

KORELAČNÍ ANALÝZA

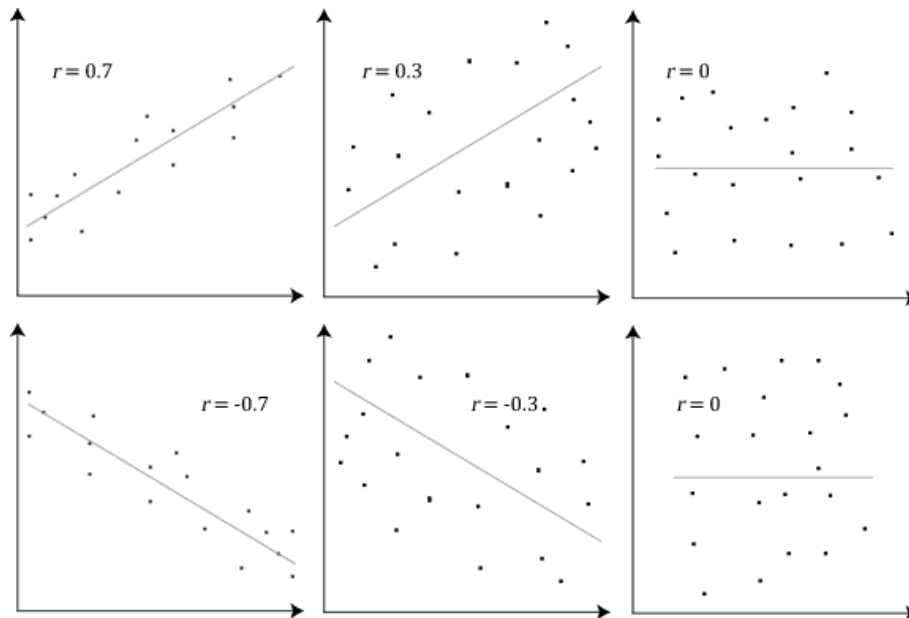
Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Korelační analýza

- Měření *intenzity závislosti* mezi proměnnými
- Úzká návaznost na regresní analýzu, neboť se v ní využívá teorie lineárních regresních modelů
- Nehledá formu vztahu mezi proměnnými, neboť už primárně vychází z předpokladu, že tento vztah je lineární (dokonce nejen z hlediska parametrů, ale i z hlediska proměnných), a soustředí se na konstrukci měř závislostí mezi těmito proměnnými.

Pearsonův korelační koeficient

- Značí se ρ_{XY} (ró) (nebo r) a udává míru lineární závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami X a Y.
- Nabývá hodnot v intervalu od -1 do 1.
- Hodnota 1 znamená perfektní kladnou lineární závislost (přímou úměrnost), zatímco hodnota -1 znamená negativní lineární závislost (nepřímou úměrnost).

