

# Přednáška 1: **ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY, CHARAKTERISTIKY DAT**

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

# Informace o předmětu

- Vyučující: Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D., A 407.
- Přednáška: čtvrtek 8:55 – 10:30, učebna A216.
- Seminář: čtvrtek 10:35 – 11:20, učebna A216.
- Počet kreditů: 5.
- Prezenční i kombinované studium.

# Informace o předmětu

Cíle předmětu:

Poskytnout hlubší pohled na statistické metody vhodné ke zpracování vícerozměrných dat, ovládnout teoretický aparát vybraných metod a naučit se je aplikovat pomocí statistických programů na počítači.

- Materiály – e-learning, IS
- Opora – e-learning, IS

# Zkouška

- Písenná, částečně za pomoci počítače.  
Pro úspěšné zvládnutí předmětu musíte mít alespoň 60 bodů ze 100.
- Ke zkoušce si můžete přinést jakékoliv studijní materiály v papírové formě.

# Účast na seminářích

- Aktivní účast na seminářích je hodnocena body navíc (nezapočítávají se semináře, kde se píše test).
- 1 bod = 1x účast
- Maximum 10 bodů za účast.

# Hodnocení

- **Celkem 110 bodů**
- 0 až 59: nedostatečně (F), 4
- 60 až 64: dostatečně (E), 3
- 65 až 69: uspokojivě (D), 2,5
- 70 až 79: dobře (C), 2
- 80 až 89: velmi dobře (B), 1,5
- 90 až 110: výborně (A), 1.

# Plán semestru

## Týden 1: 22. 9.

- **Přednáška:** Informace o podmínkách absolvování. Základní pojmy a metody ze statistiky.  
(Charakteristiky polohy, charakteristiky variability, šikmost, špičatost, statistický soubor se dvěma znaky, testy statistických hypotéz.)
- **Seminář:** Charakteristiky polohy, charakteristiky variability, šikmost, špičatost.

## Týden 2: 29.9.

- **Přednáška:** Testování hypotéz – parametrické testy.  
(Marketingová případová studie, co přináší parametrické testování statistických hypotéz v marketingu, jednovýběrový t-test, dvouvýběrový t-test - nepárový a párový.)
- **Seminář:** Testy statistických hypotéz, jednovýběrový t-test, dvouvýběrový t-test – nepárový a párový.

### Týden 3: 6. 10.

- **Přednáška:** Testování hypotéz - neparametrické testy. (Mediánový test (pro 1 výběr), chi-kvadrát test pro 1 výběr, dvouvýběrové testy, chi-kvadrát test pro 2 výběry, Mann-Whitneyův test, Wilcoxonův párový test.)
- **Seminář:** Chi-kvadrát test pro 1 výběr, chi-kvadrát test pro 2 výběry.

### Týden 4: 13. 10.

- **Přednáška:** Regresní analýza (Podstata regresní analýzy, odhad regresních koeficientů, test významnosti regresních koeficientů, intervaly spolehlivosti regresních koeficientů, test vhodnosti regresního modelu.)
- **Seminář:** Odhad regresních koeficientů, test významnosti regresních koeficientů, intervaly spolehlivosti regresních koeficientů, test vhodnosti regresního modelu.

### Týden 5: 20. 10.

- **Přednáška:** Metody prognózování (Analýza trendové složky, analýza sezónní složky, model konstantní sezónnosti, analýza náhodné složky, testování vlastností náhodné složky, prognózování, kauzální prognostické metody.)



## Týden 6: 27. 10.

- **Přednáška:** Korelační analýza  
(Koeficient korelace, index korelace, Spearmanův koeficient (pořadové) korelace, vícenásobná lineární závislost - vztahy pro dvě vysvětlující proměnné.)
- **Seminář:** Analýza trendové složky, analýza sezónní složky, model konstantní sezónnosti, analýza náhodné složky, testování vlastností náhodné složky, prognózování, kauzální prognostické metody.

