu v letech,

k je doba držby dluhopisu v letech.

Pro zvláštní formy dluhopisů, o nichž jsme již hovořili, je výpočet výnosnosti do doby splatnosti jednodušší.

Pro **dluhopis s nulovým kuponem** můžeme vyjádřit **výnosnost do doby splatnosti** osamostatněním úrokové míry ze vzorce *(9-3)*:

$$i_{nk} = \sqrt[t]{\frac{NH}{C_{tnk}}} - 1 \qquad (9\text{-}11)$$

kde

NH je nominální hodnota dluhopisu,

t je počet let do doby splatnosti dluhopisu,

i_{nk} je míra výnosnosti do doby splatnosti dluhopisu s nulovým kupónem,

C_{tnk} je tržní cena dluhopisu s nulovým kupónem.

9.1.4 Rendita

Kromě dvou výše uvedených speciálních případů není výpočet výnosnosti do doby splatnosti jednoduchou záležitostí.

Proto se někdy setkáme s jinými ukazateli výnosnosti, které jsou určitým zjednodušením výnosnosti do doby splatnosti a jejichž výpočet je mnohem jednodušší.

Pro **dluhopis bez splatnosti** (věčnou rentu) můžeme na základě vzorce *(9-4)* vyjádřit **výnosnost do doby splatnosti** jako:

$$i_{bs} = \frac{KP}{C_{tbs}}, \qquad (9\text{-}12)$$

kde

i_{bs} je výnosnost za doby splatnosti dluhopisu bez splatnosti,

KP je roční kupónová platba,

C_{tbs} je aktuální tržní cena obligace bez splatnosti.

Příkladem takového ukazatele může být následující vzorec (někdy označovaný jako **rendita**):

$$i_r = \frac{KP}{C_0} + \frac{C_t - C_0}{t \cdot C_0}, \qquad (9\text{-}13)$$

kde

i_r je výnosnost za dobu držby - rendita,

KP je roční kupónová platba,

C_0 je aktuální tržní cena obligace v čase koupě,

C_t je cena obligace v čase prodeje,

t je doba držby obligace v letech.

První zlomek udává běžný výnos, druhý pak kapitálové zisky nebo ztráty, které plynou ze změny kurzovní ceny obligace během doby její držby.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.1.3

Koupili jsme dluhopis s pevnou kupónovou platbou a kupónová sazba nechť činí 8% p.a., nominální hodnota je 10.000 Kč a kupní cena 9.500. Po jednom roce tento dluhopis prodáte za cenu 11.500 Kč. Jaká je výnosnost této naší investice?

Řešení příkladu

Výnosnost budeme počítat podle vztahu *(9-13)*:

$$i_r = \frac{KP}{C_0} + \frac{C_t - C_0}{t \cdot C_0} = \frac{1000}{9500} + \frac{11500 - 9500}{1 \cdot 11500} = 0{,}2792$$

Výnosnost naší investice byla 27,92 %. *

9.1.5 Zdanění výnosů z dluhopisů

Zatím jsme se zabývali měřením hrubé výnosnosti, neboli neuvažovali jsme vliv zdanění na výnosnost. Vzhledem k tomu, že investora ve svých důsledcích zajímá čistá výnosnost a výnosy z dluhopisů podléhají zdanění, podíváme se, jak se zdanění výnosů promítne do vzorců pro výpočet výnosnosti.

Podle platného zákona o dani z příjmu podléhají u nás výnosy plynoucí z dluhopisů následujícímu zdanění.

Kupónové úrokové výnosy nebo výnosy plynoucí z rozdílu mezi nominální hodnotou, vyplácenou v době splatnosti, a emisní cenou při jejich vydání jsou zdaněny takto:

- pro fyzické osoby se na tyto výnosy vztahuje srážková daň se zvláštní sazbou daně ve výši 15%. Daň sráží a odvádí přímo emitent při výplatě úroků, a tyto příjmy potom nejsou součástí příjmů, vcházejících do daňového přiznání,
- fyzickým osobám, pokud je vklad zahrnut v jejich obchodním majetku, a právnickým osobám je rovněž strhávána daň ve výši 15 %, avšak zaplacená daň podléhá ročnímu zúčtování na celkovou daňovou povinnost, která se de facto promítá do daňového přiznání jako zaplacená záloha na daň,
- kapitálové výnosy plynoucí z rozdílu mezi prodejní a kupní cenou akcie patří (pokud doba od zakoupení do prodeje nepřesáhne dobu 6 měsíců) mezi ostatní příjmy a vcházejí do celkového daňového základu investora. **Jestliže však doba od zakoupení do prodeje přesáhne dobu 6 měsíců, potom jsou pro fyzické osoby od daně**

osvobozeny.

Vliv zdanění lze promítnout do uvedených vzorců relativně jednoduchým způsobem **pro fyzické osoby**. U **právnických osob** závisí již čistá výnosnost na celkové výši daňového základu, a proto nelze vliv zdanění do uvedených vztahů přímo promítnout.

Pro fyzické osoby se zdanění ve vzorcích pro výpočet výnosnosti projeví tak, že **od kupónové úrokové platby musíme odečíst 15% daň**, analogicky u dluhopisu s nulovým kuponem se 15% daň odečte od rozdílu mezi emisní cenou a nominální hodnotou dluhopisu.

Vzorec pro výpočet **čisté výnosnosti do doby splatnosti** pro dluhopis **s nulovým kuponem** se změní na následující tvar:

$$i_{rnk} = \sqrt[t]{\frac{NH - (NH - C_{tnk}) \cdot 0{,}15}{C_{tnk}}} - 1 \qquad \textit{(9-14)}$$

Čistou výnosnost za dobu držby, **tj renditu**, dostaneme zohledněním zdanění ***d*** do vzorce *(9-12)*.

