ŠKODA AUTO Vysoká škola

Operační výzkum I

Přednášky

Jan Fábry

12/2/2022

Literatura

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Základní

- FÁBRY, J. Operační výzkum pro prezenční a kombinovanou formu studia. 1. vyd. ŠAVŠ o.p.s., 2019. 164 s. ISBN 978-80-87042-84-7.
- JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum.: Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. 323 s. ISBN 978-80-86946-44-3.

Doporučená

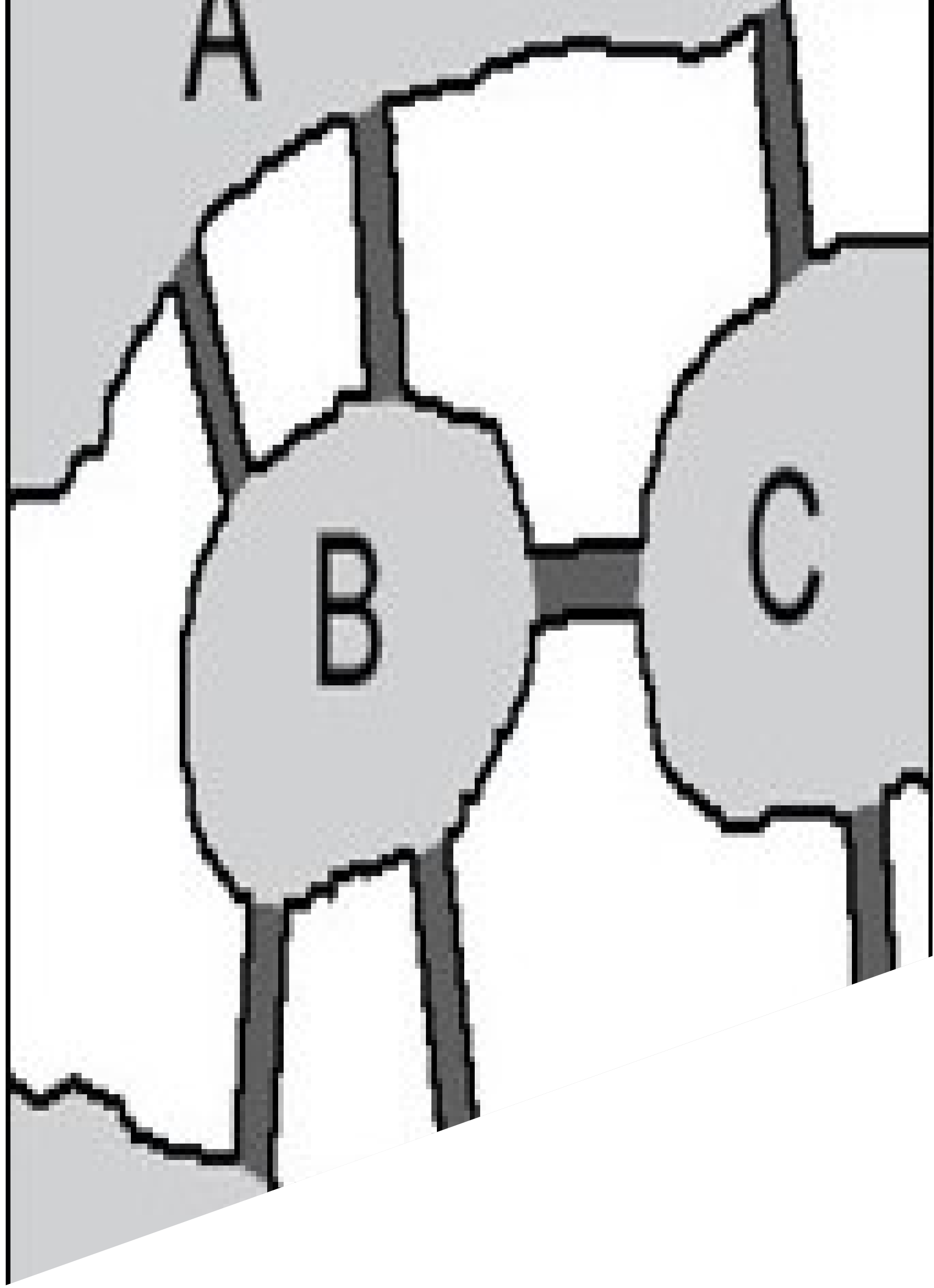
- FÁBRY, J. *Matematické modelování*. Praha: Professional Publishing, 2011. 180 s. ISBN 978-80-7431-066-9.
- JABLONSKÝ, J. Programy pro matematické modelování. Praha: Oeconomica, 2011. 258 s. ISBN 978-80-245-1810-7.
- EISELT, H. -- SANDBLOM, C. Operations Research.: A Model - Based Approach. 1. vyd. Heidelberg: Springer, 2010. ISBN 978-3-642-10325-4.
- HILLIER, F S. -- LIEBERMAN, G J. Introduction to operations research /: Eleventh edition. McGraw-Hill, 2021. 964 s. ISBN 9781260575873.
- BOUCHERIE, R J. -- BRAAKSMA, A. -- TIJMS, H C. Operations research: introduction to models and methods. World Scientific, 2022. ISBN 9789811239342.
- RARDIN, R L. Optimization in operations research /: Second edition. Pearson, 2018. 1144 s. ISBN 978-93-530-6636-9.

Obsah kurzu

- **Úvod do operačního výzkumu**
  - Definice a historie
  - Rozhodovací problém
  - Modelový přístup
  - Klasifikace modelů
- **Lineární programování**
  - Úvod
  - Úlohy výrobního plánování
  - Směšovací problém
  - Řezná úloha
  - Optimalizace portfolia
  - Dopravní problém
  - Kontejnerový dopravní problém
  - Přiřazovací problém
  - Úloha o pokrytí
  - Úloha obchodního cestujícího
- **Teorie grafů**
  - Úvod
  - Hledání nejkratší cesty
  - Optimální spojení míst
  - Další optimalizační úlohy
- **Řízení projektů**
  - Úvod
  - Metoda kritické cesty CPM
  - Metoda PERT
- **Modely řízení zásob**
  - Úvod
  - Model EOQ – Optimální velikost objednávky
  - Produkčně – spotřební model
  - Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou
- **Modely hromadné obsluhy**
  - Úvod
  - Jednoduchý exponenciální model HO
  - Exponenciální model HO s paralelními zařízeními

1

Úvod do operačního výzkumu



Úvod do operačního výzkumu

Alternativní názvy v zahraniční literatuře

- Operational / Operations Research
- Management Science
- Operations Analysis
- Quantitative Analysis
- Quantitative Methods
- Systems Analysis
- Decision Analysis
- Decision Science
- Computer Science

Úvod do operačního výzkumu

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Definice

1. OV je aplikací vědeckých metod, technik a nástrojů na problémy zahrnující systémové operace, tak jako poskytnutí kontroly operacím s optimálním řešením úloh.
2. OV je aplikací vědeckých metod pro studium rozsáhlých úloh, složitých organizací nebo aktivit.
3. OV je aplikací vědeckých metod při analýze a řešení rozhodování manažerských problémů.

- **Shrnutí**
  - Aplikace VĚDĚCKÝCH METOD.
  - Studuje ROZSÁHLÉ & SLOŽITÉ SYSTÉMY.
  - Analyzuje MANAŽERSKÉ PROBLÉMY.
  - Hledá OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ.
  - Používá MATEMATICKÉ MODELY.
  - Používá SPECIÁLNÍ SOFTWARE.

Úvod do operačního výzkumu

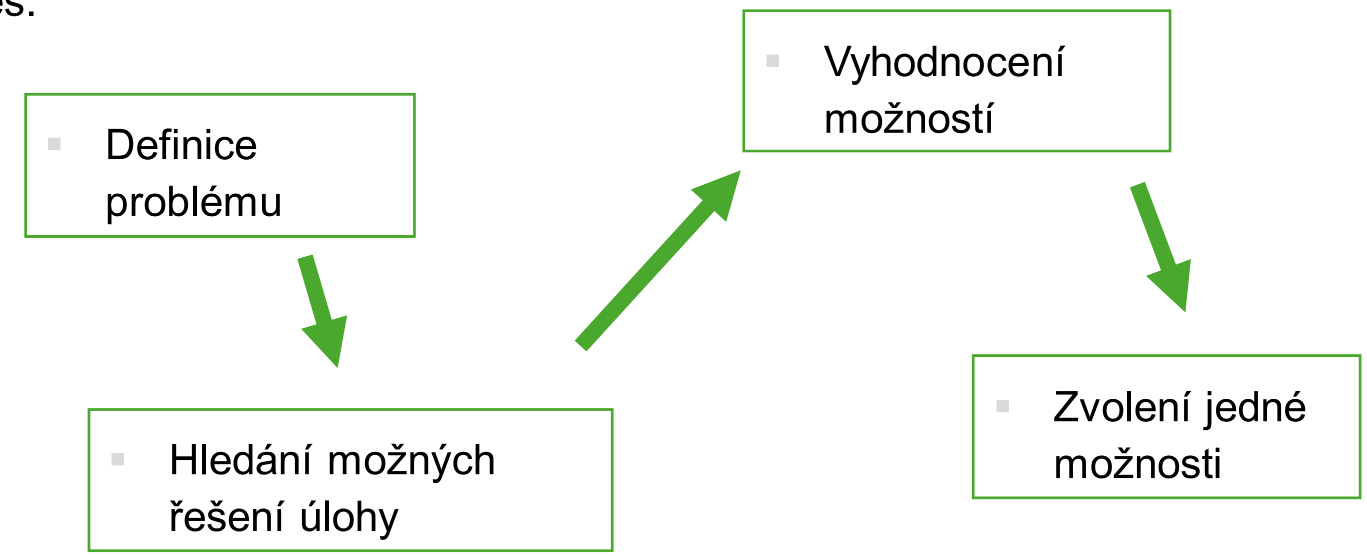
Software

- MPL for Windows
- AMPL
- Lingo (LINDO)
- XPRESS (FICO)
- AIMMS
- CPLEX (IBM ILOG)
- Gurobi
- NEOS
- MS Excel (FRONTLINE SOLVERS)
- PLANT SIMULATION
- SIMPROCESS
- SIMUL 8
- Matlab

Úvod do operačního výzkumu

Rozhodovací problém

- Dvě nebo více možností.
- Výsledek = rozhodnutí.
- Systematický proces.

