

Kapitola 12

1. Vypočtete:

a) $\int (x + x^2) dx$

b) $\int (5x - 2) dx$

c) $\int (4x^2 + 2x + 6) dx$

d) $\int (3x^2 - x + x^8) dx$

e) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) dx$

f) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx$

g) $\int (18e^x + 5 \cos x) dx$

h) $\int (3^x + 2 \cdot 5^x) dx$

i) $\int \frac{6}{\cos^2 x} dx$

Výsledky:

a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$, b) $\frac{5x^2}{2} - 2x + C$, c) $\frac{4x^3}{3} + x^2 + 6x + C$, d) $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^9}{9} + C$, e) $\ln x + \frac{2}{x} - \frac{5}{2x^2} + C$,

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 8\sqrt{x} + C$, g) $18e^x + 5 \sin x + C$, h) $\frac{3^x}{\ln 3} + 2 \frac{5^x}{\ln 5} + C$, i) $6 \operatorname{tg} x + C$.

Určitý integrál

Newtonův-Leibnizův vzorec: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

1. Vypočtete:

a) $\int_1^2 x^2 dx$

b) $\int_1^4 (2x^2 + x - 1) dx$

c) $\int_{-3}^3 (x^3 - x) dx$

d) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

e) $\int_0^\pi \sin x dx$

f) $\int_2^7 \sqrt{x+2} dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

h) $\int_1^5 |2-x| dx$

Výsledky:

a) 7/3, b) 93/2, c) 0, d) 2, e) 2, f) 38/3, g) 1, h) 5.

Obsah plochy pod (nad) danou křivkou

3. Vypočtete obsah plochy pod (nad) danou křivkou na daném intervalu:

a) $y = x^2; x \in (1, 3)$

b) $y = x^3; x \in (-2, 2)$

c) $y = \frac{4}{x^2}; x \in (1, 4)$

d) $y = \sqrt{x+1}; x \in (-1, 3)$

e) $y = xe^{-2x}; x \in (0, 1)$

Výsledky: a) 26/3, b) 8, c) 3, d) 16/3, e) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.

Obsah plochy sevřené křivkami

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu: $S = \int_a^b (h(x) - f(x)) dx$

4. Vypočtete obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y = 4x, y = x^2$ b) $y = x^2 - 4x, y = x$ c) $y = x, y = -x^2 + 2$.

Výsledky: a) $32/3$, b) $125/6$, c) $9/2$

Tabulka 1. Základní integrály.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
0	C
1	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln x + \sqrt{1\pm x^2} + C$