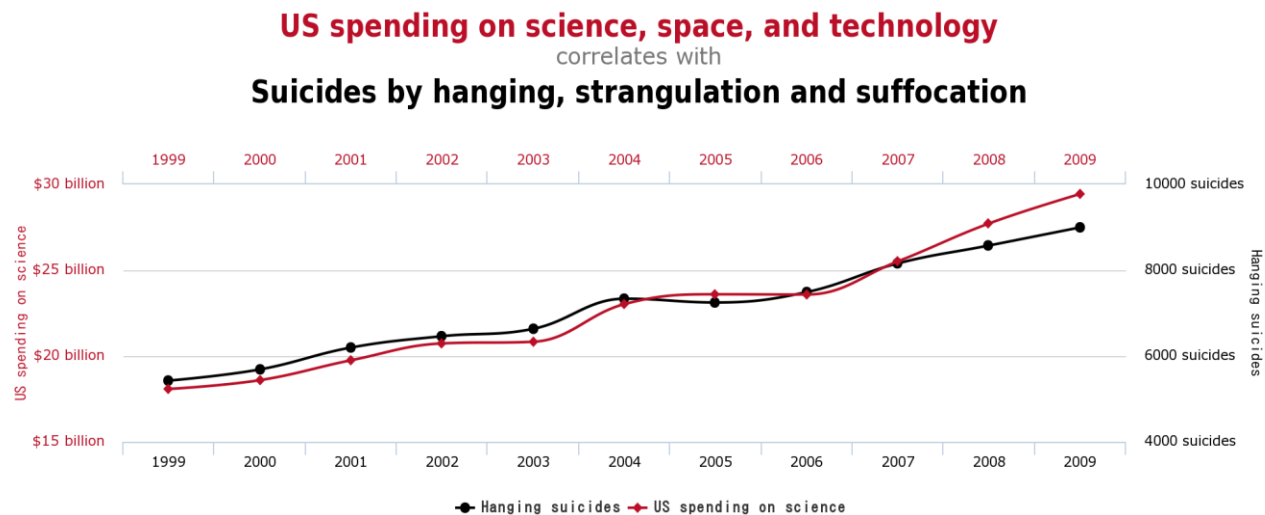


Pearsonův korelační koeficient

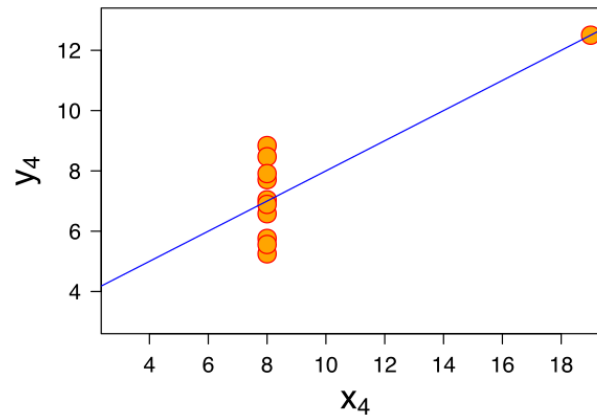
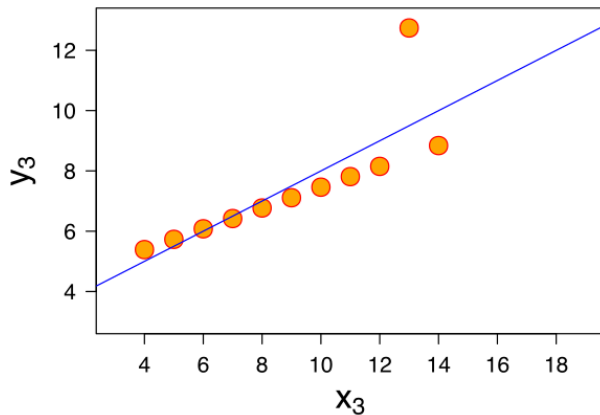
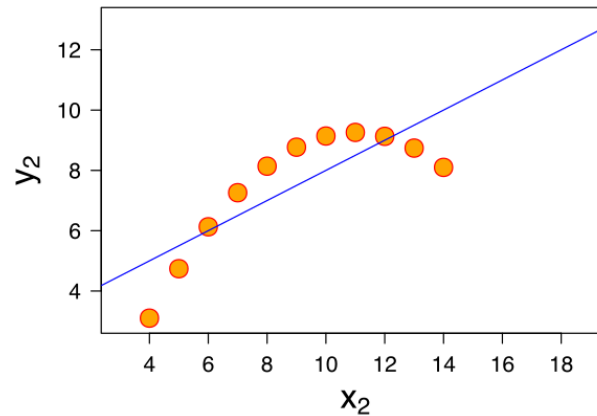
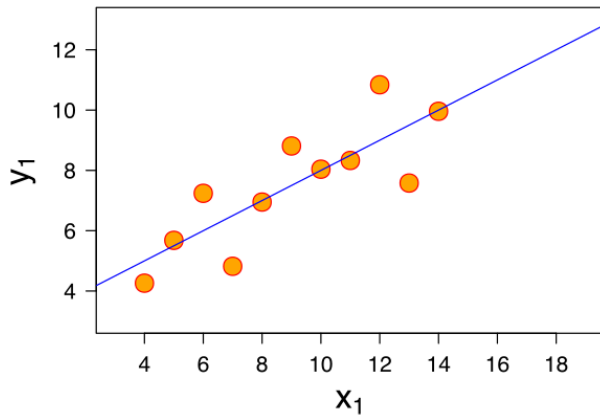
• Vzorec:
$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Dvě upozornění:

- 1.) Pearsonův korelační koeficient vyjadřuje pouze LINEÁRNÍ závislost dvou veličin, pro například kvadratickou závislost se nehodí.
- 2.) Pokud je mezi dvěma veličinami lineární závislost, NEZNAMENÁ to, že jedna veličina přímo ovlivňuje druhou.



Všetchna data mají korelační koeficient = 0,816!



Hodnoty koeficientu korelace

- Pro párový koeficient korelace platí, že ρ_{xy} je z intervalu $[-1,1]$.
- Je-li $\rho_{xy} = 0$, říkáme, že veličiny X a Y jsou nezkorelované.
- Je-li $\rho_{xy} = 1$ nebo $\rho_{xy} = -1$, existuje přesná funkční závislost mezi veličinami X a Y v podobě přímky.
- Tato přímka je rostoucí v prvním případě a klesající ve druhém případě.
- Je-li $\rho_{xy} = 0$, je třeba se omezit pouze na konstatování, že obě veličiny jsou nezkorelované. Nelze tvrdit, že jsou (statisticky) nezávislé.

Příklad

- Vypočítejme koeficient korelace , jsou-li dány tyto údaje:

x	1	3	4	5	6
y	3	8	11	14	19

- Vypočteme průměrnou hodnotu x a y a jejich sm. odchylky:

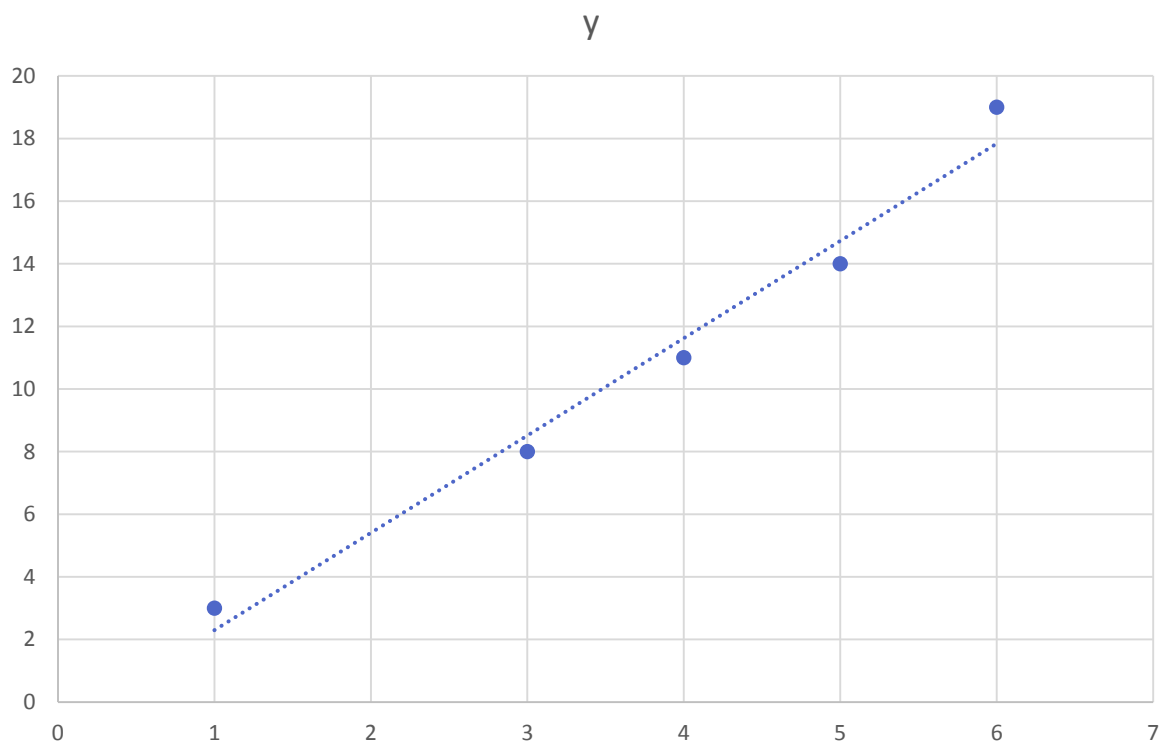
- $\bar{x} = \frac{1+3+4+5+6}{5} = 3,8$ $\sigma_x = 1,92$