## Týden 7: 3. 11.

- **Přednáška:** Analýza rozptylu (ANOVA)  
(Jednofaktorová ANOVA, postup při analýze rozptylu s jedním faktorem, míra těsnosti závislosti.)
- **Seminář:** Výpočet koeficient korelace, Spearmanova koeficientu korelace, test statistické významnosti korelačního koeficientu.

## Týden 8: 10. 11.

- **Přednáška:** Analýza rozptylu (ANOVA) : Dvojné třídění a Latinské čtverce  
(Dvojné třídění, trojné třídění (Latinské čtverce).)
- **Seminář:** Postup výpočtu při analýze rozptylu s jedním faktorem.

## Týden 9: 17. 11. – státní svátek

## Týden 10: 24. 11.

- **Přednáška:** Úplné a částečné faktorové plány (Základy experimentování a oblasti použití, experimentální procedura, efekt (vliv) faktoru, významnost efektu, test významnosti efektu, grafické hodnocení efektu faktoru, grafy interakcí, model experimentu.)
- **Seminář:** Postup výpočtu při analýze rozptylu se dvěma faktory.

## Týden 11: 31. 11.

- **Přednáška:** Částečný faktorový experiment se dvěma úrovněmi (Poloviční plány, grafická metoda.)
- **Seminář:** Úplný faktorový plán: model experimentu, efekt (vliv) faktoru, významnost efektu, test významnosti efektu, grafické hodnocení efektu faktoru, grafy interakcí.

## **Týden 12: 8. 12.**

- **Přednáška:** Taguchiho metody: ztrátová funkce (Definice a vlastnosti ztrátové funkce, ztrátová funkce pro různé typy tolerance.)
- **Seminář:** Ztrátová funkce pro různé typy tolerance, monitorování nákladů na jakost.

## **Týden 13: 15. 12.**

- **Přednáška:** Taguchiho metody: celkové náklady na jakost (Monitorování nákladů na jakost, regulační diagramy.)

# Kontakt

- [mazurek@opf.slu.cz](mailto:mazurek@opf.slu.cz)
- A407.

# Základní statistické pojmy, charakteristiky dat

- Hlavním cílem statistiky je analyzovat jisté datové soubory.
- Daný soubor dat je obvykle vytvořen za jistým účelem – za účelem analýzy podoby či chování nějaké veličiny, které se říká *statistický znak*.

# Populace versus výběr

- Množina všech hodnot, kterých znak může nabýt, se ve statistice nazývá *základní soubor* nebo také *populace*. Populace se vztahuje k danému statistickému pojmu a je to tedy v tomto smyslu relativní pojem.
- Statisticy se nicméně častěji setkávají se situací, kdy základní soubor k dispozici není. V takovém případě jim nezbývá nic jiného než provést výběr z této populace a získat tzv. *výběrový soubor*.
- Ve statistice se nejčastěji požaduje *náhodný výběr*, což je datový soubor vznikající tak, že každý jeho prvek má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrán.

# Deskriptivní statistika

- Je-li k dispozici základní soubor, může být jedinou ambicí statistika tuto populaci popsat. Metody sloužící k tomuto účelu utvářejí *deskriptivní/popisnou statistiku*.
- Charakteristika je obecně údajem, který jistým způsobem shrnuje informaci o sledovaném datovém souboru.
- Charakteristiky využívané k popisu populace se logicky nazývají *populační charakteristiky*.
- V případě, že je k dispozici pouze výběrový soubor, užívají se k popisu tohoto výběru *výběrové charakteristiky*.
- Zvyklostí je užívat ke značení populačních charakteristik písmena řecké abecedy, zatímco pro výběrové charakteristiky se užívá obvykle latinka.

