

# Neparametrické testy

Mgr. Jiří Mazurek, PhD.

# Co přináší neparametrické testování hypotéz

V případě **ordinálních (pořadových) nebo nominálních dat** odpovídá na specifické otázky:

1. Existuje významný soulad dané charakteristiky vzorku se zadanou charakteristikou?
2. Existuje významný rozdíl dané charakteristiky mezi 2 (nebo více) vzorky?

**Charakteristika** - např. medián, zadané pořadí, rozdělení pravděpodobnosti (četnosti) aj.

# Neparametrické hypotézy

- Neparametrické hypotézy se netýkají parametrů rozdělení náhodné veličiny, nýbrž jiných statistických vlastností, např. tvaru rozdělení, nezávislosti náhodných veličin a podobně.
- O neparametrických testech se také hovoří obecněji v případech, kdy nejsou splněny některé standardně vyžadované předpoklady pro provedení daného testu. (např. u t-testů jsme požadovali splnění jistých podmínek, aby mohl být daný statistický test realizován – požadovali jsme, aby výběr pocházel z normálního rozdělení.)
- Jsou situace, kdy takový předpoklad splněn není, a pak je otázkou jak postupovat.

# Možnost testů

- Existují testy „robustnějšího“ charakteru, kterými lze testovat vlastnosti populace, ze které náhodný výběr pochází, a přitom je třeba splnit pouze podmínky velmi obecného charakteru pro využití těchto testů.
- V takových případech hovoříme rovněž o neparametrických testech, byť jimi můžeme testovat konkrétní podobu parametrů daného rozdělení.
- Pod pojmem neparametrický test budeme zahrnovat statistický test, jenž zkoumá jiné vlastnosti neznámé populace či základního souboru než ty vlastnosti, které se týkají přímo parametrů této populace.

# Neparametrické testy hypotéz

- Ad 1) **Jednovýběrové testy:**
  - Má medián populace s neznámým rozdělením stanovenou hodnoru? (mediánový test)
  - Pochází výběr z populace se zadaným (známým) rozdělením pravděpodobnosti? (Chi-kvadrát test, Kolmogorov-Smirnovův test)
- Ad 2) **Dvouvýběrové testy:**
  - Mají výběry stejný medián? (mediánový test)
  - Pochází výběry ze stejné populace? (Chi-kvadrát test, Mann-Whitneyův test, Wilcoxonův párový test)

# Mediánový test

- hodnoty mediánu (prostřední hodnoty v populaci).
- Pokud jde o populaci, která má tu vlastnost, že její populační průměr se shoduje s mediánem, lze mediánový test využít také jako jednovýběrový t-test.
- Jedinou podmínkou pro použití mediánového testu je předpoklad, že rozdělení četností v populaci je možno popsat distribuční funkcí spojitého typu. Nepožaduje se tedy v tomto případě normální rozdělení jako v případě jednovýběrového t-testu.

# Mediánový test - předpoklady

- Označme neznámý medián v populaci symbolem  $\tilde{\mu}_0$ , rozsah vzorku dat, který je k dispozici, je  $n$ . Předpokládáme větší rozsah výběru, neboť platnost dále popsaného testu se zpřesňuje s růstem rozsahu  $n$ .

# Mediánový test

1. Nulová hypotéza:  $H_0: \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$

Alternativní hypotéza:  $H_1: \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$

2. Testové kritérium:  $T = \frac{|2m-n|}{\sqrt{n}}$ ,

- kde  $m$  je počet pozorování, která jsou menší než  $\tilde{\mu}_0$

3. Kritická hodnota je  $K = z_{1-\alpha/2}$

- $z_{1-\alpha/2}$  je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pro zadanou hladinu významnosti  $\alpha$ .

4. Jestliže platí  $T \geq K$ , potom se  $H_0$  zamítá, jinak se  $H_0$  přijímá.



# Mediánový test - poznámky

- $z_{1-\alpha/2}$  je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pro zadanou hladinu významnosti  $\alpha$ .
- Je to tedy reálné číslo  $z_{1-\alpha/2}$  takové, že pravděpodobnost jeho překročení (nebo dorovnání) je rovna hodnotě  $1-\alpha/2$ .
- Tuto hodnotu nalezneme buď ve statistických tabulkách normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$  nebo pomocí Excelu použitím funkce `NORMSINV (1- $\alpha/2$ )`

# Příklad 1

- Budeme testovat hypotézu (na hladině významnosti 0,05), že průměrný plat v jistém podniku je 35 000 Kč. Z 50 zaměstnanců podniku mělo 30 zaměstnanců plat nižší než 35 000 Kč.
- Vypočteme testové kritérium  $T = \left| \frac{2m-n}{\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{2*20-50}{\sqrt{50}} \right| = 0,14$ .
- Krit. hodnota (z tabulek):  $K = 1,96$ .
- $H_0$  přijímáme.