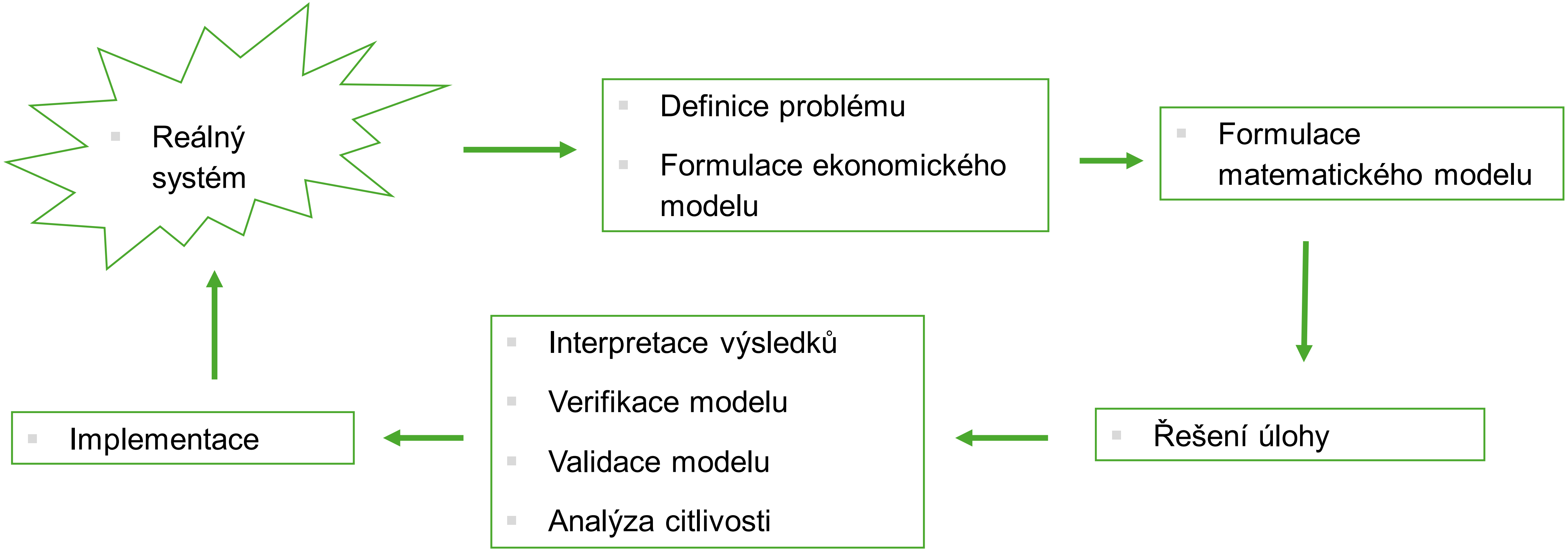


Obr. 1 – Schéma procesu rozhodovacího problému

Úvod do operačního výzkumu

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Matematické modelování (Rozhodovací problém)

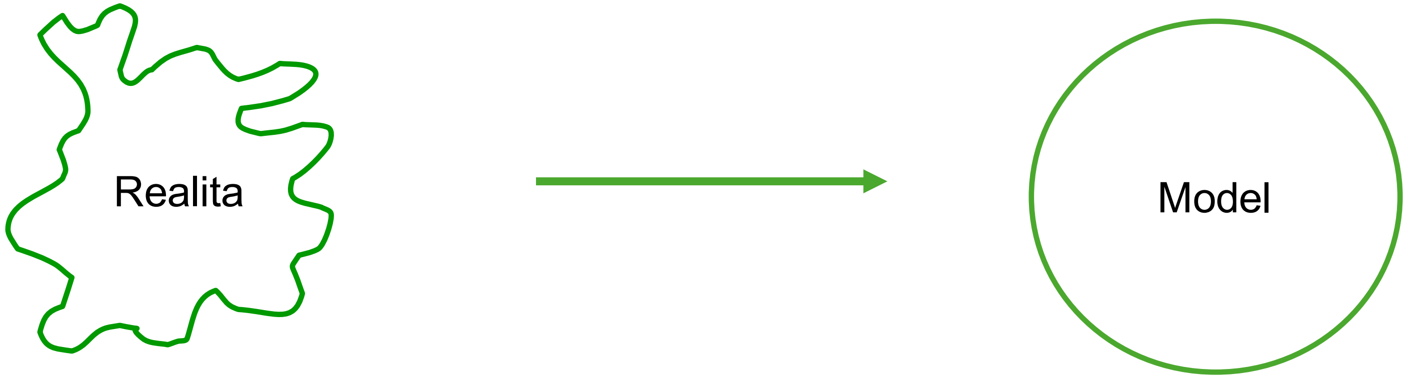


Obr. 2 – Schéma matematického modelování

Úvod do operačního výzkumu

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Modelový přístup



Obr. 3 – Model jako zjednodušení reality

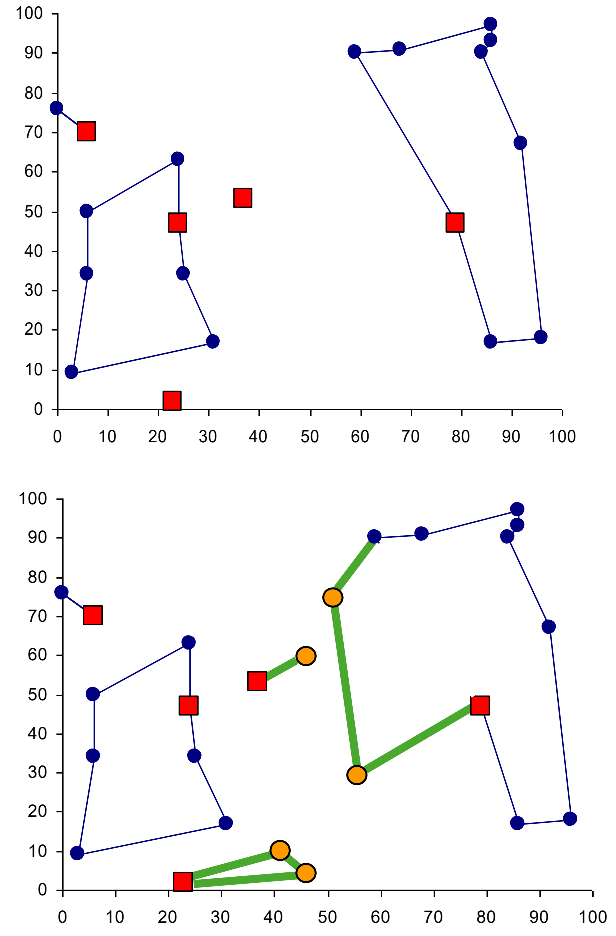
- Nalezení kompromisu mezi zjednodušením modelu a vhodnou úrovní věrného zachycení reality.

Úvod do operačního výzkumu

Klasifikace modelů

- Deterministické – všechna data jsou s jistotou známa.
- Pravděpodobnostní (stochastické) – některé procesy nebo hodnoty se řídí zákony pravděpodobnostního charakteru.

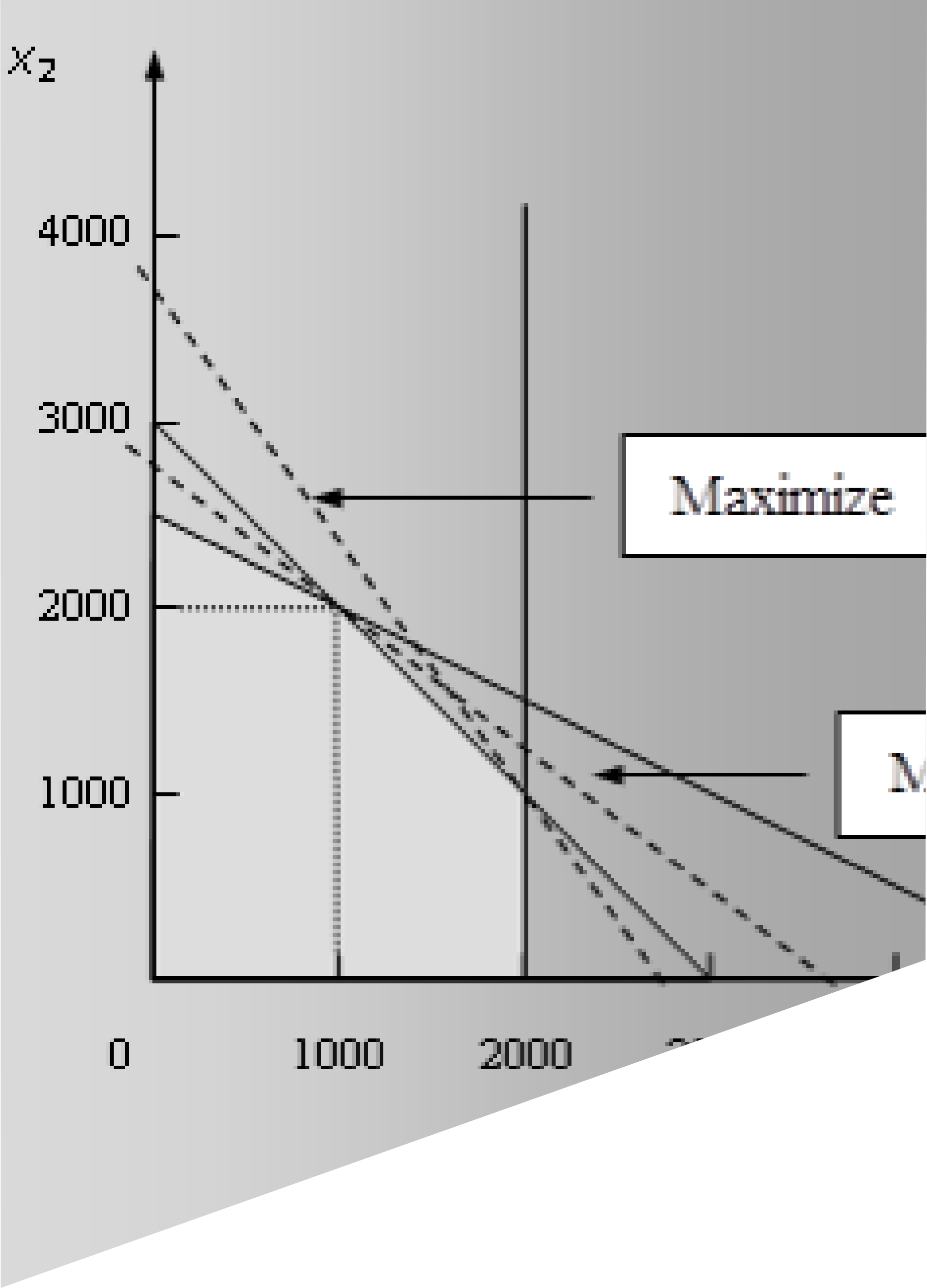
- Statické – všechna data jsou známa předem (před samotným výpočtem).
- Dynamický – data mohou být změněna i po získání řešení.



Obr. 4 – Statický a dynamický model

2

Lineární programování



INTERNAL

Lineární programování

Úvod

- **Ekonomický model**
  - Procesy.
  - Činitelé.
  - Cíl.
- **Matematický model**
  - Proměnné – spojité, celočíselné, binární.
  - Omezující podmínky – rovnice, nerovnice.
  - Účelová funkce – max, min.
- **Řešení**
  - Přípustné – vyhovuje všem omezujícím podmínkám.
  - Optimální – přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce.
  - Nepřípustné – nesplňuje některou z omezujících podmínek.

