Finanční a pojistná matematika

Otázy k SZZ
Jednoduché, složené úročení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

FIU/BPFPM
Ing. Roman Hlawiczka, Ph.D.
Katedra financí a účetnictví

Okruhy k SZZ

1. Úrok a úroková míra ve finanční matematice

- Úroková míra a faktory, které ovlivňují úrokovou míru, efektivní úroková míra, nominální a reálná úroková míra, časová hodnota peněz, riziko a klasifikace rizik, finanční riziko a jeho definice, finanční portfolio a jeho analýza.

2. Jednoduché a složené úročení a příklady jejich použití

- Základní rovnice jednoduchého úročení, jednoduché úročení polhůtní, současná a budoucí hodnota při jednoduchém úročení. Úrokové číslo a úrokový dělitel. Jednoduché úročení předlhůtní, diskont. Využití jednoduchého úročení v praxi.
- Základní rovnice složeného úročení. Kombinace jednoduchého a složeného úročení. Výpočet doby splatnosti při složeném úročení, současné hodnoty a výnosnosti. Srovnání jednoduchého a složeného úročení. Využití složeného úročení v praxi.

3. Krátkodobé cenné papíry.

- Krátkodobé cenné papíry, příklady a definice těchto cenných papírů. Eskont směnky. Durace, cena a kurz dluhopisu, cena a kurz akcie, předkupní právo. Výpočet výnosnosti cenných papírů.

4. Spoření a důchody ve finanční matematice a příklady jejich použití.

5. Dluhopisy a stavení ceny dluhopisu.

- Durace, cena a kurz dluhopisu.

6. Akcie a stanovení ceny akcie.

- cena a kurz akcie, předkupní právo.

7. Základní výpočty devizových kurzů

- Determinace, devizového kurzu, přímá a nepřímá kotace devizových kurzů, interpretace pohybu devizových kurzů, výpočet spreadu, výpočet dvoucestné kotace a středového kurzu, výpočty křížového devizového kurzu, devizové riziko a jeho zajištění.

Aplikace jednoduchého úročení

V praxi se používají oba způsoby jednoduchého úročení. Krátkodobé cenné papíry, jejichž doba splatnosti je kratší než jeden rok, bývají obchodovány na principu jednoduchého diskontu, zatímco při tvorbě uzávěrek běžných či kontokorentních účtů se používá polhůtního způsobu úročení.

Běžný účet

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Existují tři způsoby, jak provádět uzávěrku na běžném účtu:

1. **Zůstatkový způsob (anglický)**
   Zůstatky na účtu jsou úročeny vždycky za dobu, po kterou skutečně byly na účtu uloženy. Pro úrok u, který bude na konci roku připsán na účet, platí při úrokové míře i

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD},$$

   kde $UC_j, j = 1, \ldots, n$ jsou úroková čísla za j-tou dobu, po kterou byl zůstatek na účtu uložen.

Příklad

Proveďte uzávěrku běžného účtu, na kterém byly zaznamenány následující pohyby (viz tabulka)

Úroková míra činí 1,5% p.a., použijte standard ACT /360. Pro jednoduchost upouštíme od danění připsaného úroku.

Řešení:

Úroková čísla U C a úrokový dělitel U D byly vypočteny

Pohyby na běžném účtu

Datum	Příjmy (Kč)	Výdaje (Kč)	Zůstatek (Kč)
12.1.	16 000	-	16 000
25.5.	-	7 000	9 000
4.10.	15 000	-	24 000
31.12.	-	-	24 000

Účtování zůstatkovým způsobem

Zůstatek (Kč)	Počet dní	UC
16 000	133	21 280
9 000	132	11 880
24 000	88	21 120
Σ	-	54 280

$$UC = \frac{16000 \cdot 133}{100} = 21280,$$

$$UD = \frac{360}{1,5} = 240.$$

Úrok, který bude na účet koncem roku připsán, bude roven hodnotě

$$u = \frac{54280}{240} = 226,20 \text{ (Kč)}.$$

Sečtením posledního zůstatku 24 000 Kč a připsaného úroku dostaneme konečný zůstatek. Jeho hodnota tedy je 24 226,20 Kč.