Výsledný tvar vzorce je potom:

$$i_r = \frac{KP \cdot (1-d)}{C_0} + \frac{(C_t - C_0) \cdot (1-d)}{t \cdot C_0}, \qquad \textit{(9-15)}$$

kde

i_r je výnosnost za dobu držby - **rendita,**

KP je roční kupónová platba,

C_0 je aktuální tržní cena obligace v čase koupě,

C_t je cena obligace v čase prodeje,

t je doba držby obligace v letech,

d je marginální míra daně z příjmů podle výše uvedených

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.1.4

Jaká bude čistá výnosnost investice z příkladu (9.1.3), pokud úroky budou podléhat 15% dani z příjmu?

Řešení příkladu

Při výpočtu vyjdeme ze vzorce *(9-13)*, to znamená, že kupónovou úrokovou platbu snížíme o daň a po dosazení za d= 0,15 dostáváme

$$r_R = \frac{KP(1-d)}{C_0} + \frac{(C_k - C_0).(1-d)}{k.C_0} = 0{,}2792.$$

Čistý výnos za dobu držby daného dluhopisu činil 27,92 % p.a. *

9.1.6 Durace

Důležitou charakteristikou dluhopisu je jeho doba splatnosti. Doba splatnosti ovšem není zcela přesnou mírou toho, kdy se nám peníze investované do dluhopisu vrátí zpět.

Srovnáme-li dva dluhopisy, z nichž jeden má vysokou kupónovou míru, druhý je dluhopis s nulovým kuponem, přičemž oba mají shodnou dobu splatnosti, je vidět, že z dluhopisu s kupónovými úrokovými platbami se nám vrací investovaný kapitál již v průběhu splatnosti, tedy dříve než u dluhopisu s nulovým kuponem.

Durace je průměrnou dobou splatnosti dluhopisu a zohledňuje v sobě výše uvedené faktory.

Durace vyjadřuje dobu, za kterou se nám náš investovaný kapitál (při zohlednění časové hodnoty peněz) **vrátí zpět.**

Matematicky je durace vyjádřena jako vážený aritmetický průměr jednotlivých dob, ve kterých plyne z dluhopisu určitá platba, přičemž vahami jsou současné hodnoty těchto plateb, to znamená:

$$Dur = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} \frac{j \cdot KP_j}{(1+i)^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} \frac{KP_j}{(1+i)^j}} \qquad (9\text{-}16)$$

kde

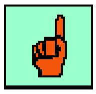
Dur je durace,

KP_j je cash flow platba, která plyne v čase j z dluhopisu(tj. roční kupónové úrokové platby a nominální hodnota v době splatnosti),

i je tržní úroková míra,

j jsou jednotlivé roky, ve kterých dochází k platbám z dluhopisu,

t je doba splatnosti obligace v letech.



Z podstaty **durace** a z logiky vzorce vyplývá, že durace je (za jinak neměnných okolností) **tím nižší**, čím:

- vyšší jsou platby (cash flow), plynoucí z dluhopisu během doby do jeho splatnosti,
- dříve cash flow z daného instrumentu nastává,
- kratší je celková doba do splatnosti.

Durace má ovšem ještě jednu zajímavou vlastnost:

- **vyjadřuje míru citlivosti tržní ceny daného dluhopisu na změnu tržní úrokové míry.**

Durace totiž vyjadřuje závislost relativní změny ceny instrumentu na relativní změně tržní úrokové sazby, protože platí:

$$\frac{\Delta C}{C} = -Dur \frac{\Delta i}{1+i} \tag{9-17}$$

kde

Dur je durace,

C je cena dluhopisu

i je tržní úroková míra,

j jsou jednotlivé roky, ve kterých dochází k platbám z dluhopisu,

$\Delta C, \Delta i$ jsou symboly, kterými označujeme změnu ceny dluhopisu a tržní úrokové míry.

Ze vztahu *(9-17)* a z podstaty durace potom pro změny v tržní ceně dluhopisu vyplývá, že:

- čím má daný dluhopis nižší hodnotu durace, tím menší jsou změny v jeho tržní ceně vzhledem ke změnám tržních úrokových sazeb,
- se snižující se durací dluhopisu se dříve vrací kapitál investovaný do dluhopisu a roste tak možnost reinvestování průběžných plateb, které plynou z dluhopisu,
- změny v tržních úrokových sazbách se potom promítají do změny ceny dluhopisu v menší míře, protože jsou více zohledněny ve výnosech, které plynou z reinvestování průběžných kupónových plateb.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.1.5

Vypočítejte duraci dluhopisu s pevnou kupónovou úrokovou sazbou 7%, jestliže nominální hodnota dluhopisu je 10.000 Kč, doba splatnosti tři roky, aktuální tržní cena dluhopisu je 95.00,25 Kč, a tedy výnosnost do doby splatnosti (tržní úroková sazba) činí 10% (kupónové platby jsou vypláceny jedenkrát ročně, první bude následovat ode dneška za jeden rok).

Řešení příkladu

Výpočet provedeme podle vzorce *(9-16)*:

$$Dur = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} \frac{j \cdot KP_j}{(1+i)^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} \frac{KP_j}{(1+i)^j}} = \frac{\dfrac{1 \cdot 700}{(1+0{,}1)} + \dfrac{2 \cdot 700}{(1+0{,}1)^2} + \dfrac{3 \cdot (10000+700)}{(1+0{,}1)^3}}{\dfrac{700}{1+0{,}1} + \dfrac{700}{(1+0{,}1)^2} + \dfrac{10000+700}{(1+0{,}1)^3}} = 2{,}799951$$

Durace daného dluhopisu je 2,80.