# Testy dobré shody

- Další kategorií testů, které probereme, jsou tzv. **testy dobré shody**.
- Do této skupiny statistických metod patří řada testů, my se budeme zabývat dvěma z nich, které lze považovat za základní a často využívané při marketingových či sociologických výzkumech.
- **První test** je zaměřen na testování podoby pravděpodobnostního rozdělení, z něhož pochází náhodný výběr, který je k dispozici.
- **Druhý test** zkoumá statistickou nezávislost dvou znaků. Protože se v obou případech pracuje s rozdělením chí-kvadrát, pokud jde o rozdělení testového kritéria, hovoří se také o chí-kvadrát testech.

# Chi-kvadrát test

( $\chi^2$  - test pro 1 výběr)

- Data mohou být nominální (nejslabší požadavek)!
- Testuje se (nulová) hypotéza: výběr pochází z populace se zadaným rozdělením
- Zadané rozdělení je obvykle:
  - diskrétní rozdělení s rozdílnými pravdě- podobnostmi (tzv. **test dobré shody**)
  - diskrétní rozdělení se stejnými pravdě- podobnostmi (tzv. **test nezávislosti**)

# Test dobré shody

- Pro (Pearsonův) test dobré shody předpokládáme, že výsledky náhodného výběru lze uspořádat do  $J$  nepřekrývajících se tříd.
- Četnosti v jednotlivých třídách značíme  $n_1, n_2, \dots, n_J$ , celkový rozsah náhodného výběru je  $n$ .
- Testovaná hypotéza spočívá v předpokladu určitého modelu pravděpodobnostního rozdělení, tedy předpokladu pravděpodobností pro každou třídu  $p_1, p_2, \dots, p_J$ , součet všech pravděpodobností dává hodnotu 1.
- Test dobré shody spočívá v porovnání naměřených (empirických) četností s četnostmi teoretickými.
- Teoretické četnosti  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_J$  získáte jako součin odpovídající pravděpodobnosti a rozsahu náhodného výběru:  
 $p_i \cdot n_i$
- Podmínkou použitelnosti testu jsou teoretické četnosti větší než 5.

# Postup testu

1. Stanovení hypotézy:  $H_0 : p_1 = \pi_1, p_2 = \pi_2, \dots, p_j = \pi_j$  (slovy: dobrá shoda),  
 $H_1 : \exists i, p_i \neq \pi_i$  (negace  $H_0$ ).
2. Testové kritérium:  $G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i}$ .
3. Obor přijetí:  $\langle 0, \chi_{J-1}^2(\alpha) \rangle$ , kritický obor:  $(\chi_{J-1}^2(\alpha), +\infty)$ , kde  $\chi_{J-1}^2(\alpha)$  je kritická hodnota  $\chi^2$ -rozdělení s  $df = J - 1$ .
4. Závěr.

# Excel

- V Excelu dostanete kritickou hodnotu pomocí funkce **CHIINV**.
- Další funkce programu Excel, funkce **CHITEST(Aktuální;Očekávané)** vám umožní spočítat  $p$  hodnotu testu.
- Argumenty funkce CHITEST jsou naměřené – aktuální hodnoty  $n_i$  a pak teoretické – očekávané hodnoty  $\psi_i$ . Testové kritérium získáte z  $p$ -hodnoty pomocí funkce CHIINV.

# Příklad 2

- Dodavatel slíbil, že dodávka bude obsahovat 70% výrobků 1. jakosti, 20% druhé jakosti a 10% jakosti třetí.
- Při kontrole dodávky kontroloři náhodně vybrali 100 výrobků a zjistili, že 75 kusů je 1. jakosti, 10 kusů je 2. jakosti a 15 kusů je jakosti třetí.
- Na hladině významnosti 0,05 zjistěte, zda dodavatel dodržel smlouvu.



# Příklad 2 – řešení

- V následující tabulce je přehled zadání a výpočet teoretických hodnot. Celkový počet pozorování je  $n = 100$ .

