

1 Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1.1 Úvod

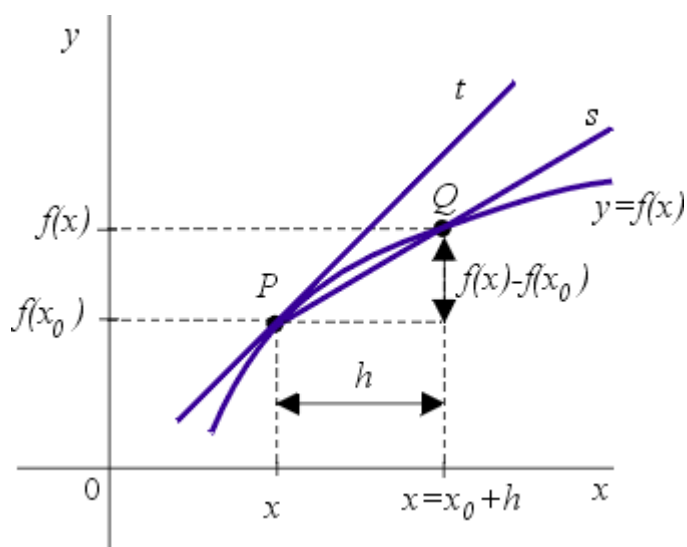
Definice:

Nechť je definována funkce $f(x)$ namnožině M , $x_0 \in M$. Nechť existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} . \text{ Tuto limitu nazýváme derivací funkce } f \text{ v bodě}$$

x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.



Obr. 1: Derivace funkce f v bodě x_0 [3 s. 1]

Poznámka:

1. Pokud tato limita neexistuje, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci.
2. Existují-li limity zleva i zprava, definujeme derivaci zleva či zprava.
3. Z definice plyne, že derivace vyjadřuje směrnici tečny funkce f v bodě x_0 .

V tab. 1 jsou uvedeny vzorce pro derivace elementárních funkcí.

Tab. 1: Derivace elementárních funkcí [1 s. 95]

Funkce	Derivace	Definiční obor
$y=C$	$y' = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$y=x^a$	$y' = a x^{a-1}$	Obor mocninné funkce, $a \in \mathbb{R}$
$y=e^x$	$y' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=a^x$	$y' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a < 0$
$y=\ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in \langle 0, \infty \rangle$
$y=\log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in \langle 0, \infty \rangle$, $a < 0$
$y=\sin x$	$y' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \notin (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$y=\operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$	$x \notin k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$y=\operatorname{arcsin} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x \uparrow 1$
$y=\operatorname{arccos} x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x \uparrow 1$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\operatorname{arccotg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\sinh x$	$y' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\cosh x$	$y' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\operatorname{tgh} x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$	$x \in \mathbb{R}$
$y=\operatorname{cotgh} x$	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{cotgh}^2 x$	$x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$

1.2 Pravidla pro derivování

Nechť funkce u a v mají v bodě $x \in M$ derivace $f'(x)$, $g'(x)$, potom platí:

Pravidla pro derivování součtu, rozdílu:

$$\langle u \pm v \rangle' = u' \pm v'$$

$$\langle u - v \rangle' = u' - v'$$

Pravidlo pro derivování součinu:

$$\langle uv \rangle' = u'v + uv'$$

Pravidlo pro derivování podílu:

$$\left\langle \frac{u}{v} \right\rangle' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \forall x \in M \text{ je } v(x) \neq 0$$

Nechť funkce $g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $f(y)$ má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom platí tzv. pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$f(g(x))' = f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

1.2.1 Řešené příklady

Vypočítáme derivace následujících funkcí:

1. $y = 4x^3 + x^2 - 3x$

Použijeme vzorce pro součet a rozdíl:

$$y' = 3 \cdot 4x^2 + 2x - 3 = 12x^2 + 2x - 3$$

2. $y = 2x \cdot \sin x$

Použijeme vzorec pro součin:

$$y' = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$$

$$3. \quad y = \frac{\ln x}{x^2}$$

Použijeme vzorec pro podíl:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$4. \quad y = \ln(3x + 1)$$

Použijeme vzorec pro složenou funkci.

Nejprve si musíme uvědomit, že $3x + 1$ je vnitřní funkce a logaritmus je vnější funkce.