Pro odpověď na otázku, jak se změní cena tohoto dluhopisu při změně tržních úrokových sazeb o 1 %, využijeme vztah *(9-17)*, ze kterého pro absolutní změnu ceny dluhopisu dostaneme:

$$\Delta C = -Dur \frac{\Delta i}{1+i} \cdot C = -2{,}80 \cdot \frac{0{,}01}{1+0{,}1} \cdot 9500{,}25 = -241{,}825$$

Při zvýšení tržních úrokových sazeb o jeden procentní bod dojde k poklesu ceny daného dluhopisu přibližně o 241,825 Kč, to je o 2,418 procentního bodu (vyjádřeno z nominální hodnoty), neboli o 2,545 % vzhledem k tržní ceně dluhopisu.

9.2 Akcie

Akcie je dlouhodobý cenný papír, který představuje podíl na základním kapitálu akciové společnosti.

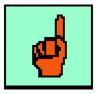
Majitel akcie – **akcionář** – má právo podílet se v souladu s platným zákonem a stanovami společnosti na:

- jejím řízení,

- jejím zisku a
- likvidačním zůstatku při případném zániku společnosti.

Každá akcie musí znít na určitou jmenovitou neboli nominální hodnotu.

Součet nominálních hodnot všech akcií tvoří **základní kapitál** dané akciové společnosti.



Akcie obyčejné neboli kmenové mohou znít:

- **na jméno** a jsou převoditelné rubopisem a předáním akcie nebo
- **na majitele** a převádějí se prostým předáním.

U akcií na jméno vede akciová společnost seznam akcionářů, k účinnosti převodu se vyžaduje zápis o převodu do seznamu akcionářů. Převod takových akcií může být vázán na určité podmínky dané stanovami společnosti.

Vedle obyčejných neboli kmenových akcií, které dávají výše uvedená práva, zákon připouští, že stanovy společnosti mohou určit vydání zvláštního druhu akcií:

- **prioritní akcie**, které dávají svým majitelům přednostní práva týkající se dividendy, nesmí se však jednat o nárok na úrok nezávisle na hospodářských výsledních společnosti.

Stanovy společnosti mohou určit, že s prioritními akciemi není spojeno hlasovací právo.

Součet nominálních hodnot všech prioritních akcií nesmí však překročit **polovinu** základního kapitálu**.**

9.2.1 Základní pojmy a typy akcií

Akcie obyčejné neboli kmenové mohou znít

- **na jméno** a jsou převoditelné rubopisem a předáním akcie,

nebo

- **na majitele** a převádějí se prostým předáním.

U akcií na jméno vede akciová společnost seznam akcionářů, k účinnosti převodu se vyžaduje zápis o převodu do seznamu akcionářů. Převod takových akcií může být vázán na určité podmínky dané stanovami společnosti.

Vedle obyčejných neboli kmenových akcií, které dávají výše uvedená práva, zákon připouští, že stanovy společnosti mohou určit vydání zvláštního druhu akcií:

- **prioritní akcie**, které dávají svým majitelům přednostní práva týkající se dividendy, nesmí se však jednat o nárok na úrok nezávisle na hospodářských výsledních společnosti.

Stanovy společnosti mohou určit, že s prioritními akciemi není spojeno hlasovací právo.

- **Součet nominálních hodnot všech prioritních akcií** nesmí však překročit **polovinu** základního kapitálu**.**

Akcie (stock, share) **je obchodovatelný cenný papír,** s nímž jsou spojena práva akcionáře jako společníka podílet se na:

- řízení společnosti (právo účasti,
- hlasování na valné hromadě akcionářů, právo kontroly),
- zisku společnosti (právo na dividendy),
- likvidačním zůstatku při případném zániku společnosti (právo na likvidační podíl) a případně přednostně,

- nově emitovaných akciích (předkupní nebo odběrní právo).

Nominální hodnota akcie představuje podíl na majetku akciové společnosti vyjádřený právě vlastnictvím akcie.

Součet nominálních hodnot všech akcií je roven výši **základního kapitálu.**

Na rozdíl od obligací se u akcí nominální hodnota někdy vůbec neuvádí (často např. v USA).

Dividenda je podíl na zisku společnosti vyplývající z vlastnictví akcie a odhlasovaný pro dané období valnou hromadou akcionářů.

Výplata dividend

- není předem zaručena
- a jejich forma může být různá (mohou mít mimo jiné formu přednostního odběrního práva na nově emitované akcie).

Akcie lze klasifikovat opět různým způsobem:

- **obyčejná akcie** (**kmenová akcie**, common stock) je klasickým typem akcie zaručující akcionáři výše uvedená práva,
- **prioritní akcie** (preferred stock), které jsou obvykle bez hlasovacího práva,
- **prioritní akcie s pevnou a dodatkovou dividendou** (dodatková dividenda přitom podléhá stejným pravidlům jako dividenda

z obyčejných akcií),

- **kumulativní prioritní akcie**, která kumuluje neproplacené dividendy z let, kdy společnost nevykazuje zisk, do pozdějších příznivých let se ziskem,

- **konvertibilní prioritní akcie**, která může být převedena na obyčejné akcie,

- **zakladatelská akcie** zaručuje obvykle v rámci hlasovacího práva na valné hromadě více hlasů než obyčejná akcie (např. 100 hlasů místo 1 hlasu obyčejné akcie),

- **požitková akci** nezaručuje spolusprávní práva, ale pouze práva majetková,

- **zaměstnanecká akcie**, která je obvykle nepřevoditelná akcie na jméno pro zaměstnance akciové společnosti.