# STATISTICKÝ SOUBOR S JEDNÍM ZNAKEM

- Nechť je dán základní soubor skládající se z hodnot  $x_1, x_2 \dots x_n$ , kde  $n$  je přirozené a tedy konečné číslo (my budeme pracovat zejména se soubory konečné velikosti).
- Sledovaným statistickým znakem nechť je veličina  $X$ . Čísla  $x_1, x_2 \dots x_n$  jsou hodnoty, kterých tato veličina nabývá.
- Pokud bychom na tento soubor aplikovali náhodný výběr, můžeme na proměnnou  $X$  nahlížet jako na (diskrétní) náhodnou veličinu.



# Četnosti výskytu

- Přestože soubor obsahuje hodnoty  $x_1, x_2 \dots x_n$ , některé z čísel se mohou opakovat. V takovém případě pak nabývá veličina  $X$  pouze  $k$  různých hodnot  $x_1^*, x_2^* \dots x_k^*$ .
- Hodnota  $x_1^*$  se může v souboru vyskytovat  $f_1$ -krát a číslo  $f_1$  pak nazýváme *absolutní četností* výskytu hodnoty  $x_1^*$ .
- Obdobně se hodnota  $x_2^*$  vyskytuje v souboru  $f_2$ -krát, hodnota  $x_3^* \dots f_3$  -krát a tak dále, až konečně číslo  $x_k^*$  je obsaženo v souboru  $f_k$  -krát.

# Typy četností

- Kromě absolutních četností pracujeme také s jinými typy četností:
- a) s *relativní četností* výskytu hodnoty  $x_i^*$  danou výrazem  $f_i/n$  kde  $n$  značí rozsah souboru.
- Pokud seřadíme hodnoty vzestupně, můžeme zavést také pojmy
- b) *absolutní kumulativní četnost* hodnoty
- c) *relativní kumulativní četnost* hodnoty.
- Uvedené druhy četností mohou být využity v souvislosti s populací i výběrovým souborem.

# Příklad četností

Prodejce aut Bourák s.r.o. prodal každý den v únoru následující počet automobilů:

4,5,2,5,3,5,6,3,1,2,5,4,6,8,5,4,4,3,4,5,6,3,2,5,2,5,4,7.

Absolutní četnosti jednotlivých hodnot jsou:

Hodnota 1 má četnost 1 (vyskytuje se v souboru jednou), hodnota 2 má četnost 4 (vyskytuje se v souboru čtyři krát), hodnota 3 má četnost 4, hodnota 4 má četnost 6, hodnota 5 má četnost 8, hodnota 6 má četnost 3, hodnota 7 má četnost 1 a hodnota 8 má četnost 1.

Podívejme se na hodnotu 2 (matematicky zapsáno:  $x_2^* = 2, f_2 = 4$ ):

Absolutní četnost je 4.

Relativní četnost hodnoty je rovna  $4/28 = 0,143 = 14,3 \%$ .

Kumulativní četnost je  $4+1 = 5$ .

Relativní kumulativní četnost je  $5/28 = 0,179 = 17,9 \%$

# CHARAKTERISTIKY POLOHY

- Populační aritmetický průměr:

- $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- Výběrový aritmetický průměr:

- $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$  (typicky je  $m$  mnohem menší než  $n$ )

- Vážený aritmetický průměr:

- $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i$ , kde  $w_i$  je váha hodnoty  $x_i$ .

- *Modus*  $\hat{x}$

- hodnota, která má v daném souboru dat nejvyšší absolutní četnost. (Tento popis neurčuje modus jednoznačně, a tak se může stát, že datový soubor bude mít více modů).

- *Medián*  $\tilde{x}$

- Prostřední hodnota (sudý počet hodnot vs lichý počet hodnot)

# Příklad na charakteristiky polohy

Prodejce aut Bourák s.r.o. prodal každý den v únoru následující počet automobilů: 4,5,2,5,3,5,6,3,1,2,5,4,6,8,5,4,4,3,4,5,6,3,2,5,2,5,4,7.

Tento soubor budeme považovat za populační.