Zderivujeme tedy nejprve logaritmus:

$$y' = \frac{1}{3x + 1}$$

Vynásobíme to derivací vnitřní funkce:

$$y' = \frac{1}{3x + 1} \cdot 3 = \frac{3}{3x + 1}$$

$$5. \quad y = \cos\left(\frac{x^2 - x}{\sin x}\right)$$

Tento příklad už je komplexnější. Máme zde jak složenou funkci, tak podíl.

$$y' = -\sin\left(\frac{x^2 - x}{\sin x}\right) \cdot \frac{(2x - 1)\sin x - (x^2 - x)\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$6. \quad y = \operatorname{tg}(e^x) \cdot 3^x$$

Tuto funkci budeme derivovat podle vzorce součinu, takže nejprve zderivujeme

$$y = \operatorname{tg}(e^x) \text{ podle derivace složené funkce.}$$

Poté tuto derivaci dosadíme do součinu.

$$y = \frac{1}{\cos^2 e^x} \cdot 3^x \cdot e^x + \operatorname{tg}(e^x) \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

1.3 Lokální význam znaménka první derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Každá funkce f má svůj definiční obor (Df). Definiční obor je interval všech hodnot x , pro které má daná funkce f smysl.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí bodu O bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální minimum**, jestliže existuje okolí bodu O bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokální minimum a maximum se označuje jako **lokální extrém**. V případě ostré nerovnosti se nazývá ostrý lokální extrém.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální minimum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální maximum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkce může mít extrém pouze v bodech, kde je první derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

Necht' $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce v tomto bodě lokální minimum, jestliže $f''(x_0) < 0$, má funkce v tomto bodě lokální maximum.

Poznámka:

Zderivujeme-li funkci, výsledkem je obecně opět funkce. Má-li tato nová funkce derivaci, nazveme ji obecně druhou derivací původní funkce.

Necht' $O = L \cup P$, kde L je levé okolí O bodu x_0 a P je pravé okolí O bodu x_0 .

Je-li $f'(x_0) > 0$, je funkce f v x_0 rostoucí. Je-li $f'(x_0) < 0$, je funkce f v x_0 klesající.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) < 0$, má funkce f v x_0 lokální maximum.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) > 0$, má funkce f v x_0 lokální minimum.

1.4 Lokální význam znaménka druhé derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) > 0$, řekneme, že graf funkce f **leží nad tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) < 0$, řekneme, že graf funkce f **leží pod tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Označme L jako levé okolí bodu x_0 . Je-li $\forall x \in L$ graf funkce nad tečnou a $\forall x \in P$ pod tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme P jako pravé okolí bodu x_0 . Je-li $\forall x \in L$ graf funkce pod tečnou a $\forall x \in P$ nad tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme L levé okolí bodu x_0 . Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce nad tečnou, nazývá se funkce **konvexní** v okolí bodu x_0 .

Označme P pravé okolí bodu x_0 . Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce pod tečnou, nazývá se funkce **konkávní** v okolí bodu x_0 .

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0 . Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) > 0$, je funkce f v x_0 konvexní.

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0 . Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) < 0$, je funkce f v x_0 konkávní.

Nechť $O = L \cup P$:

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, kde je druhá derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

1.4.1 Řešené příklady

Nalezneme intervaly, ve kterých funkce klesá, roste, je konkávní nebo konvexní. Dále také určíme inflexní body a lokální extrémy funkce.

$$1. \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Nejprve určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

Funkci budeme derivovat:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Nyní zjistíme, pro které hodnoty bude tato funkce rovna nule, případně, kdy nebude definována. Tím zjistíme monotonii funkce.

Extrémy mohou být v bodech:

$$x=0 (y'=0), \quad x=\pm 1 (y' \text{ neexistuje}).$$

Pro přehlednost si tyto body a intervaly zapíšeme do tabulky:

Tab. 2: Monotonie funkce a lokální extrémy

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	+		+		-		-
y	roste	není def.	roste	lokální max.	klesá	není def.	klesá

Libovolné číslo z intervalu dosadíme do zderivované funkce a zjistíme, zda je výsledek kladný, tudíž funkce roste, nebo jestli je záporný a funkce klesá.

Funkci opět zderivujeme, abychom zjistili, kdy je konkávní a kdy konvexní, případně zda existují inflexní body:

$$y'' = \frac{-2(x^2 - 1)^2 + 2x(2(x^2 - 1))2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

Inflexní body mohou být v bodech $x=0, x=\pm 1$.