Po formální stránce **obyčejná akcie** obvykle **obsahuje**:

- **plášť akcie**, který uvádí

  - obchodní jméno a sídlo společnosti;
  - nominální hodnotu akcie;
  - výši základního jmění a počet emitovaných akcií;
  - datum emise a podpisy;
  - jméno akcionáře (jen u akcií na jméno registrovaných v knize akcionářů na rozdíl od akcií na doručitele);

- **kupónový arch** s kupóny pro výplatu dividend;

- talón k vydání nového kupónového archu

Prioritní akcie (preferred stock)

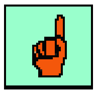
- je obvykle bez hlasovacího práva, ale

- má stanovenu výši dividendy (pokud je dosažen určitý zisk).

Priorita v rámci akciové společnosti je proto většinou následující:

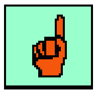
1. kupónové platby z obligací a vůbec umořování úvěrového kapitálu;
2. dividendy z prioritních akcií;
3. dividendy z obyčejných akcií.

S akciemi souvisí určitým způsobem celá řada dalších cenných papírů:



- **zatimní list** (interimní list) se vydává upisovateli akcie proti předepsané záloze, aby se mu vyměnil za akcii, jakmile ji úplně zaplatí
- **odběrní právo** (right) je přednostní právo stávajících akcionářů na koupi nově emitovaných akcií
- **konvertibilní obligace** zaručuje možnost její výměny za akcie,
- **Warrant** emitovaný jako součást obligace zaručuje možnost nákupu akcie za danou cenu,
- **Opce** zakoupená za určitou cenu zaručuje možnost nákupu nebo prodeje akcie za danou cenu.

Emise akcií je umístění nových akcií na kapitálovém trhu. Rozlišuje se:



- **veřejná nabídka prodeje akcií** buď jako

  přímá nabídka veřejnosti, nebo

  zprostředkovaná např. emisními domy či konsorcii bank:

  - **za fixní cenu,** kde jako příklad je možné uvést nabídka akcií v kupónové privatizaci s fixní cenou stanovenou v investičních bodech a s možností anulování v případě převisu,
  - **aukce** jako veřejný prodej, kdy vydražované akcie (obvykle v určitých standardních množstvích, jako např. 1 lot = 100 akcií, 1 part = 1 000 Kč nominální hodnoty) se prodají tomu, kdo nabídne nejvyšší cenu,
  - **tender** znamenající veřejnou soutěž se stanovenou minimální cenou, za kterou lze ještě objednat akcie, zájemci jsou vyzvání

k nabídce vyšších cen a po uzávěrce se jako výsledná stanoví cena, při níž nabídka odpovídá poptávce; zájemci jsou pak za tuto cenu uspokojováni v pořadí podle výše jejich původní nabídky (zaplatí tedy nejvýše to, co nabídli, ale mohou být ve svých požadavcích kráceni),

- **neveřejný prodej** je prodej omezenému většinou předem vytypovanému počtu investorů za dohodnutou cenu.

Zvýšení základního kapitálu lze provést dvěma způsoby (případně jejich kombinací):

1. **emisí nových akcií**, přičemž udržení rozhodujícího vlivu stávajících akcionářů na řízení společnosti lze v tomto případě zajistit např. pomocí odběrních práv,

2. **převedením části vlastního kapitálu** převyšující základní kapitál (především z docíleného zisku) do základního kapitálu, čímž se zvýší nominální hodnota stávajících akcií, což se technicky zajistí okolkováním akcí nebo jejich výměnou za nové. Zvýšení základního kapitálu musí schválit valná hromada.

Štěpení akcií (stock split) zvyšuje počet akcií při neměnné výši základního kapitálu. Např. štěpení „2 za 1“ znamená, že 20.000 akcií v nominální hodnotě 10.000 Kč bude nahrazeno 40.000 akciemi v nominální hodnotě 5.000 Kč. Důvodem dělení je pozitivní odezva veřejnosti na „hmatatelný“ důkaz prosperity akciové společnosti. Vedle tohoto psychologického faktoru se také často snížením ceny dostanou akcie do cenového pásma více žádaných cenných papírů.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.2.1

Akcie společnosti nechť měla k 1.1. 1998 cenu 6 550 Kč. K 31.12.1998 její cena byla 680 Kč, přičemž během daného roku proběhlo štěpení akcií 10 za 1 na konci roku se vyplatila dividenda 30 Kč na jednu akcii. Jaká byla míra zisku z této akcie za rok 1998?

Řešení příkladu

Hledaná míra zisku i musí podle vztahu *(4-1)* zřejmě splňovat rovnici (desetinásobek ceny akcie a příslušné dividendy na pravé straně rovnice je zde právě vzhledem k štěpení akcií):

$$6550 \cdot (1 + i) = 10 \cdot (680 + 30)$$

Odtud je $$i = \frac{10 \cdot (680 + 25)}{6550} - 1 = 0{,}08397$$

Míra zisku společnosti za rok 1998 byla 8,4 %. *

Výplata dividend je deklarována valnou hromadou v určitých termínech (např. ročně). Stanovuje se:

- **datum deklarace**, tj. valná hromada schvaluje výplatu dividendy;
- **datum bez dividendy** (nebo-li tzv. datum ex-dividenda), tzn. že nový majitel akcie již nemá právo na nejbližší dividendu;
- **datum zápisu** znamená, že je vyhotoven konečný seznam akcionářů oprávněných k inkasování dividendy;
- **datum platby**, tj. dividendy jsou odeslány na příslušné adresy nebo konta.