Lineární programování

Úvod

- **Řešení**
  - Interpretace výsledků – vysvětlení získaných numerických výsledků (např. klientovi).
  - Verifikace modelu – porovnání matematického modelu s ekonomickým modelem.
  - Validace modelu – porovnání výsledků s reálnými očekáváními.
  - Analýza citlivosti – zkoumání důsledků změn vstupů na výstupy.
- **Implementace**
  - Použití výsledků v reálném systému.
- **Speciální případy úloh LP**
  - Jediné optimální řešení.
  - Více optimálních řešení.
  - Žádné optimální řešení.
  - Žádné přípustné řešení.

Lineární programování

Úlohy výrobního plánování

- **Příklad**
  - Firma vyrábí dva typy dřevěných hraček: nákladní autíčka a vláčky.
  - Cena autíčka je 820 Kč, vláčku 1150 Kč. Náklady na dřevo pro autíčko je 100 Kč, pro vláček 180 Kč.
  - Na výrobu jednoho autíčka je potřeba 1 hodina řezbářské práce a 1 hodina dokončovacích prací. Na jeden vláček 2 hodiny řezbářské práce a 1 hodina dokončovacích prací.
  - Cena řezbářské práce je 150 Kč/hod a dokončovacích prací 120 Kč/hod.
  - Každý měsíc je k dispozici 5000 hod řezbářské práce a 3000 hodin dokončovacích prací.
  - Výroba vláčků je neomezená, ale autíček je možné vyrobit maximálně 2000 za měsíc.
  - Cílem je maximalizovat měsíční zisk (rozdíl tržeb a nákladů).

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úlohy výrobního plánování

- **Proměnné**

  x_1 = počet autíček vyrobených každý měsíc,
  x_2 = počet vláčků vyrobených každý měsíc.

- **Matematický model**

$$z = 450x_1 + 550x_2 \rightarrow \max,$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 5000, && \text{(řezbářská práce)} \\
x_1 + x_2 &\le 3000, && \text{(dokončovací práce)} \\
x_1 &\le 2000, && \text{(poptávka)} \\
x_1, x_2 &\ge 0, \\
x_1, x_2 &- \text{ celé}
\end{aligned}
$$

Přídatné proměnné $\longrightarrow$

Ekvivalentní soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5000 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 3000 \\
x_1 + x_5 &= 2000
\end{aligned}
$$

$\le$ + přídatná proměnná
$\ge$ - přídatná proměnná

INTERNAL

Lineární programování

Úlohy výrobního plánování

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

$$x_1 = 1000$$
$$x_2 = 2000$$

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 1550000$$

  - Přídatné proměnné

$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 1000$$

Lineární programování

Směšovací problém

- **Vstupy**
  - chemikálie,
  - slitiny kovů,
  - surová ropa,
  - krmivo pro hospodářská zvířata,
  - potraviny.
- **Požadavky na výstupy a/nebo cíl**
  - kvalita,
  - množství,
  - náklady.
- **Proměnné**
  - množství složek použitých v konečné směsi.

Lineární programování

Směšovací problém

- **Příklad**
  - Stanovte optimální složení krmivové směsi, která bude obsahovat alespoň 100 jednotek bílkovin a alespoň 300 jednotek škrobu a která bude vážit alespoň 200 kg s minimálními pořizovacími náklady.
  - V následující tabulce jsou dány obsahy bílkovin a škrobu v 1 kg každého krmiva a jeho cena za 1 kg.

Tab. 1 – Obsahy bílkovin a škrobu ve směsích, ceny směsí

	Krmivo K_1	Krmivo K_2	Krmivo K_3	Krmivo K_4
Bílkoviny (jednotky)	0	3	1	2
Škrob (jednotky)	1	2	3	0
Cena (Kč)	20	80	60	30

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Směšovací problém

- **Proměnné**

  $x_i =$ množství krmiva K_i v konečné směsi (i = 1,2,3,4)

- **Matematický model**

  Minimalizovat $z = 20x_1 + 80x_2 + 60x_3 + 30x_4$

  za podmínek

$$
\begin{aligned}
3x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 100, && \text{(bílkoviny)}\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 300, && \text{(škrob)}\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 200, && \text{(hmotnost)}\\
x_i &\geq 0, i = 1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

Lineární programování

Směšovací problém

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

$$x_1 = 120$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 60$$
$$x_4 = 20$$

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 6600$$

  - Přídatné proměnné

$$x_5 = 0$$
$$x_6 = 0$$
$$x_7 = 0$$

Lineární programování

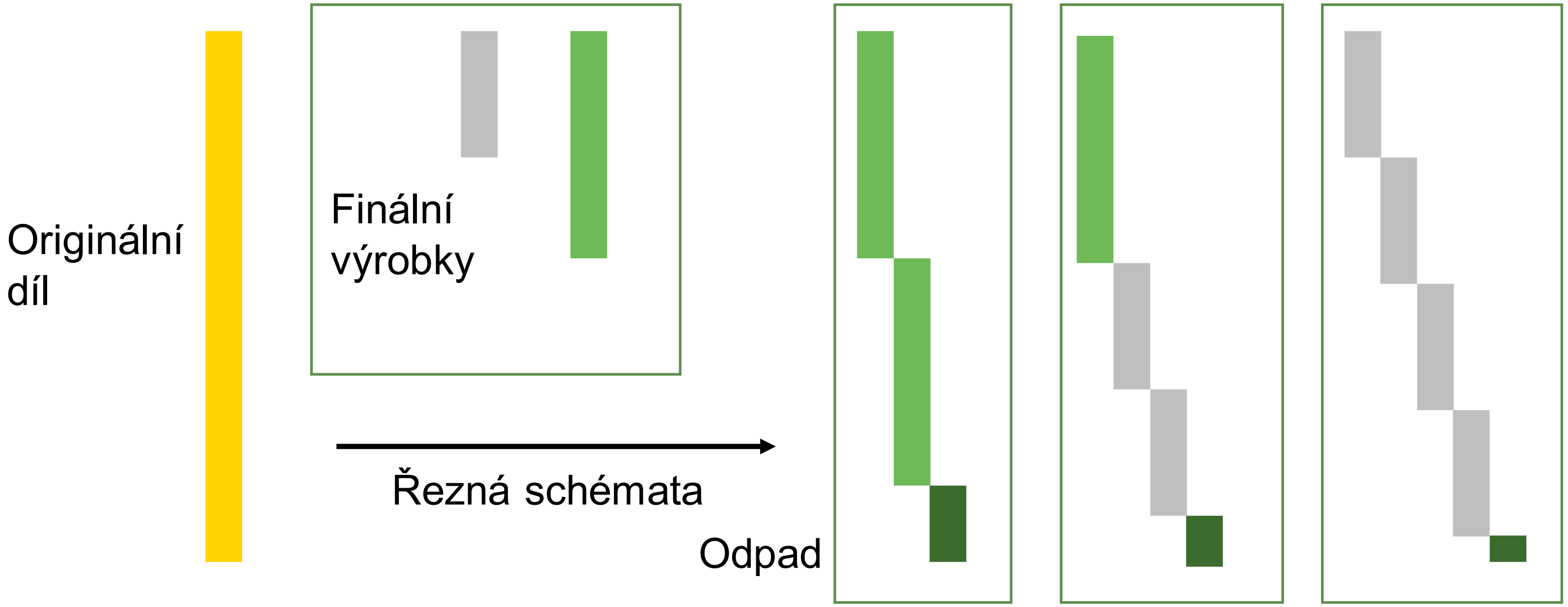
Řezná úloha

- **Vstupy – originální díly (rozměry)**
  - tyče, trubky (1D),
  - role papíru nebo textilu (1D or 2D),
  - dřevěné tyče nebo latě (1D),
  - prkna (1D nebo 2D),
  - ocelové pláty (2D),
  - krabice (3D) – 3D řezná úloha.
- **Výstupy – dokončené nebo rozpracované výrobky**
- **Cíle**
  - minimalizace odpadu,
  - minimalizace počtu původních dílů použitých pro získání požadovaného množství nařezaných dílů,
  - maximalizace tržeb či zisku z prodeje vyrobených výrobků.

Lineární programování

Řezná úloha

- **Tabulka řezných schémat**
  - Obsahuje všechny možnosti rozřezaní originálních dílů.
  - Každé schéma odpovídá jedné proměnné představující počet originálních dílů, které byly rozřezány dle schématu.



Obr. 5 – Řezná schémata

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Řezná úloha

- **Příklad**
  - Firma vyrábí ptačí krmítka a budky. Výrobce se rozhodl připravit speciální kolekci pro výstavu (s možností prodeje), která se uskuteční za 20 dní.
  - Cena krmítka je 260 Kč, cena budky je 570 Kč.
  - Spotřeba materiálu a čas nezbytný k výrobě obou výrobků jsou uvedeny níže v tabulce 2.

Tab. 2 – Spotřeba materiálu a časové nároky na výrobu

	Krmítko	Budka
Prkna 30 cm	1	2
Prkna 25 cm	1	4
Vruty	8	16
Čas (v min)	30	60

Lineární programování

Řezná úloha

- **Příklad**
  - Firma má k dispozici 500 prken dlouhých 1,1 m a 150 prken o délce 1,4 m. Prkna se musí rozřezat na díly o délce 25 a 30 cm.
  - K dispozici je 3000 vrutů.
  - Výrobce pracuje 8 hodin denně. Cílem je naplánovat výrobu tak, aby celkové tržby z prodeje výrobků byly maximální.

Tab. 3 – Tabulka řezných schémat

	Prkno o délce 1,1 m				Prkno o délce 1,4 m				
Číslo schématu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prkno o délce 30 cm	3	2	1	0	4	3	2	1	0
Prkno o délce 25 cm	0	2	3	4	0	2	3	4	5
Odpad (cm)	20	0	5	10	20	0	5	10	15

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Řezná úloha

- **Proměnné**

  x_i = počet prken dlouhých 1,1 m rozřezaných podle schématu *i* (*i* = 1,…,4),

  x_i = počet prken dlouhých 1,4 m rozřezaných podle schématu *i* (*i* = 5,…,9),

  x_{10} = počet vyrobených krmítek,

  x_{11} = počet vyrobených budek.

- **Matematický model**

  Maximalizovat $z = 260\,x_{10} + 570\,x_{11}$

  za podmínek

  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500$ (prkna 1,1 m)

  $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 150$ (prkna 1,4 m)

Lineární programování

Řezná úloha

- **Matematický model**

$$8x_{10} + 16x_{11} \leq 3000 \quad \text{(vruty)}$$

$$0,5x_{10} + x_{11} \leq 160 \quad \text{(čas)}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 \geq x_{10} + 2x_{11} \quad \text{(prkna 30 cm)}$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 \geq x_{10} + 4x_{11} \quad \text{(prkna 25 cm)}$$

$$x_1, x_2, ..., x_{11} \geq 0$$

$$x_1, x_2, ..., x_{11} \text{ – celé}$$

Lineární programování

Řezná úloha

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{10} = 0 \\
x_2 &= 65 \\
x_5 &= 48 \\
x_9 &= 102 \\
x_{11} &= 160
\end{aligned}
$$

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 91200$$

  - Přídatné proměnné

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 435 & y_4 &= 0 \\
y_2 &= 0 & y_5 &= 2 \\
y_3 &= 440 & y_6 &= 0
\end{aligned}
$$

- Tyto hodnoty mohou být odlišné, protože existuje více optimálních řešení.