- $\bar{y} = \frac{3+8+11+14+19}{5} = 11$ $\sigma_y = 6,04$

- $\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{5}[(1-3,8)(3-11)+(3-3,8)(8-11)...]}{1,92*6,04} = 0,98$

-

Graf závislosti x na y



Test statistické významnosti korelačního koeficientu

1. Nulová hypotéza $H_0: \rho_{xy} = 0$,
alternativní hypotéza $H_1: \rho_{xy} \neq 0$.

2. Testové kritérium:

$$T = \frac{r_{xy} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

3. Kritická hodnota testu $K = t_{n-2}(\alpha)$

- Studentovo rozdělení s $n-2$ stupni volnosti.

4. Je-li $|T| \geq K$, pak se H_0 zamítá, což znamená že korelační koeficient není statisticky významný, existuje lineární závislost mezi X a Y . V opačném případě se H_0 nezamítá, Y není lineárně závislé na X .

Příklad

- Mějme hodnoty x_i a y_i získané náhodným výběrem:

x_i	y_i
-2	-5
-1	-3
0	0
1	1
2	4

- Pro tyto hodnoty vypočítejte hodnotu korelačního koeficientu a testujte jeho statistickou významnost na hladině významnosti 0,01.

Příklad - řešení

- Pro výpočet potřebujeme hodnoty:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
-2	-5	10	4	25
-1	-3	3	1	9
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	8	4	16
$\Sigma = 0$	$\Sigma = -3$	$\Sigma = 22$	$\Sigma = 10$	$\Sigma = 51$

- Test statistické významnosti: $r_{xy} = \frac{5.22 - 0.(-3)}{\sqrt{(5.10 - 0).(5.51 - (-3)^2)}} = 0,9918.$
- 1. $H_0: \rho_{xy} = 0, \rho_{xy} \neq 0.$
- 2. $T = \frac{0,9918 \cdot \sqrt{5-2}}{\sqrt{1-0,9918^2}} = \frac{1,718}{\sqrt{0,016}} = 13,443$
- 3. Kritická hodnota testu $K = t_{n-2}(\alpha) = t_{5-2}(0,01) = 5,84$
- 4. Protože $T > K$, je lineární závislost Y na X významná.

Index korelace

- Není-li regresní funkcí, podle níž se posuzuje korelace veličin, přímka, ale jiná, i **nelineární** funkce, je možné k odhadu závislosti X a Y použít *index korelace*:

$$I_{xy} = \sqrt{\frac{S_{\hat{Y}}}{S_Y}}$$

- Kde:

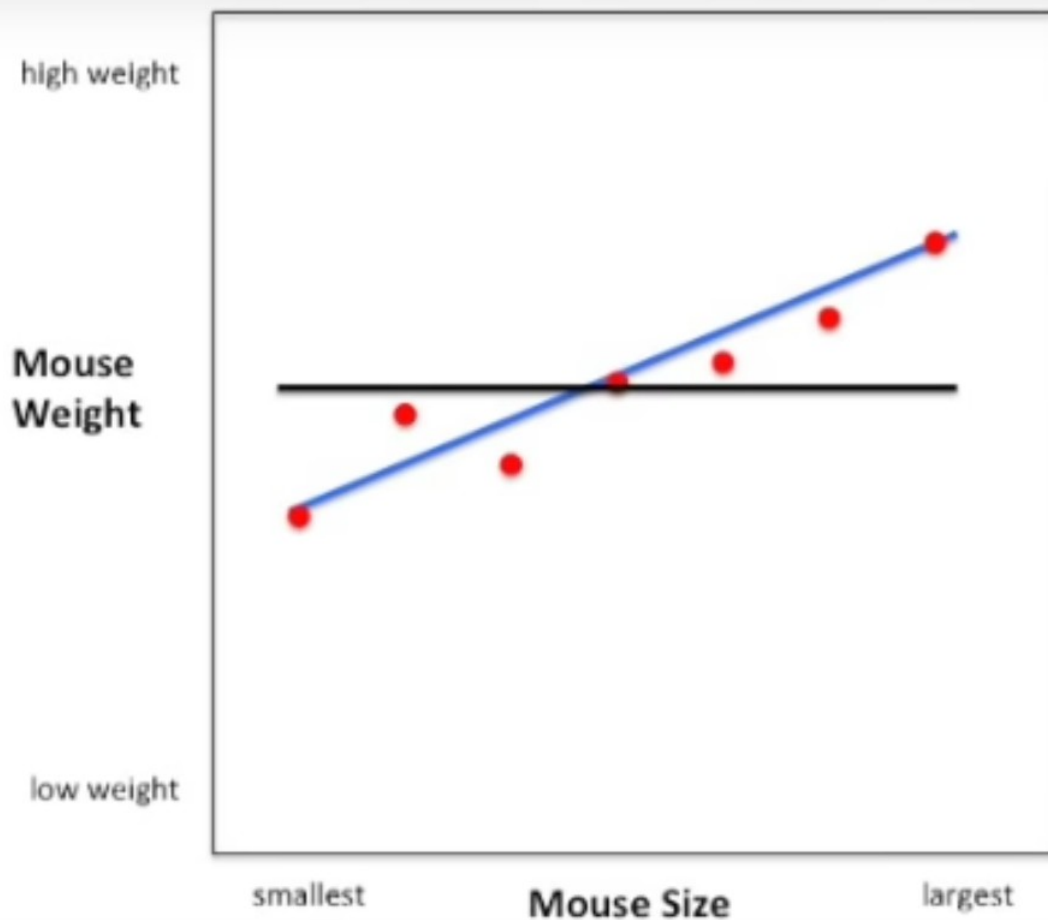
$$S_{\hat{Y}} = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2,$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Koeficient determinace

- Koeficient determinace určuje přiléhavost dat ke zvolenému modelu
- $R^2 = I^2 = \frac{S_{\hat{Y}}}{S_Y}$
- Koeficient determinace tedy udává kvalitu regresního modelu, přesněji vyjádřeno udává, kolik procent rozptylu vysvětlované proměnné je vysvětleno modelem a kolik zůstalo nevysvětleno;
- Nabývá hodnot od nuly do jedné (teoreticky i včetně těchto krajních mezí), přičemž hodnoty blízké nule značí špatnou kvalitu regresního modelu; hodnoty blízké jedné značí dobrou kvalitu regresního modelu;
- Udává se většinou v procentech.

Výpočet koeficientu determinace R^2



$$\text{Var}(\text{mean}) = 32$$

$$\text{Var}(\text{line}) = 6$$

$$R^2 = \frac{\text{Var}(\text{mean}) - \text{Var}(\text{line})}{\text{Var}(\text{mean})}$$

$$R^2 = \frac{32 - 6}{32}$$

$$R^2 = \frac{26}{32} = 0.81 = 81\%$$

There is 81% less variation around the **line** than the mean.