Cena akcie

S veřejně obchodovatelnými akciemi se obchoduje na sekundárním kapitálovém trhu **za tržní ceny (kurzy akcií)**, které jsou obecně výsledkem vztahu nabídky a poptávky na trhu.

Cena jedné akcie je vyjadřována (na rozdíl od dluhopisů) **v absolutní výši**, to znamená u nás v korunách.

Výše ceny akcie je ovlivňována řadou nejrůznějších faktorů nejen ekonomických, ale i politických či psychologických. Proto určit teoreticky správnou cenu akcie a odhadnout její chování není jednoduchou záležitostí. Snaží se o to celá řada metod.

Základní způsoby určení ceny akcie:

- **fundamentální akciová analýza** je založena na zkoumání faktorů, působících na cenu akcie a na její vývoj na úrovni makroekonomické, odvětvové i na úrovni jednotlivých společností a jejich vlivu na cenu akcie. Výsledkem je stanovení určité **vnitřní hodnoty akcie** jako teoreticky správné ceny akcie.

- **technická akciová analýza** vychází na rozdíl od fundamentální analýzy ze zkoumání vývoje na trhu (vývoj cen, objem obchodů atd.), snaží se z něj **odvodit určité trendy** a podle nich předpovídat krátkodobé pohyby v ceně akcie. Nezaměřuje se tedy na stanovení nějaké správné ceny akcie, ale spíše na identifikaci změn v cenách akcií v krátkém období.

- **psychologická analýza** se soustředí na analýzu **psychologie chování investorů**, která je považována za velmi významný faktor, který ovlivňuje cenu akcie.

- **akciová analýza** založená na **teorii efektivních trhů** vychází z toho, že ceny akcií okamžitě odrážejí všechny dostupné cenotvorné informace, vývoj cen akcií je náhodný, a nemá tedy smysl hledat teoreticky správnou cenu.

9.2.2 Dividendový diskontní model

Dividendový diskontní model patří mezi metody výpočtu vnitřní hodnoty akcie, který patří mezi výše zmíněné metody tzv. fundamentálních akciových analýz.

Vychází z toho, že vnitřní hodnota akcie je současnou hodnotou veškerých budoucích příjmů, plynoucích z akcie jejímu majiteli.

Majiteli akcií mohou z akcie plynout příjmy jednak ve formě

- dividend, jednak z
- prodeje akcie.

Pokud předpokládáme, že budeme akcii držet po dobu jednoho roku, můžeme **vnitřní hodnotu akcie** stanovit jako:

$$VH = \frac{D_1 + C_1}{1 + i} \qquad (9\text{-}18)$$

kde

VH je vnitřní hodnota akcie,

D_1 je očekávaná dividenda na konci prvního roku,

C_1 je očekávaná cena akcie na konci prvního roku,

i je úroková míra, resp. požadovaná výnosnost.

Cenu akcie na konci prvního roku můžeme určit zcela shodným způsobem, což znamená opět jako současnou hodnotu budoucích příjmů z akcie, kterými v časovém horizontu jednoho roku jsou opět dividendy a cena akcie na konci roku, za kterou ji můžeme prodat.

$$C_1 = \frac{D_2 + C_2}{1 + i} \qquad (9\text{-}19)$$

kde

D_2 je očekávaná dividenda na konci druhého roku,

C_2 je očekávaná cenana konci druhéhoho roku,

C_1 je očekávaná cena akcie na konci prvního roku,

i je úroková míra, resp. požadovaná výnosnost.

Stejným způsobem jako v předcházejícím odstavci určíme cenu na konci druhého roku a dále pak na konci každého dalšího roku.

Dosadíme-li potom do vztahu *(9-18)* výši prodejní ceny na konci prvního roku podle vztahu *(9-19)* a budeme postupovat analogicky i pro další roky, můžeme **vnitřní hodnotu akcie pro n-let** vyjádřit takto:

$$VH = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \frac{D_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{D_n + C_n}{(1+i)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+i)^j} + \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad (9\text{-}20)$$

kde

D_j, D_n je očekávaná dividenda na konci j-tého , resp. n-tého roku,

C_n je očekávaná cena na konci n-tého roku,

i je úroková míra, resp. požadovaná výnosnost.

Vzhledem k tomu, že akcie je majetkovým cenným papírem a nemá stanovenou splatnost, musíme **pro stanovení vnitřní hodnoty** uvažovat **s nekonečně dlouhou dobou**.

V tomto případě je současná hodnota ceny akcie na konci n-tého roku nulová a vnitřní hodnotu akcie potom můžeme zapsat jako:

$$VH = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{(1+i)^j} \qquad (9\text{-}21)$$

Při praktickém využití se obvykle neodhaduje absolutní výše dividend v jednotlivých letech, ale spíše **očekávaný růst dividend**.

V případě **konstantního růstu dividend** pro dividendu na konci j-tého roku platí:

$$D_{j+1} = D_j \cdot (1+g) \qquad (9\text{-}22)$$

kde

D_{j+1} je očekávaná dividenda na konci $j+1$-vého,

D_j je dividenda na konci j-tého roku,

g je konstantní roční míra růstu dividend.

Odtud pak dostaneme vztah pro **vnitřní hodnotu akcie**:

$$VH == \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_0 \cdot (1+g)^j}{(1+i)^j} = D_0 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cdot (1+g)^j}{(1+i)^j} \qquad (9\text{-}23)$$

kde

VH vnitřní hodnota akcie,

D_0 je dividenda na konci *minulého* roku,

g je konstantní roční míra růstu dividend,

i je diskontní míra.