Postupný způsob (německý)

Úroky z jednotlivých položek jsou počítány za dobu od data, kdy se na účtu objevily (toto datum nepočítáme), až do konce roku. U položek ze sloupce Dal budou mít příslušná úroková čísla kladné znaménko, u položek ze sloupce Má dáti záporné znaménko. Výše úroku připsaného na účet na konci roku činí

$$u = \frac{\sum UC_{Dal} - \sum UC_{Má\ dáti}}{UD}.$$

Účtování postupným způsobem

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Datum	Má dáti	Dal	Dny	UC
12.1.	-	16 000	353	56 480
25.5.	7 000	-	220	15 400
4.10.	-	15 000	88	13 200
Zůst.k 31.12.	-	24 000	-	-

Příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Proveďte uzávěrku běžného účtu z předchozího příkladu postupným způsobem.
Úroková míra a standard zůstávají stejné.

Řešení

Úrok vypočteme podle vzorce (10):

$$u = \frac{56480 - 15400 + 13200}{240} = 226,20\ (\text{Kč}).$$

Konečný zůstatek na účtu je 24 226,20 Kč.

Zpětný způsob (francouzský)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Postup výpočtu úroku je opačný než u německého způsobu. Úroky jsou počítány od zvoleného data epochy (např. 1.1.) až do data změny na účtu včetně. Znaménka úrokových čísel pro položky Dal jsou záporná a pro položky Má dáti kladná. Úrokové číslo náležející zůstatku ze dne 31.12. má však kladné znaménko. Celkový připsaný úrok bude

$$u = \frac{\sum UC_{Má\ dáti} - \sum UC_{Dal} + UC_{31.12.}}{UD}.$$

Příklad

Proveďte uzávěrku běžného účtu z předchozího příkladu zpětným způsobem. Úroková míra je 1,5%p.a.

Zvolme 1. leden jako datum epochy. Pak pohyby na účtu a jim odpovídající počty dnů a úroková čísla jsou následující (viz tabulka):

Úrok vypočteme podle vzorce

$$u = \frac{10150 - 1920 - 41550 + 87600}{240} = 226,20\ (\text{Kč}).$$

Konečný zůstatek na účtu je 24 226,20 Kč.

Účtování zpětným způsobem

Datum	Má dáti	Dal	Dny	UC
12.1.	-	16 000	12	1920
25.5.	7 000	-	145	10 150
4.10.	-	15 000	277	41 550
31.12.	-	24 000	365	87 600

Kontokorentní účet

Tento typ účtu nabízí klientovi banky možnost přechodně přejít z kladných zůstatků do záporných (do debetu) s tím, že je předem dohodnuta maximální výše debetu. Klient takto získává krátkodobou půjčku, která bývá v praxi označována jako kontokorentní úvěr. V souvislosti s poskytováním těchto
úvěrů je potřeba se dále seznámit s následujícími pojmy

- úvěrový rámec (UR) - maximální povolený debet na účtu,
- kreditní úrok - úrok z kladných zůstatků připsaný ve prospěch majitele účtu,
- debetní úrok - úrok ze záporných zůstatků, které nejsou větší než sjednaný úvěrový rámec,
- pohotovostní provize - náklady vzniklé v důsledku sjednaného, avšak nečerpaného úvěru; patří sem pohotovostní provize z nečerpaného úvěrového rámce (NU),
- provize za překročení úvěrového rámce (PR) - sankční úrok při porušení sjednané výše úvěrového rámce

Uzávěrku kontokorentního účtu provádíme tak, že postupně vypočteme výši kreditních úroků, debetních úroků a provizí - pomocí úrokových čísel a příslušných úrokových dělitelů. K tomu je daná kreditní úroková míra ic, debetní úroková míra id a dále sazby pro pohotovostní provizi z nečerpaného úvěru pN U a pro sankční úrok v případě překročení úvěrového rámce pP R. Kreditní a debetní úroky, pohotovostní provize z nečerpaného úvěrového rámce a provize za překročení úvěrového rámce pro příslušný stav účtu se vypočítají zůstatkovým způsobem.
Konečný zůstatek k poslednímu dni v roce získáme přičtením kreditních úroků k poslednímu zůstatku a odečtením úrokových nákladů (debetní úroky, provize), případně dalších poplatků.