...or...

The size/weight relationship accounts for 81% of the variation.

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- Jsou-li hodnoty veličin X, Y zadány **pořadím**, používá se k odhadu míry závislosti těchto veličin *Spearmanův koeficient (pořadové) korelace*, který se počítá dle vzorce

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

- Kde d_i difference i-tého pořadí X a Y a n je počet párů hodnot X a Y , tedy rozsah výběru.

Příklad

- Výrobky byly seřazeny dle jakosti dvěma komisemi, z nichž jednu tvořili odborníci a druhou zástupci laické veřejnosti. Rozhodněte, zda se výsledky hodnocení obou komisí shodují ve smyslu korelace.

Výrobek	Laické pořadí	Odborné pořadí
1	7	8
2	9	9
3	8	7
4	10	10
5	6	6
6	5	4
7	3	5
8	4	3
9	2	2
10	1	1

Příklad - řešení

- V levé části níže uvedené tabulky jsou pořadí, v pravé části této tabulky jsou spočteny rozdíly v pořadí.

Výrobek	Laické pořadí	Odborné pořadí	d_i	d_i^2
1	7	8	-1	1
2	9	9	0	0
3	8	7	1	1
4	10	10	0	0
5	6	6	0	0
6	5	4	1	1
7	3	5	-2	4
8	4	3	1	1
9	2	2	0	0
10	1	1	0	0

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6.8}{10.99} = 0,95.$$

Test statistické významnosti pořadového koeficientu korelace

1. Testovaná hypotéza H_0 : X, Y jsou nezávislé vs. alternativní hypotéza H_1 : X, Y nejsou nezávislé.
2. Testové kritérium má tvar:

$$T = (n-1) \cdot r_S.$$

3. Kritická hodnota testu K = kritická hodnota rozdělení $N(0,1)$ na hladině významnosti α = $\text{NORMSINV}(1-\alpha)$.
4. Je-li $|T| \geq K$, zamítáme hypotézu H_0 . V opačném případě přijímáme H_0 .

Přijmeme-li H_0 , víme, že jsou veličiny nezávislé, a tedy i nezkorelované. Pokud hypotézu zamítneme, víme, že veličiny nejsou nezávislé, nejsme ale schopni rozhodnout v takovém případě, zda jsou nezkorelované. Test platí přibližně pro $n \geq 30$.

Příklad – test významnosti pořadového koeficientu korelace

- Koeficient nám vyšel 0,97, počet pozorování $n = 10$. Hladina významnosti alfa budiž 0,05.
- Nulová hypotéza: veličiny x a y jsou nezávislé.
- Testové kritérium: $T = (n-1)*r = 9*0.97 = 8,73$.
- Kritická hodnota K (z tabulky normovaného normálního rozdělení): $K = 1,96$.
- Protože je T větší než K , nulovou hypotézu zamítáme.

VÍCENÁSOBNÁ ZÁVISLOST – PŘÍPAD DVOU VYSVĚTLUJÍCÍCH PROMĚNNÝCH

- Chceme-li zjistit lineární závislost proměnné Y na větším počtu vysvětlujících proměnných X_1, X_2, \dots, X_p , používáme k měření těsnosti závislosti buďto:
 - a. koeficienty dílčí (parciální) korelace,
 - b. koeficient vícenásobné korelace.