Za předpokladu, že **diskontní míra je vyšší než očekávaná konstantní míra růstu dividend (*i*>*g*)**, můžeme s využitím vzorce pro výpočet součtu nekonečné řady vyjádřit výši vnitřní hodnoty akcie při konstantní očekávané míře růstu dividend jako:

$$VH = D_0 \cdot \frac{1+g}{i-g} \qquad (9\text{-}24)$$

Ze vztahu *(9-22)* dosadíme za D_0 a dostáváme, že platí:

$$VH = \frac{D_1}{i-g} \qquad (9\text{-}25)$$

Za zvláštní případ lze považovat situaci, kdy budeme očekávat konstantní absolutní výši dividend v jednotlivých letech, neboli budeme očekávat nulový růst dividend, pak pr vnitřní hodnotu akcie bude platit:

$$VH = \frac{D}{i}, \tag{9-26}$$

kde

D je konstantní absolutní výše dividend v jednotlivých letech,

i je požadovaná roční míra, nebo též výnosnost.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.2.2

Stanovte vnitřní hodnotu akcie firmy za předpokladu, že očekáváte výši dividendy na konci prvního roku 60 Kč a uvažujete 11% požadovanou míru výnosnosti, přičemž předpokládáte

a) konstantní absolutní výši dividend v jednotlivých letech,

b) konstantní růst roční míru dividend ve výši 9 %.

Řešení příkladu

Ad a) V případě konstantní absolutní výše dividend je podle vzorce *(9-26)*

$$VH = \frac{D}{i} = \frac{60}{0{,}11} = 545{,}45$$

Vnitřní hodnota akcie při konstantní absolutní výše dividend je 545 Kč.

Ad b) V případě konstantního růstu roční míry dividend vypočteme vnitřní hodnotu akcie podle vztahu *(9-25)*

$$VH = \frac{D_1}{i-g} = \frac{60}{0{,}11-0{,}09} = 3000$$

Vnitřní hodnota akcie v případě konstantního růstu roční míry dividend činí 3.000Kč.

*

9.2.3 Ziskové modely

Ziskové modely vycházejí při hledání vnitřní hodnoty akcie z ukazatele poměru mezi cenou a ziskem na jednu akcii, pro který často používáme anglické označení *price-earnings ratio* (P/E) a definujeme ho jako:

$$P/E = \frac{P}{E}, \tag{9-27}$$

kde

P/E je ukazatel *price-earnings ratio*,

P je tržní cena akcie,

E je čistý zisk připadající na jednu akcii.

Při využití ukazatele P/E k výpočtu vnitřní hodnoty akcie postupujeme tak, že nejprve odhadneme určitou normální hodnotu P/E. K tomu lze využít např. metoda založená na dividendovém diskontním modelu, kterou máme popsánu v předcházející kapitole 9.2.2.

Vnitřní hodnotu akcie pak dostaneme jako součin normální hodnoty ukazatele P/E a očekávaného zisku na jednu akcii v následujícím roce, tj.:

$$VH = E_1 \cdot P/E_{norm} \tag{9-28}$$

kde

VH je vnitřní hodnota akcie,

P/E_{norm} je normální hodnota ukazatele P/E,

E_1 je očekávaný zisk na jednu akcii v následujícím roce.

9.2.4 Předkupní právo

Akciová společnost může zvýšit svůj základní kapitál emisí nových, tzv. **mladých akcií**. Aby se v důsledku toho nesnížil podíl stávajících akcionářů ve společnosti, získávají akcionáři předkupní právo na nákup mladých akcií v poměru, v jakém se podíleli na dosavadním základním jmění akciové společnosti.

Nárok na získání předkupního práva získávají všichni akcionáři, kteří drží akcie. Pro určení, zda je či není se zakoupenou akcií spojeno předkupní právo, je rozhodující tzv. **datum ex-předkupní právo** (dále rovněž je zkráceně použito ex-datum). Nový majitel akcie, který by ji zakoupil v tento den a později, již se zakoupenou akcií nezískává nárok na předkupní právo na mladé akcie.

Dosavadní akcionáři mají na základě předkupního práva nárok na zakoupení mladých akcií, nikoliv však povinnost. Předkupní právo mohou uplatnit během tzv. **upisovací (odbírací) lhůty**. Během této lhůty může dosavadní akcionář předkupní právo také prodat. Upisovací cena, za kterou může majitel předkupního práva zakoupit mladé akcie, je totiž obvykle nižší než aktuální kurz akcie na trhu. Pokud by předkupní právo nebylo během upisovací lhůty využito, propadá a stává se bezcenným.

Na jednu dosavadní akcii obvykle připadá jedno předkupní právo, na zakoupení jedné mladé akcie je zapotřebí tolik předkupních práv, kolik určuje tzv. **upisovací poměr**, který je definován jako poměr dosavadního objemu základního kapitálu a objemu zvýšení základního kapitálu odpovídajícího nově emitovaným mladým akciím, to znamená:

$$UP = \frac{ZK}{\Delta ZK} \qquad (9\text{-}29)$$

kde

UP je upisovací poměr,

ZK je původní výše základního kapitálu,

ΔZK je rozdíl zvýšení základního kapitálu emisí mladých akcií.

Pokud je nominální hodnota všech původních i mladých akcií stejná, lze výši základního kapitálu vyjádřit jako součin nominální hodnoty jedné akcie a počtu všech akcií. **Upisovací poměr** je potom:

$$UP = \frac{NH \cdot k}{NH \cdot m} \qquad (9\text{-}30)$$

kde

UP je upisovací poměr,

NH je nominální hodnota jedné akcie,

k, m je počet původních, resp. mladých akcií.