Lineární programování

Optimalizace portfolia

- **Zadání úlohy**
  - Úloha finančního plánování.
  - Rozdělení disponibilní částky mezi několik investičních alternativ.
  - Finanční riziko.
  - Cílem investování do cenných papírů je získání určité částky peněz (výnos).
  - Cílem je maximalizovat celkový očekávaný výnos a minimalizovat celkové riziko spojené s investicí.
- **Alternativní investice**
  - Akcie, obligace atd.
- **Rozhodovací subjekty**
  - Podílový fond, banka, penzijní fond, pojišťovna, individuální investor.

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Optimalizace portfolia

- **Příklad**
  - Vedení investiční společnosti zvažuje investici do akcií 4 firem produkujících nápoje.
  - Aby společnost předešla ztrátám plynoucím z rizika spojeného s investováním do soukromého sektoru, rozhodlo se vedení společnosti část peněz investovat do vládních obligací.
  - Celková investovaná částka činí 2 mil. Kč. Z dlouhodobého sledování finančního trhu vyplývají roční procenta očekávaného výnosu a indexy rizika u sledovaných cenných papírů, uvedené v tabulce 4.

Tab. 4 – Investiční soubor

Cenný papír	Výnos	Riziko
České pivovary a.s.	12 %	0,07
Víno Morava a.s.	9 %	0,09
Moravská švestka a.s.	15 %	0,05
České mlékárny a.s.	7 %	0,03
Vládní obligace	6 %	0,01

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Optimalizace portfolia

- **Příklad**
  - Na poradě managementu společnosti bylo rozhodnuto o následujících pravidlech:
    1) Do akcií Českých mlékáren, a.s. se nesmí investovat více než 200 tis. Kč.
    2) Investice do vládních obligací musí činit alespoň 20 % všech investic.
    3) Z hlediska diverzifikace portfolia se do akcií žádné z firem vyrábějících alkoholické nápoje nesmí investovat více než 800 tis. Kč.
    4) Celkový index rizika portfolia nesmí přesáhnout hodnotu 0,05.
  - Cílem společnosti je maximalizovat očekávaný roční výnos portfolia při dodržení všech uvedených podmínek.

Lineární programování

Optimalizace portfolia

- **Proměnné**

  x_i = finanční částka investovaná do i– tého titulu cenného papíru ($i = 1, 2, \dots, 5$).

- **Matematický model**
  - Maximalizovat $z = 0{,}12x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}15x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}06x_5$

    za podmínek

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2000,$ (2 mil. Kč)

$x_4 \leq 200,$ (do akcií Českých mlékáren a.s. se nesmí investovat více než 200 tis. Kč)

$x_5 \geq 400,$ (alespoň 20 % výše všech investic musí být do vládních obligací)

$x_1 \leq 800;\ x_2 \leq 800; x_3 \leq 800,$ (nesmí být investováno více než 800 tis. Kč do firem vyrábějících alkoholické nápoje)

$\frac{0{,}07x_1+0{,}09x_2+0{,}05x_3+0{,}03x_4+0{,}01x_5}{2\,000} \leq 0{,}05,$ (celkový index rizika portfolia nesmí přesáhnout 0,05)

$0{,}07x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}03x_4 + 0{,}01x_5 \leq 100,$

$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,5.$ (podmínky nezápornosti)

Lineární programování

Optimalizace portfolia

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

$$x_1 = 800,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = 800,$$

$$x_4 = 0,$$

$$x_5 = 400.$$

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 240.$$

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Dopravní problém

- **Zadání úlohy**
  - Přeprava homogenního produktu.
  - Množina dodavatelů s omezenou kapacitou.
  - Množina odběratelů s poptávkou (požadavkem).
  - Jednotkové přepravní náklady pro všechny dvojice dodavatelů a odběratelů.
  - Cílem je uspokojit požadavky všech odběratelů při minimálních celkových přepravních nákladech, přičemž nesmí být překročena kapacita žádného z dodavatelů.
- **Typy dopravních problémů**
  - Vyrovnaný – celková kapacita je rovna celkovému požadavku.
  - Nevyrovnaný – celková kapacita se liší od celkového požadavku. Existuje možnost převést problém na vyrovnaný:
    - přidáním fiktivního odběratele,
    - nalezením dodatečného dodavatele nebo přidáním fiktivního dodavatele (s možností neuspokojení požadavku).

Lineární programování

Dopravní problém

- **Příklad**
  - Firma vyrábějící bramborové lupínky zřizuje tři nové pobočky v Benešově, Jihlavě a Táboře.
  - Hlavní surovinou jsou brambory, které se budou dovážet ze skladů v Humpolci a Pelhřimově.

Obr. 6 – Přeprava ze skladů do poboček

Lineární programování

Dopravní problém

- **Příklad**
  - V tabulce 5 jsou uvedeny týdenní kapacity skladů a plánované týdenní požadavky výroben (v tunách). Přeprava brambor se bude uskutečňovat po železnici (jednou týdně). Tabulka 5 obsahuje jednotkové náklady na přepravu jedné tuny brambor od dodavatelů k odběratelům.
  - Cílem je naplánovat přepravu brambor tak, aby celkové přepravní náklady byly minimální. Plán musí splňovat požadavky každé pobočky a nesmí překročit kapacity žádného ze skladů.

Tab. 5 – Dodávky, požadavky a jednotkové náklady na přepravu

	Benešov	Jihlava	Tábor	Kapacita
Humpolec	330	250	350	70
Pelhřimov	300	240	250	80
Požadavek	45	60	35	

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Dopravní problém

- **Přípustné řešení (metoda severozápadního rohu)**
  1. Do severozápadního rohu (levého horního políčka) tabulky dosadíme maximální možné množství.
  2. Upravíme kapacitu a požadavek tak, že vypočtený objem přepravy odečteme od příslušné kapacity a požadavku.
  3. Pokud je požadavek pro první buňku uspokojen, přesuneme se horizontálně na další buňku ve druhém sloupci.
  4. Pokud je kapacita pro první řádek vyčerpána, posuneme se na první buňku druhého řádku.
  5. Pokud je v jakékoli buňce kapacita rovna požadavku, přesuneme se na další možné místo v následujícím řádku nebo sloupci.
  6. Pokračujeme až do vyplnění celé tabulky.

Tab. 6 – Přípustné řešení DP získané metodou severozápadního rohu

	Benešov	Jihlava	Tábor	Kapacita
Humpolec	45	25	-	70
Pelhřimov	-	35	35	80
Požadavek	45	60	35	

- Hodnota účelové funkce

$$z = 38250$$

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Dopravní problém

- **Přípustné řešení (metoda maticového minima)**
  1. Vybíráme vždy políčko s minimálními náklady ze všech dosud neobsazených políček.
  2. V prvním kroku přiřadíme přepravu dvojici s minimálními jednotkovými přepravními náklady. Hodnota přepravy je rovna minimu zbývající kapacity a zbývajícího požadavku pro tuto dvojici.
  3. V dalším kroku snížíme zbývající kapacitu a zbývající požadavek (pro dvojici dodavatele a odběratele) o vypočítanou hodnotu přepravy.
  4. Přípustné řešení je nalezeno, jsou-li uspokojeny všechny požadavky, pokud ne, pokračujeme od prvního kroku.

Tab. 7 – Přípustné řešení DP získané metodou maticového minima

	Benešov	Jihlava	Tábor	Kapacita
Humpolec	45	-	15	70
Pelhřimov	-	60	20	80
Požadavek	45	60	35	

- Hodnota účelové funkce

$$z = 39500$$

INTERNAL

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Dopravní problém

- **Proměnné**

  x_{ij} = objem týdenní přepravy brambor (v tunách) od i – tého dodavatele k j – tému odběrateli $(i = 1,2; j=1,2,3)$.

- **Matematický model**

  Minimalizovat $z = 330x_{11} + 250x_{12} + 350x_{13} + 300x_{21} + 240x_{22} + 250x_{23}$

  za podmínek

  $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 70$ (Humpolec)

  $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80$ (Pelhřimov)

  $x_{11} + x_{21} = 45$ (Benešov)

  $x_{12} + x_{22} = 60$ (Jihlava)

  $x_{13} + x_{23} = 35$ (Tábor)

  $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2; j=1,2,3$

Lineární programování

Dopravní problém

- **Obecný matematický model**

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\,, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$$

Lineární programování

Dopravní problém

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Tab. 8 – Optimální řešení

	Benešov	Jihlava	Tábor	Kapacita
Humpolec	-	60	-	70
Pelhřimov	45	-	35	80
Požadavek	45	60	35	

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 37250$$

  - Přídatné proměnné

$$y_1 = 10$$
$$y_2 = 0$$

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém

- Vychází z dopravního problému.
- K přepravě jsou využívány kontejnery stejné kapacity.
- Přepravní náklady nejsou vztaženy na přepravovanou jednotku, ale na přepravu jednoho kontejneru mezi dodavatelem a odběratelem.
- Cílem je určit objem přepravy mezi dodavatelem a odběratelem a počet kontejnerů použitých k přepravě.

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém

- **Příklad**
  - Předpokládejme, že si v předešlém příkladu bude přepravní společnost účtovat ceny za přepravu (pronájem) jednoho vagónu mezi jednotlivými dodavateli a odběrateli.
  - K přepravě lze použít vagóny o kapacitě 18 tun.
  - Cílem je jednak určit, kolik tun brambor se bude přepravovat mezi jednotlivými místy, ale také stanovit, kolik vagónů bude na tuto přepravu použito, aby i v tomto případě byly celkové přepravní náklady minimální.

Tab. 9 – Zadání kontejnerového dopravního problému

	Benešov	Jihlava	Tábor	Kapacita
Humpolec	4200	4800	5300	70
Pelhřimov	5100	3400	3700	80
Požadavek	45	60	35	

Lineární programování

Kontejnerový dopravní problém

- Matematický model vychází z matematického modelu dopravního problému.
- **Proměnné**

  x_{ij} = objem přepravy (v tunách) od i – tého dodavatele k j – tému odběrateli.

  y_{ij} = počet kontejnerů, které budou použity k přepravě od i – tého dodavatele k j – tému odběrateli.
- **Účelová funkce**

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

- **Omezující podmínky**
  - K podmínkám v dopravním problému je nutné přidat následující omezující podmínky:

$$x_{ij} \le K y_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

$$y_{ij} \ge 0,\ \text{celé}, \quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

Lineární programování

Kontejnerový dopravní problém

- **Optimální řešení**

Tab. 10 – Objem přepravy

	Benešov	Jihlava	Tábor
Humpolec	45	18	-
Pelhřimov	-	42	35

Tab. 11 – Počty vagónů

	Benešov	Jihlava	Tábor
Humpolec	3	1	-
Pelhřimov	-	3	2

Lineární programování

Přiřazovací problém

- **Zadání úlohy**
  - Dvě množiny prvků.
  - Každému prvku z první množiny je přiřazen právě jeden prvek z druhé množiny.
  - Každému prvku z druhé množiny je přiřazen právě jeden prvek z první množiny.
  - Přiřazení každého páru je ohodnoceno.
  - Cílem je maximalizovat/minimalizovat celkové ohodnocení přiřazených prvků.
  - Předpokladem je stejný počet prvků v obou množinách (vyrovnaný problém).