Pearsonův korelační koeficient v Excelu

- Použijeme funkci CORREL.
- Vyzkoušejte si ji na tomto příkladu:

x	10	15	16	19	22	25
y	44	40	38	39	35	31

Spearmanův koeficient

- Není definován v Excelu, nicméně dá se určit následovně.
Mějme tato data:

Pořadí	Expert 1	Expert 2
1	Praha	Vídeň
2	Vídeň	New York
3	New York	Praha
4	Paříž	Paříž
5	Londýn	Řím
6	Řím	Londýn

- Seřadíme je takto:

	pořadí podle E1	pořadí podle E2
Praha	1	3
Vídeň	2	1
New York	3	2
Paříž	4	4
Londýn	5	6
Řím	6	5

Pokračování

- Nyní můžete použít vzorec, nebo použijete v Excelu funkci CORREL na oba sloupce pořadí. Výsledek bude stejný ;-) (0,77)

	pořadí podle E1	pořadí podle E2
Praha	1	3
Vídeň	2	1
New York	3	2
Paríž	4	4
Londýn	5	6
Řím	6	5

Koeficient dílčí (parciální) korelace

- Měří kupříkladu intenzitu lineární závislosti proměnné Y na vysvětlující proměnné X_1 za předpokladu, že je jistým způsobem odstraněn vliv ostatních proměnných. Značí se:

$$r_{y x_1 \bullet x_2, \dots, x_p}$$

- Jde o proměnné, které jsou uvedeny za symbolem „•“.
- Důvod výpočtu tohoto ukazatele jen ten, že vliv proměnné X_1 může být zkreslen současným působením proměnných X_2, \dots, X_p . Omezíme se nyní na případ $p = 2$.

Výběrový koeficient parciální korelace $p=2$

- Koeficient dílčí korelace vystupuje opět ve dvou podobách: buďto jde o populační koeficient nebo jeho odhad – výběrový koeficient parciální korelace. Výběrový koeficient parciální korelace se v **případě dvou vysvětlujících proměnných** vypočítá dle vztahu:

$$r_{yx_1 \bullet x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_1 x_2}^2)}} \quad r_{yx_2 \bullet x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2)(1 - r_{x_1 x_2}^2)}} .$$

- Koeficienty mohou nabývat hodnot z intervalu $[-1,1]$.

Test statistické významnosti koeficientu parciální korelace

1. $H_0 : \rho_{yx_1 \bullet x_2} = 0$ (není přítomna korelační závislost), $H_1 : \rho_{yx_1 \bullet x_2} \neq 0$.

2. Testové kritérium:

$$T = \frac{r_{yx_1 \bullet x_2} \sqrt{n-3}}{\sqrt{1-r_{yx_1 \bullet x_2}^2}} .$$

3. Kritická hodnota na hladině alfa = $K = t_{n-3}(\alpha) = \text{TINV}(\alpha, n-3)$.

4. Pokud $|T| \geq t_{n-3}(\alpha)$,

pak je koeficient parciální korelace statisticky významný, tj. nenulový.

Koeficient vícenásobné korelace

- *Koeficient vícenásobné korelace* měří závislost proměnné Y na všech vysvětlujících proměnných X_1, X_2, \dots, X_p dohromady.
- **Pro 2 vysvětlující proměnné** se výběrová verze tohoto koeficientu spočte dle vztahu:

$$r_{y \bullet x_1 x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1 x_2} + r_{yx_2}^2}{1 - r_{x_1 x_2}^2}}, \quad 0 \leq r_{y \bullet x_1 x_2} \leq 1.$$

Test statistické významnosti koeficientu vícenásobné korelace:

1. $H_0: \rho_{y \bullet x_1 x_2} = 0$ (není závislost) vs. $H_1: \rho_{y \bullet x_1 x_2} \neq 0$.

2. Testové kritérium:
$$T = \frac{r_{y \bullet x_1 x_2}^2 \cdot (n-3)}{2 \cdot (1 - r_{y \bullet x_1 x_2}^2)}$$

3. Kritická hodnota K se tentokrát týká Fisherova rozdělení se stupni volnosti 2 a $n-3$: $F_{2, n-3}(\alpha)$

4. Pokud je $T \geq F_{2, n-3}(\alpha)$,

pak je koeficient vícenásobné korelace statisticky významný na dané hladině významnosti. V opačném případě není statisticky významný.

Děkuji za pozornost