Předkupní právo (right of refusal)dává možnost zakoupit mladé akcie za výhodnější kurz, než je aktuální kurz na trhu, potom má předkupní právo též určitou cenu.

Před datem ex-předkupní právo můžeme teoretickou **cenu předkupního práva** jako součást ceny akcie odvodit ta, že pokud bychom chtěli v této době získat akcii, můžeme tak v zásadě učinit dvojím způsobem:

- koupit akcii na trhu za aktuální promptní kurz P, nebo
- zakoupit odpovídající počet předkupních práv, které odpovídají upisovacímu poměru UP a na jejich základě poté zakoupit mladou akcii za upisovací cenu UC.

Rozdíl těchto dvou variant je v tom, že při P získáme při koupi akcie před ex datem zároveň s akcií i nárok na předkupní právo. Ve druhém případě však s mladou akcií již nezískáme nic dalšího.

Rozdíl těchto dvou alternativ je právě v ceně předkupního práva:

$$PC_{pp}-(C_{pp}\cdot UP+UC)= C_{pp} \qquad (9\text{-}31)$$

kde

PC_{pp} je promptní cena akcie s předkupním právem,

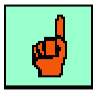
C_{pp} je cena předkupního práva,

UC upisovací cena,

UP je upisovací poměr.

Cenu **před datem ex - předkupního práva** vyjádříme z výše uvedeného vztahu jako:

$$C_{pp} = \frac{PC_{pp} - UC}{UP + 1} \tag{9-32}$$



V den nebo po datu ex-předkupní právo se situace mění tím, že zakoupením akcie za promptní kurz již nový majitel nezískává nárok na předkupní právo.

V ceně akcie proto už není cena předkupního práva obsažena. Předkupní právo se pak obchoduje odděleně od akcií. V tomto případě jsou výše uvedené alternativy získání akcie (přímé zakoupení akcie nebo zakoupení příslušného počtu předkupních práv a následná koupě akcie za upisovací cenu) v podstatě ekvivalentní. Bude proto platit:

$$PC_{ex}-(C_{pp}\cdot UP+UC)=0 \tag{9-33}$$

Po úpravě dostaneme výši ceny předkupního práva:

$$C_{pp} = \frac{PC_{ex} - UC}{UP} \tag{9-34}$$

kde

PC_{ex} je promptní cena akcie bez předkupního práva,

C_{pp} je cena předkupního práva po ex-datu,

UC upisovací cena,

UP je upisovací poměr.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9.2.3

Valná hromada akciové společnosti rozhodla o zvýšení základního kapitálu o 44 mil. Kč formou emise nových akcií se shodnou nominální hodnotou. Nynější základní kapitál činí 156 mil. Kč a je rozdělen do akcií s nominální hodnotou 1.000 Kč. Jaká bude teoretická cena předkupního práva před ex-datem a po něm za předpokladu, že cena akcie před ex-datem byla 1.500 Kč, po ex-datu poklesla na 1.450 a upisovací cena byla stanovena na 1 200 Kč.

Řešení příkladu

Podle vzorce *(9-29)* vypočteme cenu upisovacího poměru jako

$$UP = \frac{ZK}{\Delta ZK} = \frac{176000000}{44000000} = 4$$

Cenu předkupního práva před ex-datem vypočteme podle vztahu *(9-32)*

$$C_{pp} = \frac{PC_{pp} - UC}{UP + 1} = \frac{1500 - 1200}{4 + 1} = 60 \text{, pak}$$

teoretická cena předkupního práva před ex-datem je 60 Kč.

Teoretickou cenu předkupního práva po ex-datu vypočítáme pak podle vzorce *(9-34)*

$$C_{pp} = \frac{PC_{ex} - UC}{UP} = \frac{1450 - 1200}{4} = 62{,}5$$

Teoretická cena předkupního práva po ex-datu je 62.50 Kč. *

9.2.5 Výnos z akcií a jeho měření

Finanční investice do akcií mohou přinášet investorům výnosy ve třech formách:

- dividendy jako podíl na zisku společnosti,
- kapitálový výnos, plynoucí ze zvýšení ceny akcie během doby její držby,
- příjmy plynoucí z prodeje či realizace předkupních práv.

Nejjednodušším ukazatelem vyjadřujícím výnosnost investování do akcie za dobu její držby je tzv. **běžná výnosnost akcie**.

Běžná výnosnost je definována jako následující poměr:

$$i_b = \frac{D}{P_0} \tag{9-35}$$

kde

i_b je běžná výnosnost akcie,

D je dividenda na jednu akcii,

P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena.

Problémem předcházejícího ukazatele je, že v sobě zahrnuje pouze výnos, který plyne z vyplacených dividend, neobsahuje tedy kapitálový výnos. Proto je přesnější a častěji užívaná **celková výnosnost investice do akcií**, která je definována jako:

$$i_c = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0} \tag{9-36}$$

kde

i_c je celková výnosnost akcie,

D je dividenda na jednu akcii,

P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena,

P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána.

V případě, že během držby akcie připadne na akcii nárok na předkupní právo, pak **výnos z prodeje tohoto předkupního práva** je součástí výnosů investora a vzorec pro **celkovou výnosnost** můžeme zapsat ve tvaru:

$$i_c = \frac{(P_1 - P_0) + D + C_{pp}}{P_0} \qquad (9\text{-}37)$$

kde

i_c je celková výnosnost akcie,

D je dividenda na jednu akcii,

C_{pp} je cena předkupního práva připadajícího na jednu akcii během její držby,

P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena,

P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána.