<b>Četnost výskytu <math>n_i</math></b>	<b>Pravděpodobnost <math>p_i</math></b>	<b>Teoretická četnost <math>\psi_i = p_i n_i</math></b>
75	0,7	70
10	0,2	20
15	0,1	10

# Příklad 2 – dosazení do vzorce

1. Stanovení hypotézy:  $H_0 : p_1 = 0,7, p_2 = 0,2, p_3 = 0,1$  (shoda – smlouva dodržena)  
 $H_1$  : negace  $H_0$  (neshoda – dodavatel šidí).

2. Testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i} = \frac{(75 - 70)^2}{70} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 10)^2}{10} =$$
$$= \frac{25}{70} + \frac{100}{20} + \frac{25}{10} = 7,857.$$

3. Kritickou hodnotu naleznete takto:  $\text{CHIINV}(0,05;2)=5,991476$ . Potom obor přijetí:  $\langle 0;5,99 \rangle$ , kritický obor:  $(5,99;+\infty)$ .
4. Závěr: Testové kritérium leží v kritickém oboru. Zamítáme hypotézu dobré shody vzorku s předpokladem. Dodavatel nedodržel smlouvu.

# Příklad 2 – výpočet pomocí aplikace EXCEL

- Použijete-li k testování funkci CHITEST, naleznete po dosazení naměřených a teoretických hodnot výsledek  $p = 0,01967$  .
- Toto číslo je menší než zadaná hladina významnosti  $\alpha=0,05$ , a tedy zamítáme nulovou hypotézu, dodavatel nedodržel smlouvu.
- Testové kritérium získáte z pravděpodobnosti  $p$  pomocí funkce CHIINV, jejíž argumenty budou pravděpodobnost a počet stupňů volnosti.
- Zkontrolujte si, že  $\text{CHIINV}(0,019671;2)=7,857$ .

# Test nezávislosti kvalitativních znaků

- Jednou z aplikací testu dobré shody je testování nezávislosti kvalitativních znaků v **kontingenční tabulce**.
- Jedná se o  $n$  náhodných pokusů, které nemají přesné výsledky, ale výsledky určují rozdělení do kategorií.
- Příkladem může být kvalitativní znak úspěch s kategoriemi úspěš/něúspěš nebo znak barva s kategoriemi červená/modrá/zelená.
- Sleduje se více znaků, pro dva znaky  $A$  a  $B$  by výsledná tabulka četností (kontingenční tabulka) vypadala takto:

# Příklad kontingenční tabulky

Kategorie znaku $A/B$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	...	$B_s$	Marginální součty
$A_1$	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	...	$n_{1,s}$	$n_{1,\cdot}$
$A_2$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$	...	$n_{2,s}$	$n_{2,\cdot}$
$A_3$	$n_{3,1}$	$n_{3,2}$	$n_{3,3}$	...	$n_{3,s}$	$n_{3,\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
$A_r$	$n_{r,1}$	$n_{r,2}$	$n_{r,3}$	...	$n_{r,s}$	$n_{r,\cdot}$
<b>Marginální součty</b>	$n_{\cdot,1}$	$n_{\cdot,2}$	$n_{\cdot,3}$		$n_{\cdot,s}$	<b>Celkový součet <math>n</math></b>

- Počet kategorií znaku  $A$  označme  $r$  a toto číslo současně označuje počet řádků tabulky.
- Počet kategorií znaku  $B$  označme  $s$  a tento počet je v tabulce vyjádřen počtem sloupců.
- Celkový počet pozorování je  $n$ .
- Test nezávislosti se může provádět, jen když je každá z četností  $n_{ij}$  větší než 4.

# Teoretické hodnoty

- Chceme-li použít k testování nezávislosti znaků  $A$  a  $B$  test dobré shody, potřebujeme mít k dispozici teoretické hodnoty, které pak následně porovnáme s hodnotami naměřenými.
- Teoretické četnosti jsou hodnoty, které by byly v tabulce, kdyby oba znaky byly nezávislé a současně by marginální četnosti zůstaly stejné jak u empirických hodnot.
- Teoretické hodnoty lze vypočítat ze vztahu:

$$\psi_{i,j} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n}$$

# Tabulka teoretických četností

Kategorie znaku $A/B$	$B_1$	...	$B_s$	Marginální součty
$A_1$	$\psi_{1,1} = \frac{n_{1,1} \cdot n_{\cdot,1}}{n}$	...	$\psi_{1,s} = \frac{n_{1,s} \cdot n_{\cdot,s}}{n}$	$n_{1, \cdot}$
$A_2$	$\psi_{2,1} = \frac{n_{2,1} \cdot n_{\cdot,1}}{n}$	...	$\psi_{2,s} = \frac{n_{2,s} \cdot n_{\cdot,s}}{n}$	$n_{2, \cdot}$
...	...	...	...	...
$A_r$	$\psi_{r,1} = \frac{n_{r,1} \cdot n_{\cdot,1}}{n}$	...	$\psi_{r,s} = \frac{n_{r,s} \cdot n_{\cdot,s}}{n}$	$n_{r, \cdot}$
<b>Marginální součty</b>	$n_{\cdot,1}$	...	$n_{\cdot,s}$	<b>Celkový součet <math>n</math></b>