Populační aritmetický průměr:  $\bar{x} = \frac{1}{28} \sum_{n=1}^{28} x_i = \frac{1}{28} \cdot (4 + 5 + 2 + \dots + 7) = 4,21$

Modus:  $\hat{x} = 5$

Medián:  $\tilde{x} = 4$

Medián určíme takto: seřadíme hodnoty od nejmenší po největší:

1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,7,8.

Máme dvě prostřední hodnoty, obě jsou 4, medián je tedy roven čtyřem.

# CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

- Populační rozptyl:  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$
- Výběrový rozptyl:  $s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$
- Populační směrodatná odchylka:  $\sigma$
- Výběrová směrodatná odchylka:  $s$
- Variační rozpětí:  $R = \max - \min$
- Populační variační koeficient:  $V = \frac{\sigma}{|\mu|}$
- Výběrový variační koeficient:  $V = \frac{s}{|\bar{x}|}$

# Příklad na charakteristiky variability dat

**Prodejce aut Bourák s.r.o. prodal každý den v únoru následující počet automobilů:**

**4,5,2,5,3,5,6,3,1,2,5,4,6,8,5,4,4,3,4,5,6,3,2,5,2,5,4,7.**

**Tento soubor budeme považovat za populační.**

**Populační rozptyl:  $\sigma^2 = 2,597$**

**Populační směrodatná odchylka: 1,612**

**Variační rozpětí:  $R = 7$**

**Variační koeficient:  $V = 0,382$**

# CHARAKTERISTIKY KONCENTRACE DAT

- Ukazatele, které v jistém slova smyslu odrážejí míru seskupení hodnot tvořících analyzovaný datový soubor
- Charakteristika šikmosti  $Sk$  (anglicky skewness)

$$Sk = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{n\sigma^3},$$

- Charakteristika špičatosti  $Ku$  (z anglického kurtosis)