Zapíšeme si vše do tabulky:

Tab. 3: Konvexnost, konkávnost, inflexní body

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
y'	+		-	
y	konvexní	není def.	konkávni	není inflexní bod

	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	-		+
y	konkávni	Není def.	konvexní

Stejný postup jako u první derivace:

Vybereme si libovolné číslo z intervalu, dosadíme do druhé derivace a zjistíme, kdy je funkce kladná (konvexní) a kdy záporná (konkávni).

Z tabulky je zřejmé, že inflexní bod tato funkce nemá.

2 Ekonomické aplikace derivace

2.1 Úvod

Ekonomie se podle tradiční definice zabývá zkoumáním alokace vzácných zdrojů mezi různá alternativní užití tak, aby byly uspokojeny lidské potřeby [8 s. 17].

Hlavní tři subjekty tvoří jednotlivec, firma, stát.

Jednotlivec určuje kdy, kde a kolik si čeho koupí, firma, co se bude vyrábět, za jakou cenu a v jakém množství, a stát vytváří právní normy, v jejichž rámci ekonomická činnost probíhá.

Z činností těchto subjektů vznikají termíny spotřeba, výroba, směna.

Spotřeba je hlavním impulsem pro existenci a rozvoj výroby a směna představuje výměnu (například rohlík za peníze).

Základem zkoumání mikroekonomie je zejména zjišťování optima a hledání rovnováhy. K jejich určování nám pomáhají tzv. ekonomické modely, které znázorňují vztahy mezi vybranými proměnnými. V těchto modelech se velmi často setkáváme s derivací, která vyjadřuje, jak se změna jedné proměnné projeví ve změně jiné proměnné.

Při řešení problémů optimalizace využíváme lokálních extrémů a nulových bodů derivace potřebné funkce.

V případě analýzy tržní rovnováhy využíváme analýzu nabídky a poptávky.

Tvary ekonomických funkcí vycházejí z praxe nějakým dlouhodobým výzkumem, nebo měřením.

Při řešení ekonomických úloh se budeme zabývat následujícími funkcemi v tabulce:

Tab. 4: Ekonomické funkce

Označení	Popis
$TC(Q)$...celkové náklady potřebné na produkci Q jednotek daného produktu
$MC(Q) = (TC)'(Q)$...mezní náklady definované jako derivace celkových nákladů podle proměnné Q
$AC(Q)$...průměrné náklady potřebné na produkci jednoho výrobku
$TR(Q)$...celkový příjem daný prodejem Q jednotek daného produktu
$MR(Q) = (TR)'(Q)$...mezní příjem definovaný jako derivace celkového příjmu podle proměnné Q
$\Pi(Q)$...celkový zisk daný prodejem Q jednotek daného produktu $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$
$TU(Q)$...užitková funkce daná spotřebou Q jednotek daného statku
$MU(Q)$...uvažujeme-li spotřebu pouze jednoho druhu statku, je funkce mezního užitku první derivací celkového užitku
$D(p)$...poptávková funkce (vyjadřuje množství zboží, které spotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně)
$D'(p)$...mezní poptávka (derivace funkce D podle proměnné p)
$\delta(Q)$...cenová funkce (inverzní funkce k funkci $D(p)$)

2.2 Mezní náklady

Mezní náklady jsou definovány jako změna celkových nákladů firmy vyvolané změnou objemu výstupu o jednotku.

Lze je vyjádřit jako derivaci celkových nákladů podle proměnné Q :

$$MC(Q) = (TC)'(Q)$$

Příklad:

Znáte-li funkci celkových nákladů $TC(Q) = 1000 + 5Q^2$, zjistěte, jak velké budou mezní náklady při výrobě 50 jednotek.

Řešení:

$$TC(Q) = 1000 + 5Q^2$$

Pro $Q = 50$ stanovme funkci mezních nákladů $MC(Q)$:

$$MC(Q) = (TC)'(Q)$$

$$MC(Q) = (1000 + 5Q^2)'$$

$$MC(Q) = 10Q$$

Dosadíme $Q = 50$ dle zadání:

$$MC(Q) = 500$$

Mezní náklady jsou 500 jednotek.

2.3 Mezní příjem

Mezní příjem je definován jako změna celkového příjmu firmy, která je důsledkem změny produkce o jednotku (Q).