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Přiřazovací problém

- **Příklad**
  - Stavební firma má za úkol vyhloubit základy na čtyřech parcelách v pražských čtvrtích (Michle, Prosek, Radlice, Troja).
  - Výkopové práce budou provedeny bagry, nacházejícími se ve čtyřech různých garážích. Vzdálenosti (v km) mezi garážemi a parcelami jsou uvedeny v tabulce 12.
  - Cílem je minimalizovat celkovou vzdálenost, nutnou pro přepravu bagrů na staveniště. Předpokladem je, že výkopové práce na všech parcelách budou probíhat současně, tj. na každé parcele bude pracovat právě jeden bagr.

Tab. 12 – Vzdálenosti mezi garážemi a stavebními parcelami

	Michle	Prosek	Radlice	Troja
Garáž 1	5	22	12	18
Garáž 2	15	17	6	10
Garáž 3	8	25	5	20
Garáž 4	10	12	19	12

Lineární programování

Přiřazovací problém

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Jestliže bagr z garáže } i \text{ bude pracovat na staveništi } j, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4, \\ j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Lineární programování

Přiřazovací problém

- **Matematický model**

Minimalizovat $z = 5x_{11} + 22x_{12} + ... + 12x_{44}$

za podmínek

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(Garáž 1)}$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad \text{(Garáž 2)}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad \text{(Garáž 3)}$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad \text{(Garáž 4)}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad \text{(Michle)}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \qquad \text{(Prosek)}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \qquad \text{(Radlice)}$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \qquad \text{(Troja)}$$

Lineární programování

Přiřazovací problém

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Tab. 13 – Optimální přiřazení bagrů

	Michle	Prosek	Radlice	Troja
Garáž 1	1	0	0	0
Garáž 2	0	0	0	1
Garáž 3	0	0	1	0
Garáž 4	0	1	0	0

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 32$$

Lineární programování

Přiřazovací problém

- Vyrovnaný problém

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n$$

- Nevyrovnaný problém $(m > n)$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

nebo použitím (m – n) fiktivních prvků

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úloha o pokrytí

- V úloze o pokrytí je definovaná množina prvků (projekty, práce, procesy, aktivity atd.), které musí být pokryty několika možnými alternativami (firmy, zaměstnanci, manažeři atd.).
- Alternativy jsou většinou vybrány podle nákladů.

Lineární programování

Úloha o pokrytí

- **Příklad**
  - Ve dvou z šesti městských obvodů je nutné zřídit stanice rychlé záchranné služby, které pokryjí všechny obvody.
  - V tabulce 14 jsou zadány průměrné dojezdové časy (v min) ze stanice, která bude zřízena v daném obvodě (na předem určeném místě), k případům v jednotlivých obvodech.
  - V posledním řádku tabulky jsou uvedeny průměrné denní četnosti zásahů v jednotlivých obvodech.
  - Cílem je navrhnout, kde zřídit stanice a přiřadit k těmto stanicím obvody, které budou obsluhovat, aby průměrná denní doba zásahů byla minimální.

Tab. 14 – Zadání úlohy o pokrytí

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	4	12	14	17	11	9
O_2	20	7	10	19	24	16
O_3	21	13	5	8	11	15
O_4	9	12	14	3	8	18
O_5	17	25	13	10	6	16
O_6	13	8	9	15	10	5
četnosti	30	50	42	36	24	28

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úloha o pokrytí

- **Proměnné**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže v } i-\text{tém obvodu bude} \\ & \text{zřízena stanice,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže stanice v } i-\text{tém obvodu bude} \\ & \text{obsluhovat } j-\text{tý obvod,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n, \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Lineární programování

Úloha o pokrytí

- **Účelová funkce**

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_j c_{ij} x_{ij} \to \min$$

- **Omezující podmínky**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le (n-K+1)y_i\,, \quad i=1,2,\dots,n$$

Souvislost mezi zřízením stanice v obvodě a obsluhou obvodů touto stanicí.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=1,2,\dots,n$$

Každý odvod bude obsluhován právě jednou stanicí.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = K$$

Zřízení přesně K stanic.

Lineární programování

Úloha o pokrytí

- **Optimální řešení**

Tab. 15 – Optimální řešení úlohy o pokrytí

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	0	0	0	0	0	0
O_2	0	0	0	0	0	0
O_3	0	0	0	0	0	0
O_4	1	0	0	1	1	0
O_5	0	0	0	0	0	0
O_6	0	1	1	0	0	1

První stanice bude zřízena v obvodě O_4 a bude obsluhovat (kromě sebe sama) obvody O_1 a O_5. Druhá stanice bude zřízena v obvodu O_6 a bude obsluhovat (opět kromě sebe sama) obvody O_2 a O_3.

Lineární programování

Úloha obchodního cestujícího

- **Zadání úlohy**
  - Zadána množina míst.
  - Každé místo musí být navštíveno právě jednou.
  - Výsledná trasa tvoří okruh (cyklus) se začátkem a koncem ve výchozím místě (index 1).
  - Cílem je minimalizovat celkovou délku trasy, celkový čas nebo celkové náklady.

Lineární programování

Úloha obchodního cestujícího

- **Příklad**
  - Obchodní zástupce pivovaru ve Velvarech musí navštívit 7 restaurací v 7 obcích.
  - V tabulce 16 jsou uvedeny vzdálenosti (v km) odpovídající přímým spojením obcí (silnicemi). Pomlčka odpovídá situaci, kdy obce nejsou přímo spojeny silnicí.
  - Cílem je navštívit všechny restaurace a ujet přitom minimální vzdálenost.

Tab. 16 – Přímá spojení obcí

Obec	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	-	13	10	-	12	9
Kralupy	8	0	6	16	-	-	-	4
Libcice	-	6	0	-	-	-	-	-
Slany	13	16	-	0	7	-	-	-
Zlonice	10	-	-	7	0	7	13	-
Vrany	-	-	-	-	7	0	15	-
Briza	12	-	-	-	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	-	-	-	-	13	0

Lineární programování

Úloha obchodního cestujícího

- **Příklad**
  - Tabulka 17 obsahuje matici vzdáleností mezi dvojicemi míst.

Tab. 17 – Matice vzdáleností mezi místy

Obec	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slany	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vrany	17	25	31	14	7	0	15	26
Briza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

Lineární programování

Úloha obchodního cestujícího

- **Přípustné řešení (metoda nejbližšího souseda)**
  1. Vybereme jakékoli místo jako výchozí.
  2. Najdeme nejbližší místo (z těch, která nebyla dosud zařazena do okruhu) k poslednímu místu na trase a zařadíme jej do trasy. Pokud takové místo neexistuje, pak uzavřeme trasu zařazením výchozího místa na její konec a pokračujeme krokem 4.
  3. Pokračujeme krokem 2.
  4. Konec.

Tab. 18 – Přípustné řešení TSP získané metodou nejbližšího souseda

Obec	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slany	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vrany	17	25	31	14	7	0	15	26
Briza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

- Hodnota účelové funkce

$$z = 85$$

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo z místa } i \\ & \text{do místa } j, \\ & \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n, \\ j &= 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

u_i = umělá proměnná v omezujících podmínkách zabraňujících vytváření parciálních cyklů.

Lineární programování

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího

- **Matematický model**

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n; j = 2, 3, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Lineární programování

Úloha obchodního cestujícího

- **Optimální řešení**

Tab. 19 – Optimální řešení

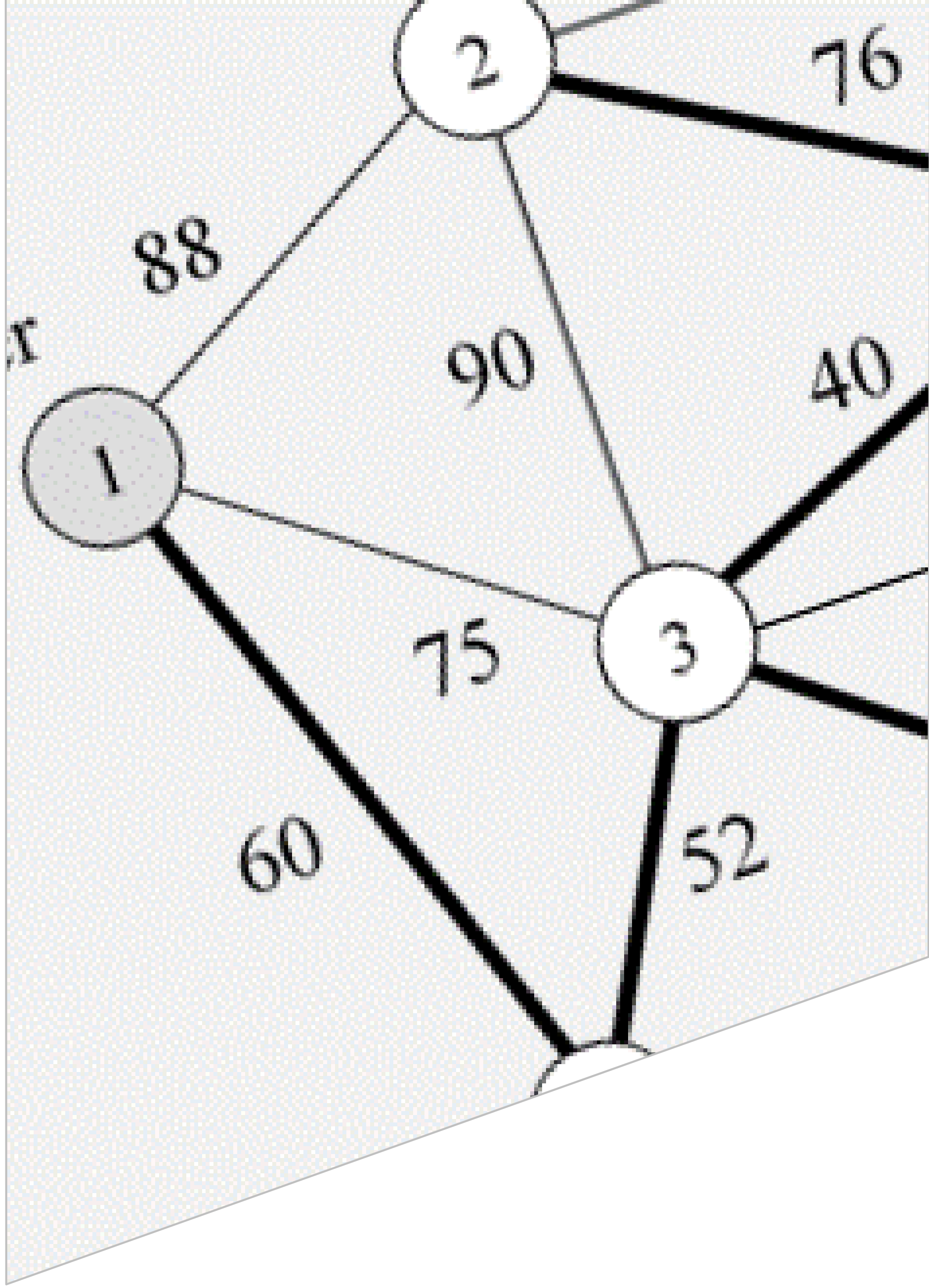
Obec	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slany	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vrany	17	25	31	14	7	0	15	26
Briza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

- Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 79$$

3

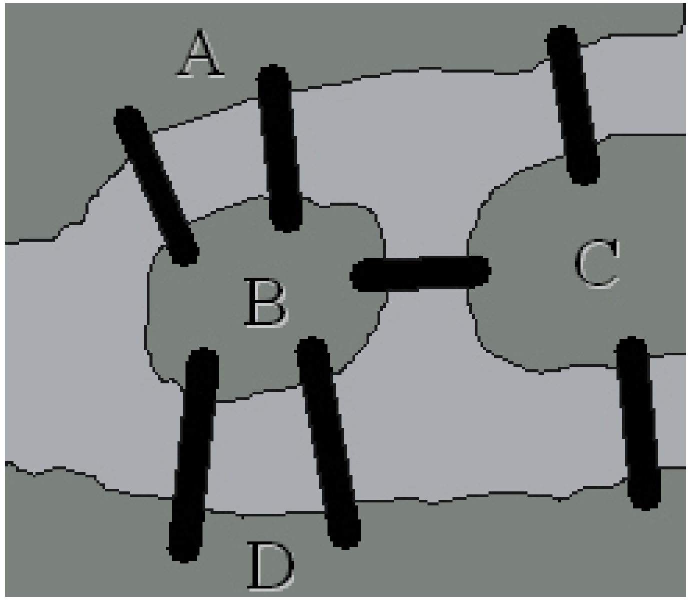
Teorie grafů



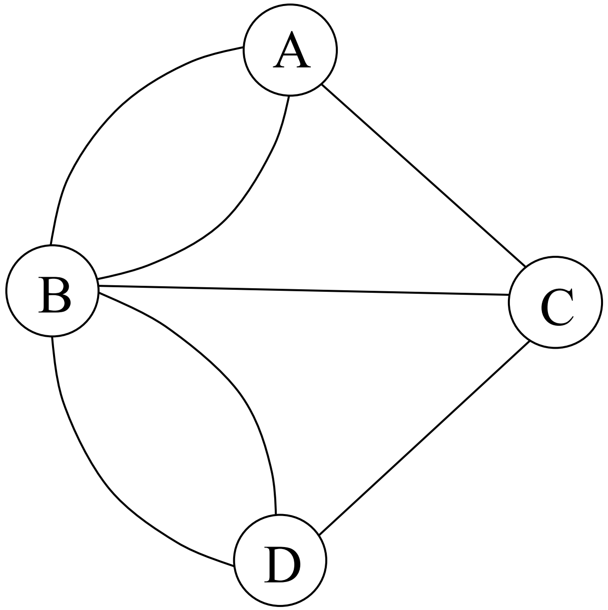
Teorie grafů

Úvod

- **Sedm königsbergských mostů**



Obr. 7 – Reálná situace



Obr. 8 – Model v podobě grafu

Teorie grafů

Úvod

- **Základní pojmy**

Graf je množina $G = \{V, E\}$, kde V je množina uzlů (vrcholů) a E množina hran.
Neorientovaná hrana je množina dvou uzlů $\{i, j\}$.
Orientovaná hrana je uspořádaná dvojice uzlů (i, j).
V neorientovaném grafu jsou všechny hrany neorientované.
V orientovaném grafu (digrafu) jsou všechny hrany orientované.
Smíšený graf obsahuje neorientované i orientované hrany.
Dva uzly spojené hranou se nazývají sousední.
Dvě hrany se společným uzlem se nazývají sousední.
Hrana a vrchol obsažený v této hraně se nazývají incidentní.
Stupeň uzlu (v neorientovaném grafu) je počet hran s ním incidentních.
Vstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v nichž je tento uzel koncovým uzlem.

Teorie grafů

Úvod

- **Základní pojmy**

Výstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v nichž je tento uzel počátečním uzlem.
Sled z uzlu i do uzlu j je posloupnost uzlů a hran, která začíná v uzlu i a končí v uzlu j (uzly a hrany se mohou opakovat).
Tah je sled, v němž se neopakují žádné hrany.
Cesta je tah, v němž se neopakují žádné uzly.
Cyklus je uzavřený sled (začíná a končí ve stejném uzlu).
V orientované cestě (v orientovaném grafu) je respektována orientace všech hran.
V neorientované cestě (v orientovaném grafu) nemusí být orientace hran respektována.
Neorientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje cesta.
Orientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje orientovaná nebo neorientovaná cesta.

Teorie grafů

Úvod

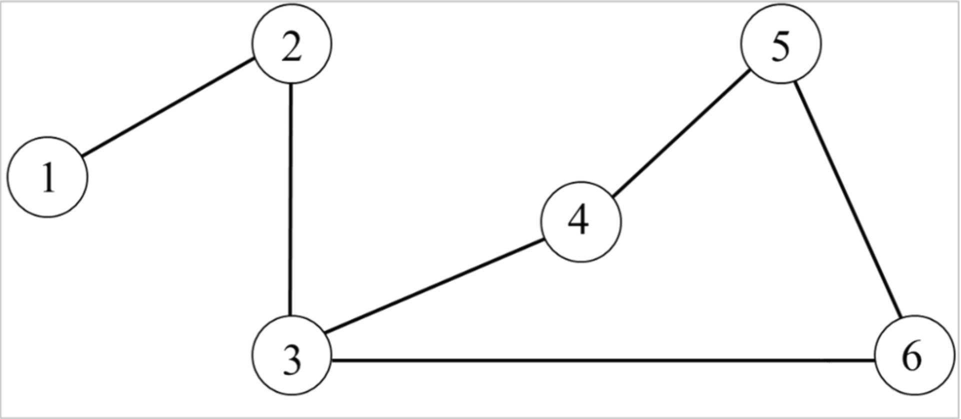
- **Základní pojmy**

Orientovaný graf je silně souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.
Neorientovaný graf je úplný, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje hrana.
Strom je souvislý neorientovaný graf, v němž neexistuje cyklus.
Podgraf grafu $G = \{V, E\}$ je graf $G' = \{V', E'\}$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.
Kostra grafu G je podgraf G', kde $V' = V$, a který je stromem.
Minimální kostra grafu je kostra s minimálním součtem ohodnocení hran.
V ohodnoceném grafu jsou uzlům a/nebo hranám přiřazena čísla.
Hamiltonův cyklus v grafu je cyklus, který obsahuje každý uzel grafu právě jednou.
Síťový graf je souvislý, orientovaný, ohodnocený graf s jedním vstupem a jedním výstupem.

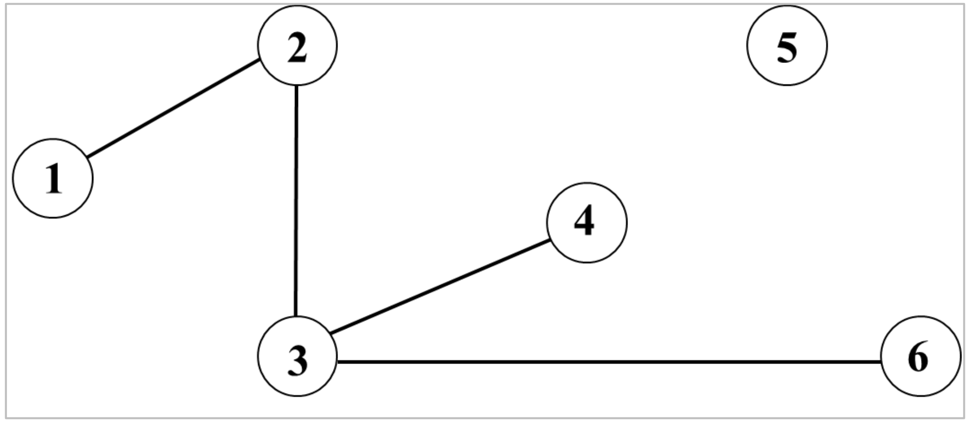
Teorie grafů

Úvod

- **Základní pojmy**
  - Souvislý a nesouvislý graf



Obr. 9 – Souvislý graf

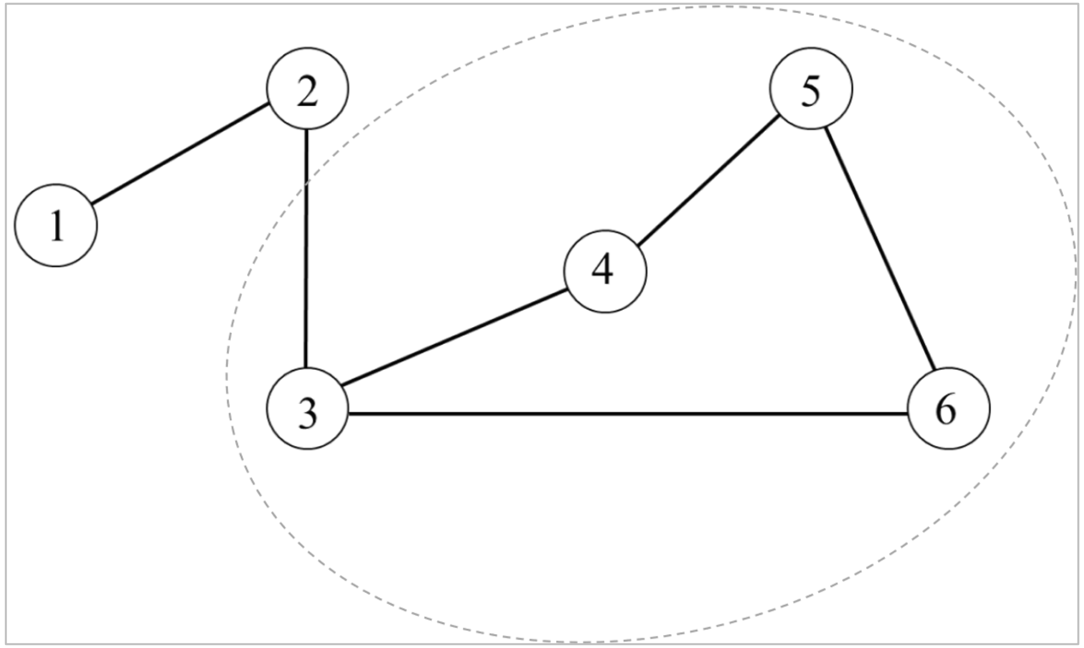


Obr. 10 – Nesouvislý graf

Teorie grafů

Úvod

- **Základní pojmy**
  - Cyklus (okruh)