$$Ku = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{n\sigma^4}$$



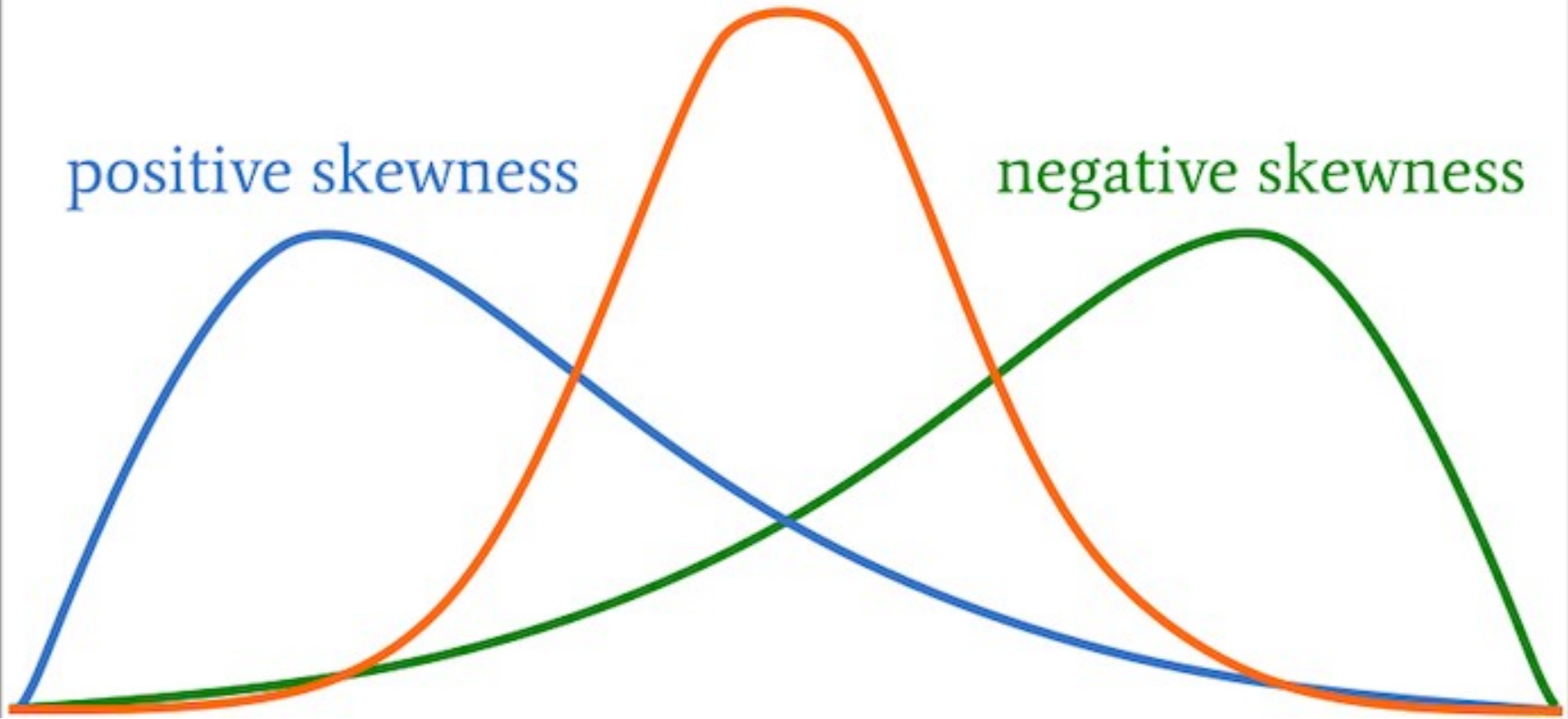
# Šikmost

- Jak vyplývá z definičních vzorců, šikmost může nabývat libovolné reálné hodnoty.
- V případě, že ukazatel vychází nula, poukazuje tento výsledek na symetrické rozdělení četností hodnot v daném datovém souboru. Koncentrace malých hodnot je stejná jako koncentrace velkých hodnot v daném souboru.
- Pokud vychází šikmost kladně, má rozdělení četností hodnot z daného souboru kladné zešikmení (zešikmení doprava) a koncentrace malých hodnot je v takovém souboru vyšší než koncentrace velkých hodnot.
- Pokud vychází šikmost záporně, má rozdělení četností hodnot z daného souboru kladné zešikmení (zešikmení doleva) a koncentrace malých hodnot je v takovém souboru naopak menší než koncentrace velkých hodnot.
- V případě nenulové šikmosti hovoříme také o asymetrickém rozdělení četností.