Aplikace jednoduchého diskontování

Jednoduché diskontování nachází uplatnění při obchodování s krátkodobými cennými papíry.

Typickým příkladem těchto cenných papírů jsou pokladniční poukázky a směnky, někdy k nim řadíme i depozitní certifikáty.

Krátkodobé cenné papíry jsou obchodovány na peněžním trhu

Pokladniční poukázky, depozitní certifikáty

Pokladniční poukázky jsou krátkodobé cenné papíry s dobou splatnosti od 14 dní až po několik měsíců, které emitují státní orgány v případě deficitu ve státním rozpočtu. Díky krátké době splatnosti jsou pokladniční poukázky velmi likvidní, tj. snadno přeměnitelné v hotovost, ale, vzhledem ke státní garanci z nich plyne jen nižší úrokový výnos

Depozitní certifikát je cenný papír, často obchodovaný na diskontním principu, kterým je potvrzen vklad při jisté úrokové míře na jistou dobu, zpravidla nepřekračující jeden rok. Depozitní certifikáty vystavují banky. Jejich prodejem (za cenu rovnou nominální hodnotě snížené o diskont) tak získávají kapitál, který lze považovat za úvěr, splatný ve výši nominální hodnoty certifikátu v době splatnosti.

Výpočet ceny P pokl. poukázky a dep. certifikátu před dobou splatnosti

$$P = S(1 - dt),$$

kde S je nominální hodnota cenného papíru, d roční diskontní míra a t je zbytková doba splatnosti

Příklad

Určete cenu, za kterou lze koupit pokladniční poukázky s nominální hodnotou 10 000 Kč, dobou splatnosti 90 dní při diskontní míře 5,5% p.a

Řešení

$$P = 10000(1 - 0,055\frac{90}{360}) = 9862,50\ (\text{Kč}).$$

Pokladniční poukázky lze koupit za 9 862,50 Kč

Složené úročení

Na rozdíl od jednoduchého úročení budeme v případě složeného úročení předpokládat, že počáteční kapitál K0 je úročen po dobu tvořenou více úrokovými obdobími, kde úrokové období je jeden rok. Úrok bude ke vkladu připsán vždy na konci roku a následující rok bude znovu spolu s vkladem úročen, vzniknou tedy úroky z úroků. Vzhledem k době připisování úroků půjde o polhůtní (roční) složené úročení. Předlhůtní složené úročení nemá v praxi využití, nebudeme se jím dále zabývat.

Základní rovnice složeného úročení

K0 je počáteční kapitál. Zajímá nás, jak se změní jeho výše za n let, kde n je celé kladné číslo, jestliže úroky byly připisovány vždy na konci roku a další rok znovu úročeny při neměnné úrokové míře i. Postup odvození je uveden v tabulce

Základní rovnice pro složené úročení je uvedena v posledním řádku tabulky, tedy

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

kde K_n je splatná částka na konci n-tého roku. Částky K_j ,
$j = 1, \ldots, n$, na
konci i-tého roku tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem
1+i, který se nazývá úrokovací faktor neboli úročitel. Úročitel
můžeme interpretovat jako budoucí hodnotu jednotkového
kapitálu na konci roku.

Příklad

Jak vzroste částka 10 000 Kč uložená na účtu po dobu 5 let při ročním složeném úročení? Úroková míra je 10% p.a

Řešení

Budeme počítat hodnotu K5 podle základní rovnice pro složené úročení

$$K_5 = 10000(1 + 0,1)^5 = 16105,10 \text{ (Kč)}.$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16 105,10 Kč.