Lze je vyjádřit jako derivaci celkových příjmů podle proměnné Q :

$$MR(Q) = (TR)'(Q)$$

Příklad:

Znáte-li funkci celkových příjmů $TR(Q) = 4Q^2 - 3Q$, zjistěte, jak velký bude mezní příjem při výrobě 50 jednotek.

Řešení:

$$MR(Q) = (TR)'(Q)$$

$$MR(Q) = (4Q^2 - 3Q)'$$

$$MR(Q) = 8Q - 3$$

Dosadíme $Q = 50$ dle zadání:

$$MR(Q) = 8 \cdot 50 - 3 = 397$$

Mezní příjem je 397 jednotek.

2.4 Cenová elasticita poptávky

Cenová elasticita poptávky je jedna z důležitých vlastností poptávky.

Vyjadřuje citlivost poptávky na ceně, umožní rozlišit situace, kdy zvýšení ceny zvýší tržby a kdy sníží tržby.

Pro výpočet použijeme jednoduché vzorce derivace.

Zavedený ekonomický postup:

Koeficient cenové elasticity poptávky lze také vypočítat jako podíl procentní změny poptávaného množství a procentní změny ceny:

$$E_D(p) = - \frac{\frac{\Delta D(p)}{D(p)}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Vzorec pro případ spojité funkce:

$$E_D(p) = - \frac{dD(p)}{dp} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

Příklad:

Je dán vzorec pro poptávku zboží $D(p) = \frac{250}{10p+40}$ a pro mezní poptávku $D'(p)$.

Jak vypočítáme elasticitu poptávky?

Řešení:

$$D'(p) = - \frac{250 \cdot 10}{(10p+40)^2}$$

Elasticita poptávky:

$$E_D(p) = \frac{250 \cdot 10}{(10p+40)^2} \cdot \frac{p}{\frac{250}{10p+40}}$$

Pro $p = 5$

$$E_D(5) = 0,56$$

Elasticita poptávky je rovna hodnotě 0,56.

2.5 Maximální zisk firmy

Zisková funkce je rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

Maximální zisk firmy

Pro výpočet maximálního zisku budeme využívat význam první derivace pro průběh funkce. Určíme si, na kterém intervalu je funkce rostoucí a na kterém klesající, a nalezneme maximum.

Příklad:

Spočítejme, kdy bude mít firma maximální zisk, pokud její měsíční tržby $TR(Q)$ a měsíční výdaje $TC(Q)$ jsou dány rovnostmi:

$$TR(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q$$

$$TC(Q) = -120Q^2 + 1000$$

Řešení:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q - (-120Q^2 + 1000)$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 + 15Q^2 + 3600Q - 1000$$

$$\Pi'(Q) = -3Q^2 + 30Q + 3600$$

$$\Pi'(Q) = -3(Q - 40)(Q + 30)$$

Nalezneme nulové body:

$$Q = 40, Q = -30$$

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Rozdělíme funkci na dva intervaly:

$$(-\infty, 40)$$

$$(40, \infty)$$

Zjistíme, kdy funkce roste a kdy klesá. Dosadíme libovolné číslo z intervalu do rovnice první derivace.

Pro první interval použijeme číslo 0 :

$$\Pi'(Q) = -3(0 - 40)(0 - 30) = 3600$$

Výsledek je kladný, na tomto intervalu funkce roste.

Pro druhý interval použijeme číslo 100 :

$$\Pi'(Q) = -3(100 - 40)(100 - 30) = -23400$$

Výsledek je záporný, na tomto intervalu funkce klesá.

Maximální zisk bude pro $Q = 40$.

Příklad 2:

Jaká je optimální rychlost vozidla, jestliže chceme co nejvíce ušetřit pohonné hmoty.

Jestliže závislost spotřeby na rychlosti je dána funkcí $F(x) = 0,01x - 0,0003x^2$.

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Řešení:

$$F'(x) = 0,01 - 0,0006 \cdot 2x$$

Nalezneme nulové body:

$$0,01 - 0,0006 \cdot 2x = 0$$

$$0,0006 \cdot 2x = 0,01$$

$$x = \frac{0,01}{0,0012}$$

$$x = 8,33$$

Optimální rychlost vozidla je 8,33 kilometrů za hodinu.

2.6 Makroekonomie

Makroekonomické modely pracují s veličinami [11 s. 25]:

a) důchod a produkce Y

b) spotřeba C a úspory S

c) investice

Je-li $C = C(Y)$ **spotřební funkce**, pak $\frac{dC}{dY} = C'(Y)$ vyjadřuje tzv. **mezní sklon ke**

spotřebě. Protože $Y = C + S$, platí $S = Y - C(Y)$. Derivace $\frac{dS}{dY} = 1 - \frac{dC}{dY}$ se

nazývá **mezním sklonem k úsporám**.