# Postup testování

1. Stanovení hypotézy:  $H_0 : p_{i,j} = p_i \cdot p_j, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$  (nezávislost znaků),  
 $H_1 : \text{negace } H_0$ .
2. Testové kritérium:  $G = \sum_{i=1}^J \frac{(n_i - \psi_i)^2}{\psi_i}$ .
3. Obor přijetí:  $\langle 0, \chi_{(r-1)(s-1)}^2(\alpha) \rangle$ , kritický obor:  $(\chi_{(r-1)(s-1)}^2(\alpha), +\infty)$ , kde  $\chi_{(r-1)(s-1)}^2(\alpha)$  je kritická hodnota chi-rozdělení s  $df = (r-1)(s-1)$ .
4. Závěr.



# Příklad 3

- Bylo zkoumáno nákupní chování mužů a žen, které se týkalo návštěv obchodního domu Karolína Ostrava. V Tabulce níže je uveden počet žen a mužů, kteří v Karolíně pravidelně nakupují.

	<b>ANO</b>	<b>NE</b>	
<b>Muži</b>	<b>12</b>	<b>34</b>	46
<b>Ženy</b>	<b>25</b>	<b>16</b>	41
	37	50	87

Zjistěte na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$ , zda se nákupní zvyklosti mužů a žen liší.

# Příklad 3 - pokračování

- V našem případě se kontingenční tabulka nazývá 4polní tabulka.

	Kat. 1	Kat. 2	
Kat. 1	A	B	
Kat. 2	C	D	

Testové kritérium se vypočte takto: 
$$G = \frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

Kritickou hodnotu najdeme v tabulkách pro chí-kvadrát rozdělení s 1 stupněm volnosti.

# Příklad 3 - pokračování

- Bylo zkoumáno nákupní chování mužů a žen, které se týkalo návštěv obchodního domu Karolína Ostrava. V Tabulce níže je uveden počet žen a mužů, kteří v Karolíně pravidelně nakupují. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  otestujte hypotézu, že se nákupní chování mužů a žen neliší.

	ANO	NE	
Muži	12	34	46
Ženy	25	16	41
	37	50	87

$H_0$ : Nákupní chování mužů a žen se neliší.

$H_1$ : liší se.

$$G = \frac{87(12 \cdot 16 - 25 \cdot 34)^2}{(12+34)(25+16)(12+25)(34+16)} = 10.79; K(\text{df} = 1, \alpha = 0.05) = 3.84.$$

$H_0$  zamítáme.

# Příklad 4

- Vysoká škola zjišťovala, jestli existuje závislost mezi známkami z matematiky a mikroekonomie.
- Do výzkumu zahrnula 100 studentů druhých ročníků, kteří měli obě zkoušky za sebou. Výsledky jsou uspořádány v následující kontingenční tabulce.
- Na hladině významnosti 0,05 určete, zda lze pozorovat závislost mezi těmito dvěma předměty.

	Mikroekonomie			
Známka	1	2	3	
Matematika	7	5	8	20
	5	11	12	28
	14	19	19	52
	26	35	39	100

# Příklad 4 - řešení

- $H_0$ : Mezi známkami z matematiky a mikroekonomie není závislost.

$H_1$ : je závislost.

- Testové kritérium G:

- $$G = 100 \left( \frac{7^2}{20 \cdot 26} + \frac{5^2}{20 \cdot 35} + \frac{8^2}{20 \cdot 39} + \frac{5^2}{26 \cdot 28} + \frac{11^2}{35 \cdot 28} + \frac{12^2}{39 \cdot 28} + \frac{14^2}{26 \cdot 52} + \frac{19^2}{35 \cdot 52} + \frac{19^2}{39 \cdot 52} - 1 \right) = 2.3$$

- $K(df = 4, \alpha = 0.05) = 9.49$ .

- $H_0$  přijímám.

	Mikroekonomie			
Známka	1	2	3	
	7	5	8	20
	5	11	12	28
Matematika	14	19	19	52
	26	35	39	100

Děkuji za pozornost