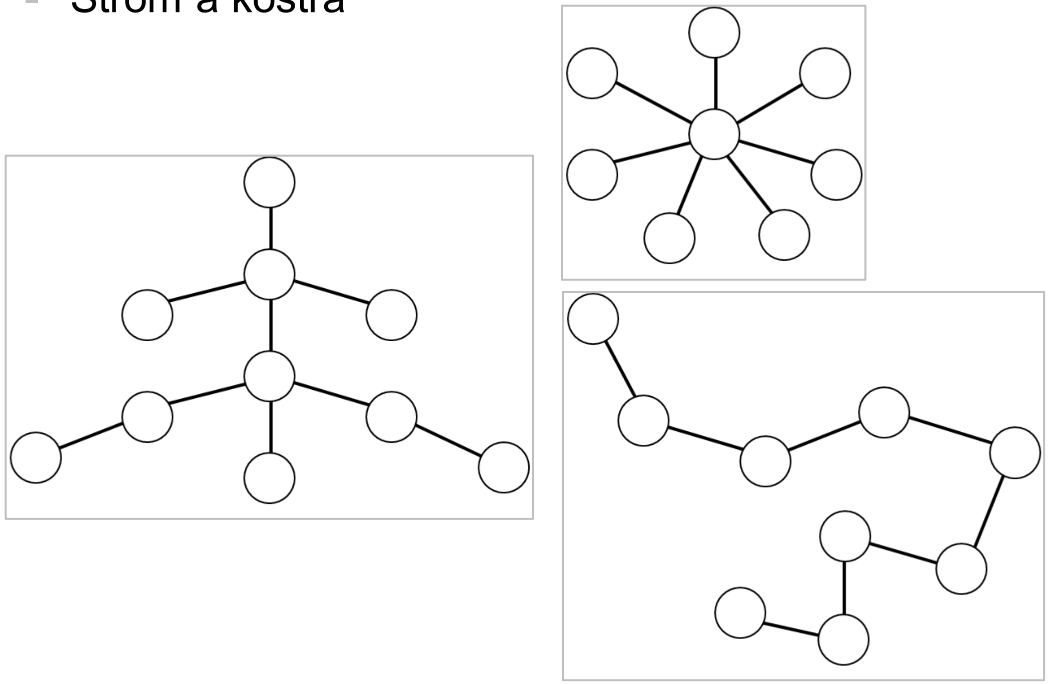


Obr. 11 – Cyklus

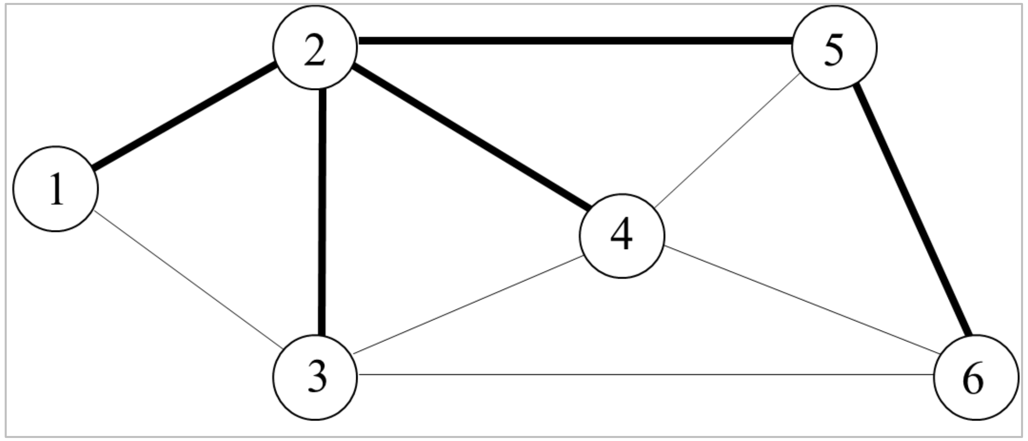
Teorie grafů

Úvod

- **Základní pojmy**
  - Strom a kostra



Obr. 12 – Stromy



Obr. 13 – Kostra grafu

Teorie grafů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

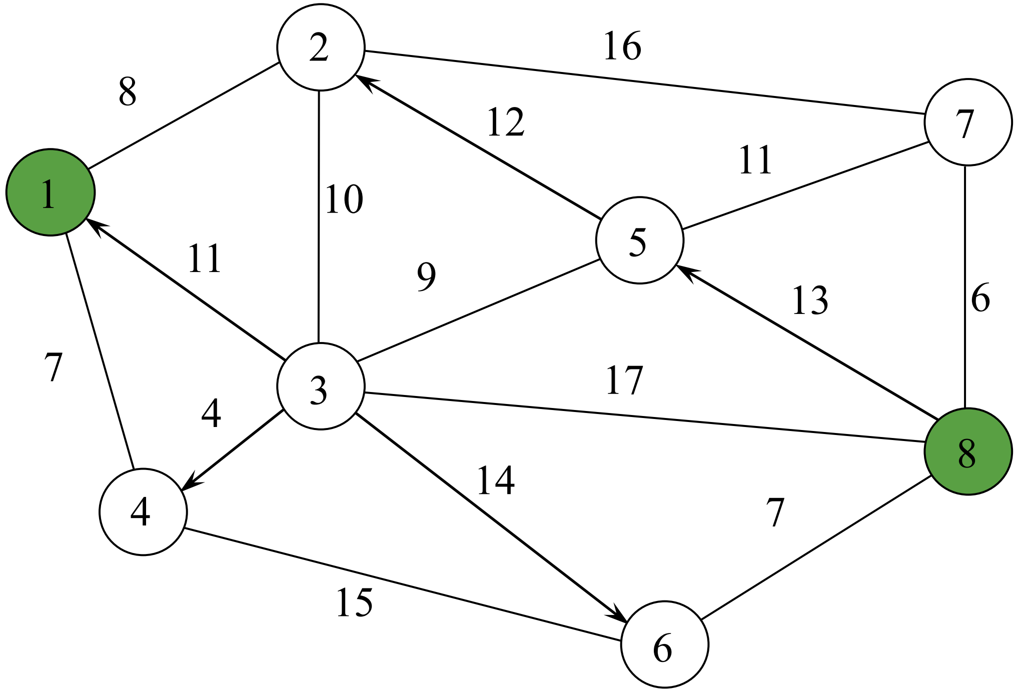
Hledání nejkratší cesty

- Cílem je najít nejkratší cestu mezi dvojicí uzlů.
- Úloha řešená na každodenní bázi při používání navigace v autě či hledání spojení na některém mapovém portálu.
- Existuje mnoho algoritmů, s jejichž pomocí lze snadno najít všechny vzdálenosti mezi všemi dvojicemi uzlů v zadaném grafu.
- Dijkstrův algoritmus je určen pro hledání nejkratších cest z jednoho konkrétního uzlu do všech ostatních uzlů v grafu.

Teorie grafů

Hledání nejkratší cesty

- **Příklad**



Obr. 14 – Distribuční síť pro přepravu nadměrného nákladu

Teorie grafů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

- V prvním kroku algoritmu sestavíme tabulku 20. V prvním řádku je seznam všech uzlů. Druhý řádek je určený pro vypočítané vzdálenosti odpovídající nejkratším cestám z uzlu 1 k ostatním uzlům. Vzdálenost z uzlu 1 do uzlu i označíme t_i. V poslední části tabulky je pro každý uzel i uvedený seznam uzlů j, do kterých z něj vede hrana. V závorce je uvedena délka této hrany, obecně y_{ij}.

Tab. 20 – Vstupní data pro výpočet nejkratší cesty

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0							
$j(y_{ij})$	2(8)	3(10)	2(10)	6(15)	2(12)	4(15)	2(16)	3(17)
	4(7)	7(16)	4(4)		3(9)	8(7)	5(11)	5(13)
			5(9)		7(11)		8(6)	6(7)
			6(14)					7(6)
			8(17)					

- V dalších krocích se budeme zabývat jen sloupci, v nichž je již hodnota t_i vypočtena. Hledáme vždy nejkratší cesty právě z těchto uzlů do uzlů j, jejichž hodnota t_j doposud určena není, a to přes hrany uvedené v seznamu.

Teorie grafů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

- Ve druhém kroku se tedy budeme zabývat pouze prvním sloupcem a uzly 2 a 4.
- Z uzlu 1 vedou dvě přímé cesty, a to do uzlu 2, která má délku (0+8), a do uzlu 4 o délce (0+7). Vybereme minimum z těchto dvou hodnot, tedy 7 a tuto hodnotu zapíšeme k příslušnému uzlu, tedy k uzlu 4. Platí tedy $t_4 = 7$. Orámujeme vybranou hranu a odstraníme všechny hrany, které vedou do uzlu 4.

Tab. 21 – Výpočet nejkratší cesty do uzlu 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0			7				
$j(y_{ij})$	2(8)	3(10)	2(10)	6(15)	2(12)	4(15)	2(16)	3(17)
	$\boxed{4(7)}$	7(16)	4(4)		3(9)	8(7)	5(11)	5(13)
			5(9)		7(11)		8(6)	6(7)
			6(14)					7(6)
			8(17)					

Teorie grafů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

- Ve třetím kroku, jehož základem je tabulka 21, hledáme minimum ze dvou hodnot (0+8) a (7+15). V dalším kroku hledáme min(8+10, 8+16, 7+15) = 8+10 = 18.

Tab. 22 – Výpočet nejkratší cesty do uzlu 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	8		7				
$j(y_{ij})$	2(8)	3(10)	2(10)	6(15)	2(12)	4(15)	2(16)	3(17)
	4(7)	7(16)	4(4)		3(9)	8(7)	5(11)	5(13)
			5(9)		7(11)		8(6)	6(7)
			6(14)					7(6)
			8(17)					

- Pokračujeme do té doby, dokud nejsou známé všechny hodnoty t_i.