V makroekonomii existuje podmínka makroekonomické rovnováhy $Y = C + I$. Odtud:

$$Y - C(Y) = I,$$

protože potřeba je závislá na důchodu.

Derivace vztahu $Y - C(Y) = I$ podle I vyjadřuje změnu v rovnovážné úrovni důchodu v závislosti na změně hodnoty investice I :

$$\frac{dY}{dI} - \frac{dC}{dY} \cdot \frac{dY}{dI} = 1$$

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ je $\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}}$.

Pro rostoucí funkce důchodu C, S je $C'(Y) = c > 0, S'(Y) = s > 0$.

Je-li $C = c_0 + cY$ spotřební funkce, kde c je mezní sklon ke spotřebě, pak pro

$$c \neq 1 \text{ je } \frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - c}.$$

Pro $C = c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2$, kde $c_1 > 0, c_2 > 0$, je mezní sklon ke spotřebě vyjádřen vztahem $c(Y) = C'(Y) = c_1 + 2c_2 Y$.

Pak platí:

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ dostaneme z rovnice $\frac{dY}{dI} (1 - \frac{dC}{dY}) = 1$ vztah

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}} = \frac{1}{1 - c_1 - 2c_2 Y}.$$

Ekonomické modely jsou často tvořeny na základě dlouhodobých pozorování a výzkumů. Při dlouhodobém růstu je **důchod** považován za veličinu závislou na čase $Y = Y(t)$.

Poměr $r(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ se nazývá **tempem růstu důchodu** v čase t .

Necht' $Y(t) = Y_0 e^{\alpha t}$, $\alpha = \text{konst.}$

Pak $Y'(t) = Y_0 \alpha e^{\alpha t}$, $\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha$, $r(t) = \alpha$.

Tato situace vyjadřuje **stacionární růst důchodu**.

Existují ekonomické modely, které předpokládají, že důchod Y a zaměstnanost L je ve vztahu $Y = AL^\beta$, kde A a β jsou konstanty. Pak je **produktivita práce** definována

jako podíl $\frac{Y}{L}$ a **mezní produktivita** jako derivace $Y'(t) = \frac{dY}{dL} = A \beta L^{\beta-1}$.

Příklad:

Jaké je tempo růstu důchodu $r(t)$ pro $t = 50$, jestliže je důchod dán funkcí

$$Y(t) = t^3 - 2t + 50 \text{ ?}$$

Řešení:

$$r(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

$$r(t) = \frac{3t^2 - 2}{t^3 - 2t + 50}$$

Dosadíme za t :

$$r(t) = \frac{3 \cdot 50^2 - 2}{50^3 - 2 \cdot 50 + 50}$$

$$r(t) = 3$$

Tempo růstu důchodu je rovno 3.

2.7 Procvičování

1) Celkové náklady na výrobu Q jednotek jsou dány funkcí $TC(Q) = 23Q^2 + \ln(Q + 15)$. Stanovte funkci mezních nákladů $MC(Q)$. Vyřešte pro $Q = 9$.

2) Celkový příjem daný prodejem Q jednotek daného produktu je definován vzorcem $TR(Q) = \sqrt{350Q} + Q^3$. Určete mezní příjem $MR(Q)$. Vyřešte pro $Q = 4$.

3) Celkový užitek daný spotřebou Q jednotek daného statku je definován vzorcem

$$TU(Q) = \sqrt{\frac{6Q}{8Q+10}}. \text{ Určete mezní užitek } MU(Q) \text{ pro } Q = 3. \text{ (Platí pouze}$$

v případě pouze jednoho druhu statku).

4) Celková poptávka je dána funkcí $D(p) = \frac{100}{2p - 14}$. Určete elasticitu

poptávky pro $p = 5$.

5) Celkový zisk daný prodejem Q jednotek daného produktu je definován vzorcem $\Pi(Q) = (-Q)^2 + 3Q - 7$. Spočítejte, kdy bude mít firma maximální zisk.

Výsledky:

1) $MC = 414$

2) $MR = 48$

3) $MU = 0,364$

4) $E_D = \frac{1}{1200}$

5) $Q = 3$