Vzorec *(9-36)* měří celkovou výnosnost za dobu držby akcie. Pro srovnání s jinými investicemi je často zapotřebí přepočítat výnosnost na stejný časový úsek, standardně se uvažuje roční období.

Celkovou výnosnost na roční bázi můžeme vyjádřit dvojím způsobem:

1. **s využitím jednoduchého úročení** můžeme vyjádřit celkovou výnosnost jako

$$i_c(p.a.) = \frac{(P_1 - P_0)}{P_0 \cdot n} \tag{9-38}$$

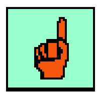
kde

i_c	je celková výnosnost akcie na roční bázi,
D	je dividenda na jednu akcii,
n	je doba držby akcie v letech,
P_0	je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena,
P_1	je tržní cena akcie, za kterou byla prodána.

2. **s využitím složeného úročení** můžeme vyjádřit celkovou výnosnost na roční bázi jako:

$$i_c(p.a.) = \sqrt[n]{\frac{P_1 + D}{P_0}} - 1 \tag{9-39}$$

Symboly nejsou znovu nepopsány, neboť jejich význam je tentýž jako v předchozím odstavci.



Doposud uvedené vzorce pro výpočet výnosnosti neuvažují jeden důležitý faktor, kterým je **zdanění**. Jedná se tedy dosud o hrubou výnosnost. Investora ovšem zajímá, jaký je konečný efekt plynoucí z investice, to znamená **čistá výnosnost,** která v sobě zohledňuje i vliv zdanění výnosu, který plyne z investice do akcií.

Podle platného zákona o dani z příjmu podléhají u nás výnosy z akcií následujícímu zdanění:

- kapitálové výnosy, plynoucí z rozdílu mezi prodejní a kupní cenou akcie, patří mezi ostatní příjmy a vcházejí do celkového daňového základu investora, jestliže doba od zakoupení do prodeje **přesáhne dobu šesti měsíců**, potom jsou pro fyzické osoby **od daně**

osvobozeny,

- příjmy z prodeje **předkupního práva** patří mezi kapitálové příjmy investora a vcházejí do celkového daňového základu investora, to tedy znamená, že podléhají dani z příjmů.

9.2.6 Kvantitativní a poměrové ukazatele ovlivňující akciové kurzy

Pod pojmem **kvantitativní ukazatele,** které ovlivňující akciové kurzy**,** máme na mysli:

- nominální hodnotu akcie,
- výši dividendy, (viz kap.9.2.3),
- stav nabídky a poptávky.

Pod pojmem **poměrové ukazatele,** které ovlivňující akciové kurzy**,** máme na mysli:

- běžnou výnosnost akcie,
- P/E= cena akcie/zisk po zdanění (viz kap.10.2.4), kterou lze interpretovat tak, že daná akcie se při nezměněných podmínkách za např. 4 roky,
- výplatní poměr=dividenda (na 1 akcii)/zisk po zdanění (na 1 akcii) a udává, jak velká část zdaněného zisku na jednu akcii se vyplácí jako dividenda.

KONTROLNÍ OTÁZKA 9

1. Vysvětlete pojem obligace.
2. Vysvětlete pojem akcie.
3. Vysvětlete, co je rendita.
4. Co to je durace.

5. Co znamená předkupní právo.

6. Co to je běžná výnosnost a co celková výnosnost.

KORESPONDENČNÍ ÚKOL 9

PŘÍKLADY:

1) Máme diskontovanou obligaci, jejíž cena je 900 Kč, nominální hodnota 1.000 Kč a doba splatnosti 1 rok. Vypočtěte výnos do doby splatnosti.

2) Akciová společnost se základním kapitálem ve výši 500 mil. Kč rozdělených na 100.000 akcií se rozhodla zvýšit základní kapitál o 100 mil. emisí mladých akcií se stejnou nominální hodnotou jako staré akcie. Jaký bude upisovací poměr.

3) Předpokládejte, že jste koupili akcii v nominální hodnotě 1000 Kč za cenu 1200 Kč, po jednom měsíci jste ji prodali za 1300 Kč, během této doby jste navíc obdrželi 10% dividendu. Jaká byla celková výnosnost této investice?

TUTORIÁLY

Ve dvouhodinovém setkání se studenty budu zodpovídat a především vysvětlovat vše, co se nadalo zvládnout prostřednictvím internetu. Budou to především:

- kapitola 5 – Spoření,
- kapitola 6 – Důchody,

kde bychom si i ukázali výpočty dalších příkladů podle vašich požadavků.

DALŠÍ ZDROJE

[1] RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P.:Finanční matematika pro každého, Praha, GRADA Publishing, 2001. SBN 80-247-9015-7.

[2] CIPRA, T.: Finanční matematika v praxi, Praha, HZ, 1994. SBN 80-901495-6-1.

[3] CIPRA, T.: Pojistná matematika v praxi, Praha, Ekopress 1999. SBN 80-86119-17-3.

[4] CIPRA, T.: Pojistná matematika, teorie a praxe, Praha, Ekopress 1999. SBN 80-86119-17-3.

[5] CIPRA, T.: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Praha, EDICE HZ 1995. ISBN 80-901918-0-0.

[6] ARTL, J., ARTLOVÁ, M.: Finanční časové řady. Praha, Grada 2003. ISBN 80-247-0330-0.

[7] PIDÁNY, J., KAFKOVÁ, E., KYSEL‘OVÁ, V. Poisťovníctvo,

Košice: Royal Unicorn, 1999. ISBN 80-968128-1-5.

[8] PACÁKOVÁ, V.: Aplikovaná poistná štatistika.. Bratislava, Elita 2000. ISBN 80-8044-073-5.