skewness = zero

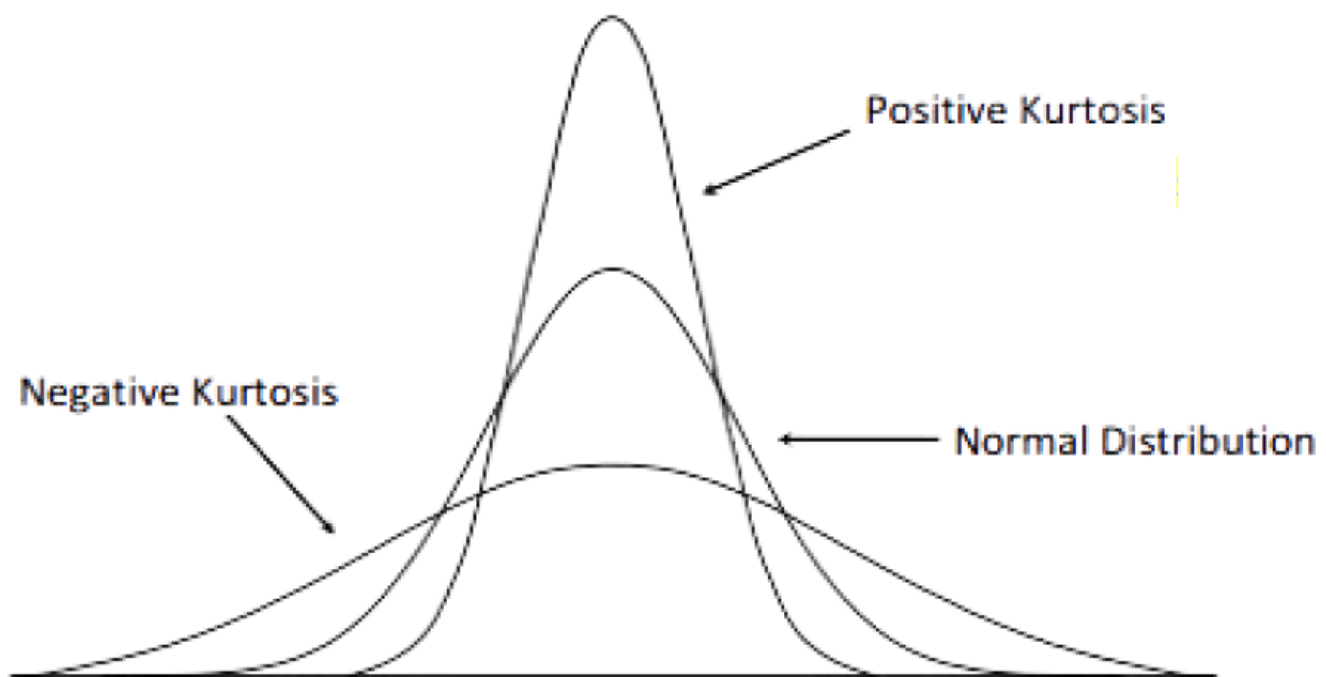
positive skewness

negative skewness



# Špičatost

- Vyšší hodnota tohoto ukazatele vyjadřuje vyšší špičatost, tj. vyšší koncentraci hodnot blízkých prostřední hodnotě ve srovnání s ostatními hodnotami daného statistického znaku.
- Pokud špičatost nabývá kladných hodnot, znamená to, že graf daných hodnot je špičatější než normální (Gaussovo) rozdělení.
- Naopak, pokud je špičatost záporná, znamená to, že graf vytvořený ze zadaných hodnot je plošší než normální rozdělení, viz následující obrázek.



Negative Kurtosis

Positive Kurtosis

Normal Distribution

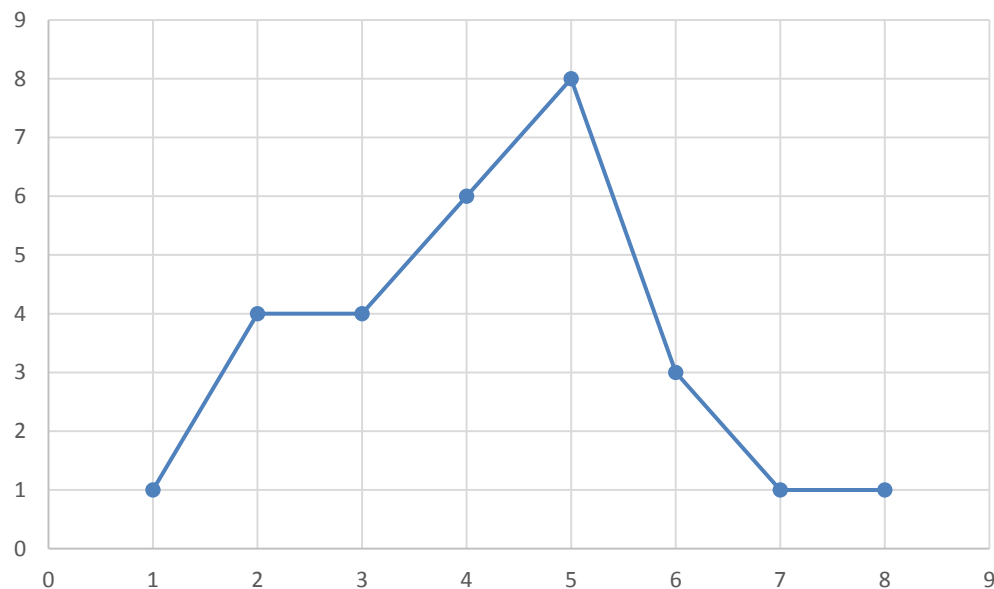
# Příklad na koncentraci dat

Prodejce aut Bourák s.r.o. prodal každý den v únoru následující počet automobilů:

4,5,2,5,3,5,6,3,1,2,5,4,6,8,5,4,4,3,4,5,6,3,2,5,2,5,4,7.

Šikmost:  $S_k = 0,111$

Špičatost:  $-0,106$



# OBECNÉ MOMENTY

- Obecné momenty jsou charakteristiky, které nahlížejí na strukturu dat z trochu jiného úhlu pohledu.
- Existuje několik důvodů, proč se s nimi pracuje.
- Jedním z těchto důvodů je skutečnost, že za jistých podmínek si rozdělení četností a momenty vzájemně jednoznačně odpovídají: datové soubory se stejnými momenty budou mít stejné rozdělení četností a naopak.
- Nás nicméně zajímá zejména druhý důvod práce s momenty, a tím je jejich vhodnost pro systematictější výpočet některých charakteristik

# Obecný moment

- Pro základní soubor dat definujeme *k-tý obecný moment*  $M_k$  předpisem

$$M_k = n^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k, k = 1, 2, \dots$$

- Jde tedy o průměr  $k$ -tých mocnin původních hodnot.

# Užitečné vztahy

$$M_1 = \mu,$$

$$M_2 - M_1^2 = \sigma^2,$$

$$\sigma^{-3} \cdot (M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3) = Sk,$$

$$\sigma^{-4} \cdot (M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4) = Ku.$$



# STATISTICKÝ SOUBOR SE DVĚMA ZNAKY

- Máme-li statistický soubor takový, že pro každé přirozené číslo  $i = 1, 2, \dots, m$  a  $j = 1, 2, \dots, n$  obsahuje soubor jistou dvojici  $(x_i, y_j)$  hodnot nebo i více dvojic s těmito hodnotami, hovoříme o *statistickém souboru se dvěma znaky* (též *argumenty*). Počet výskytů dvojice hodnot se nazývá *sdruženou četností* dvojice a značí se  $f_{ij}$ .

# Kontingenční tabulka

- Rozdělení sdružených četností se zapisuje do dvourozměrné tabulky, která se nazývá *kontingenční tabulka*
- Do záhlaví tabulky se zapisují různé možné obměny obou sledovaných znaků, vnitřek tabulky obsahuje sdružené četnosti výskytu různých kombinací těchto znaků.

	y1	y2	y3
x1	4	7	2
x2	1	2	8
x3	5	5	8
x4	2	3	2

# Populační charakteristiky

- Předpokládáme-li, že uvedená tabulka představuje celou populaci, můžeme při zavedené symbolice vypočítat základní dvě charakteristiky znaků  $X$  a  $Y$  – populační průměr, respektive střední hodnotu, a populační rozptyl, a to podle následujících vzorců

Populační průměry

$$\mu_X = \frac{1}{r} \sum_i x_i \sum_j f_{ij},$$

$$\mu_Y = \frac{1}{r} \sum_j y_j \sum_i f_{ij}.$$

Populační rozptyly

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{r} \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \sum_j f_{ij}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{r} \sum_j (y_j - \mu_Y)^2 \sum_i f_{ij}$$

# Výběrové charakteristiky

- Pokud by tabulka reprezentovala výsledek náhodného výběru, počítali bychom výběrové průměry a výběrové rozptyly podle vzorců

## 1. Výběrové průměry

$$\bar{x} = \frac{1}{r} \sum_i x_i \sum_j f_{ij},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{r} \sum_j y_j \sum_i f_{ij}.$$