Tabulka - Odvození základní rovnice složeného úročení

Rok	Stav na konci roku
1	$K_1 = K_0(1+i)$
2	$K_2 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	$K_3 = K_2(1+i) = K_0(1+i)^3$
.	.
.	.
n	$K_n = K_0(1+i)^n$

Současná a budoucí hodnota kapitálu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Z hlediska času je částka Kn budoucí hodnotou počátečního kapitálu K0 a, naopak, částka K0 je současnou hodnotou splatné částky Kn. Současnou hodnotu K0 vypočítáme ze základní rovnice

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n} = K_n \left(\frac{1}{1+i}\right)^n,$$

podíl 1
1+i se nazývá diskontní faktor neboli odúročitel. V literatuře se často značí jako v, tj

$$v = \frac{1}{1+i},$$
$$K_0 = K_n v^n,$$

Příklad

Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom z něj za 3 roky mohli vybrat 20 000 Kč? Úroková míra je 6% p.a

Řešení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Částka, kterou budeme dnes ukládat, představuje současnou hodnotu částky 20 000 Kč. Podle vztahu dostaneme

$$K_0 = 20000 \frac{1}{(1+0,06)^3} = 16792,40 \text{ (Kč)}.$$

Na účet dnes musíme složit 16 792,40 Kč

Výpočet doby splatnosti

Dobu splatnosti při složeném úročení vypočteme ze základní rovnice použitím následujících matematických úprav:

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n\ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln(1+i)}$$

Poznámka:
Doba splatnosti nemusí vyjít v podobě celého čísla

Výpočet úrokové míry

Úrokovou míru odvodíme též ze základní rovnice.

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1+i$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Příklad

Jak velká byla úroková míra, která zúročila vklad 9 000 Kč na 12 500 Kč za 3 roky při ročním složeném úročení?

Řešení:

$$i = \sqrt[3]{\frac{12500}{9000}} - 1 = 0,1157.$$

Úroková míra činila 0,115 7, tj. 11,57% p.a

Úroková období

Úrokové období	m
roční	1
pololetní	2
čtvrtletní	4
měsíční	12
týdenní	52
denní	365

Smíšené úročení

Smíšené úročení je kombinací složeného a jednoduchého úročení v případě, že doba splatnosti n zde není vyjádřena celým kladným číslem, nýbrž je dána jako součet celého počtu úrokových období nm a zbytku l, který je kratší než jedno úrokové období. Po dobu nm jsou úroky připisovány vždy na konci úrokového období a v dalším období znovu úročeny, pouze na konci doby splatnosti (za dobu l) se úročí jednoduše. Dále uvažujeme počáteční kapitál K0 a roční úrokovou míru i. Splatnou částku při smíšeném úročení vypočteme tedy ze vztahu

$$K_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n_m}(1+il),$$

kde $n = n_m + l$.

Příklad

Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků a 3 měsíce při úrokové míře 10% p.a.? Úroky jsou připisovány ročně a dále úročeny s vkladem

Řešení

Doba, po kterou je vklad uložen, vzhledem k frekvenci připisování úroků není celočíselná, půjde tedy o případ smíšeného úročení. Podle vztahu je

$$K_n = 10000(1 + 0,1)^5(1 + 0,1 \cdot 3/12) = 16507,70 \text{ (Kč)}.$$

Vklad vzroste na 16 507,70 Kč.

Příklad

Určete dobu uložení kapitálu 20 000 Kč, jehož budoucí hodnota je 24 000 Kč, při úrokové míře 6% p.a. a

1. ročním složeném úročení,
2. měsíčním složeném úročení. Vyjádřete v tomto případě dobu uložení v rocích i v měsících

Řešení

V prvním případě dosadíme do vzorce tj.

$$n = \frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06)} = 3,13 \text{ (roků)}.$$

V druhém případě je možné vypočítat dobu uložení v měsících i v letech způsobem

$$nm = \frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06/12)} = 36,56 \text{ (měsíců)},$$

$$n = \frac{1}{12} \frac{\ln 24000 - \ln 20000}{\ln(1 + 0,06/12)} = 3,05 \text{ (roků)}.$$

Doba uložení kapitálu při ročním složeném úročení je 3,13 roků (3 roky a 47 dní), při měsíčním složeném úročení 3,05 roků, což je 36,56 měsíců

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