## 2. Výběrové rozptyly

$$s_X^2 = \frac{1}{r-1} \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \sum_j f_{ij},$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{r-1} \sum_j (y_j - \mu_Y)^2 \sum_i f_{ij}.$$

# Kovariance

- Pracujeme-li se dvěma znaky jako v našem případě daném výše uvedenou kontingenční tabulkou, definujeme také další důležitou charakteristiku zvanou *kovariance*. Populační kovarianci znaků  $X$  a  $Y$  definujeme vzorcem :

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{r} \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) f_{ij} = \frac{1}{r} \sum_i \sum_j x_i y_j f_{ij} - \mu_X \cdot \mu_Y.$$

- Pokud budeme pracovat s výběrovými daty o rozsahu větším než 2, definujeme výběrovou kovarianci vztahem

$$c_{XY} = \frac{1}{r-1} \sum_i \sum_j (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{ij}.$$

# Příklad

Znak  $X$  nabývá celých hodnot: 3, 5, 4, 6, 7, 9. Pro tyto hodnoty (v uvedeném pořadí) byly zjištěny následující hodnoty druhého znaku  $Y$ : 1, 2, 7, 9, 11, 13, tj. číslu 3 odpovídá hodnota 1 druhého znaku, číslu 5 odpovídá hodnota 2 druhého znaku, apod. Pro oba znaky platí, že každá hodnota má vždy absolutní četnost svého výskytu rovnu jedné. Spočtěme populační kovarianci.

## ŘEŠENÍ

Využijeme vzorce 1-15, v němž jsou všechny četnosti rovny jedné. Průměrné  $X$  má hodnotu 5,66, průměr  $Y$  je roven 7,16. Dostáváme

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{r} \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) f_{ij} = \frac{(3 - 5,66) \cdot (1 - 7,16) + \dots + (9 - 5,66) \cdot (13 - 7,16)}{6} = 7,55.$$

# Kovariance – poznámky

- Kovariance se využívá k vyjádření závislosti mezi znaky  $X$  a  $Y$  ve tvaru přímky, tj. k vyjádření jejich lineární závislosti.
- Lze říci, že pokud vychází kovariance kladně, existuje mezi oběma znaky do jisté míry závislost ve tvaru přímé úměry. Přímá úměra značí, že s růstem hodnoty jednoho znaku úměrně roste i hodnota druhého znaku.
- Vychází-li kovariance naopak záporná, signalizuje to existenci jisté míry nepřímé úměry: stoupne-li hodnota jednoho znaku, úměrně tomu klesne hodnota druhého znaku.
- Nulová kovariance naznačuje, že lineární závislost mezi oběma znaky neexistuje. Jak je vidět, u kovariance nás zajímá především její znaménko.
- Aby však tato charakteristika mohla posloužit lépe jako ukazatel lineární závislosti, převádí se její hodnota na škálu, resp. interval  $[-1, 1]$ , který je vhodnější referencí pro měření intenzity lineární závislosti. Výsledkem tohoto převodu je koeficient párové korelace, a to buď populační, pracujeme-li s populací, nebo výběrový, je-li k dispozici pouze výběrový soubor.

# Korelační koeficient

- Populační koeficient párové korelace  $\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ ,
- Výběrový koeficient párové korelace  $r = \frac{c_{XY}}{s_X \cdot s_Y}$ ,
- Populační i výběrový koeficient korelace mohou nabývat pouze hodnot z intervalu  $[-1, 1]$ .
- Vyjde-li populační párová korelace jedna, znamená to, že mezi oběma znaky existuje přesná funkční závislost v podobě přímé úměry (rostoucí přímky).
- Vyjde-li populační korelace naopak minus jedna, existuje mezi oběma znaky přesná funkční závislost v podobě nepřímé úměry (klesající přímky).
- Pokud je populační korelace nulová, říkáme, že znaky  $X$  a  $Y$  jsou nezkorelované (nikoliv nezávislé!!).



Děkuji za pozornost