Teorie grafů

Hledání nejkratší cesty

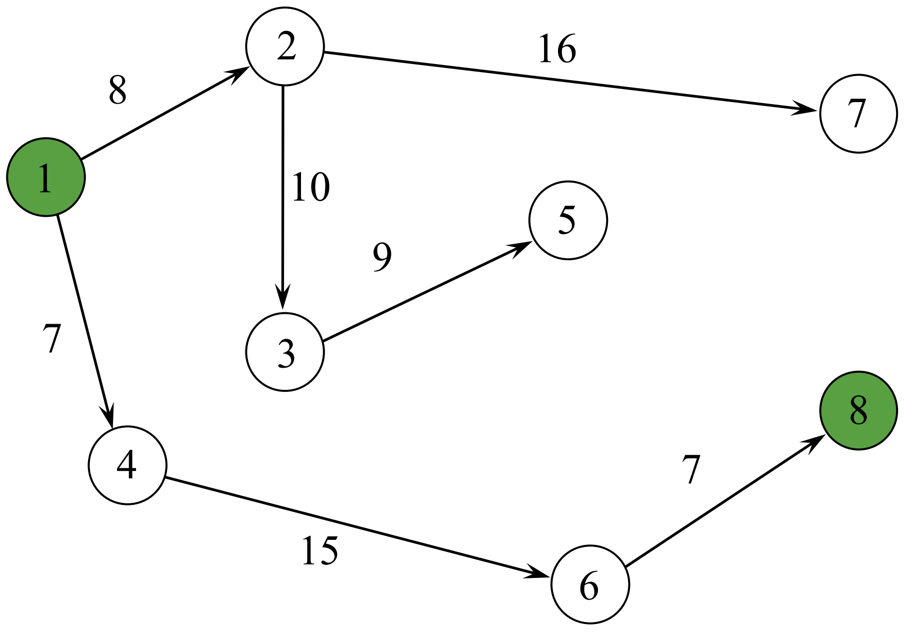
Tab. 23 – Řešení hledání nejkratší cesty

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	8	18	7	27	22	24	29
	$\boxed{2(8)}$	$\boxed{3(10)}$	~~2(10)~~	$\boxed{6(15)}$	~~2(12)~~	~~4(15)~~	~~2(16)~~	~~3(17)~~
	$\boxed{4(7)}$	$\boxed{7(16)}$	~~4(4)~~		~~3(9)~~	$\boxed{8(7)}$	~~5(11)~~	5(13)
$j(y_{ij})$			$\boxed{5(9)}$		~~7(11)~~		~~8(6)~~	~~6(7)~~
			~~6(14)~~					~~7(6)~~
			~~8(17)~~					

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Teorie grafů

Hledání nejkratší cesty



Obr. 15 – Nejkratší cesty z uzlu 1 do všech ostatních uzlů

Teorie grafů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

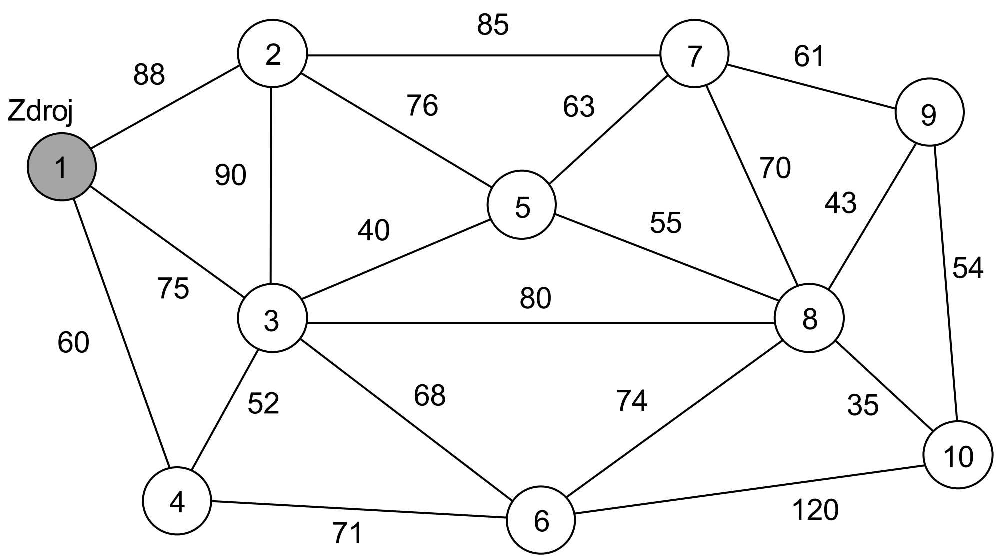
Optimální spojení míst

- **Zadání úlohy**
  - Graf s n uzly a množinou ohodnocených hran.
  - Cílem je nalézt kostru grafu s celkovou minimální hodnotou přiřazenou ke zvoleným hranám.
- **Optimalizační metoda**
  1. Setřídíme hrany vzestupně podle jejich ohodnocení.
  2. Vybereme dvě hrany s minimálním ohodnocením a zařadíme je do množiny K.
  3. Ze seznamu hran vybereme další hranu. Pokud hrana tvoří cyklus s některými hranami z množiny K, musíme ji vyloučit ze seznamu hran.
  4. Opakujeme krok 3, dokud množina K nebude obsahovat $n-1$ hran.
  5. Minimální kostra grafu je určena množinou K.

Teorie grafů

Optimální spojení míst

- **Příklad**
  - Manažer zajišťující výstavu softwarových produktů musí zabezpečit dodávku elektrické energie ze zdroje do 9 míst.
  - Cílem je stanovit minimální celkové náklady na pořízení kabelu a určit, kudy spojovací kabely povedou.
  - Vzdálenosti (v metrech) mezi místy jsou vyjádřeny v grafu na obr. 16.
  - Místo 1 je zdrojem elektrické energie.
  - Cena kabelu za metr je 10 Kč.



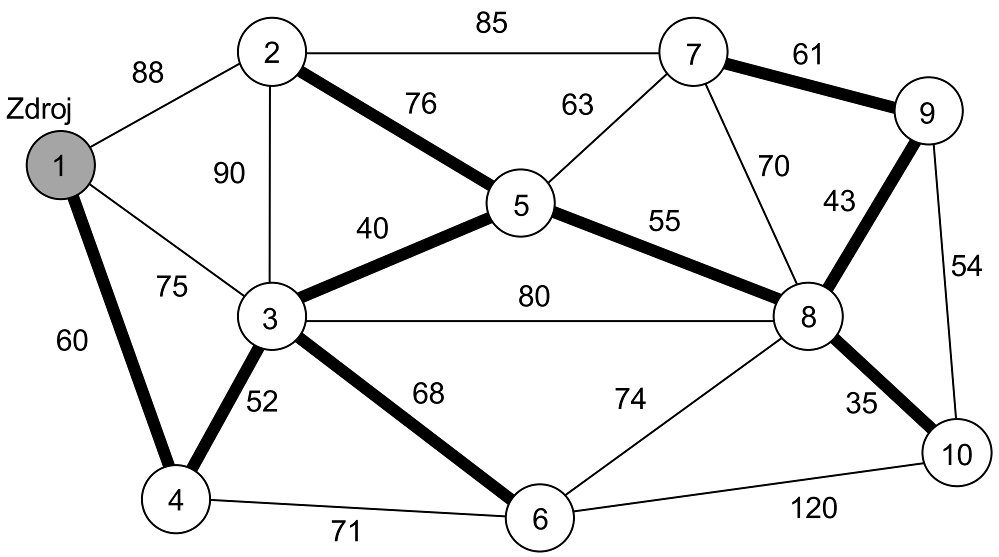
Obr. 16 – Výstaviště

INTERNAL

Teorie grafů

Optimální spojení míst

- **Optimální řešení**



Obr. 17 – Rozmístění kabelů

- Minimální hodnota kostry

$$z_0 = 490$$

Teorie grafů

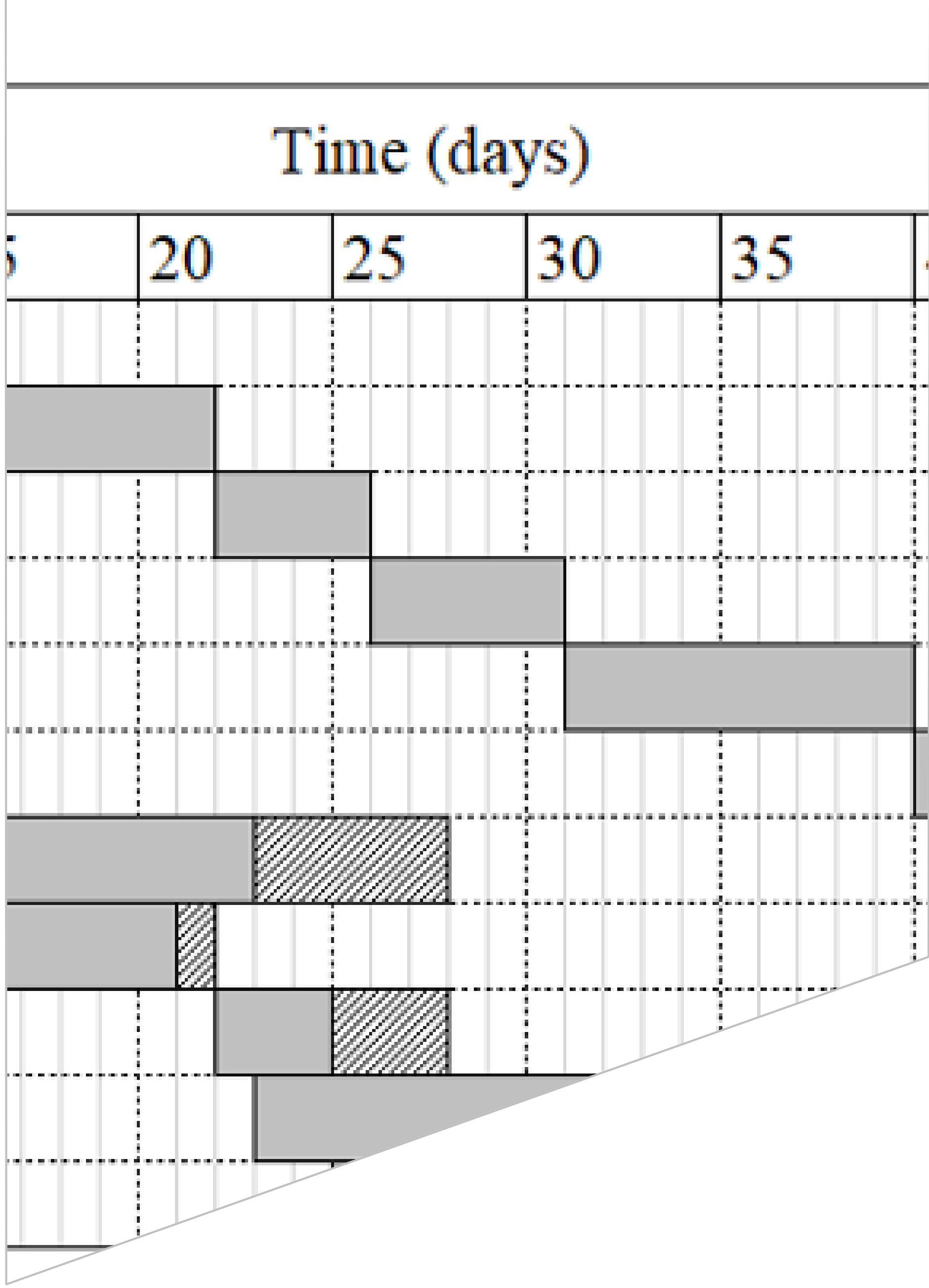
ŠKODA AUTO Vysoká škola

Další optimalizační úlohy

- **Spojení**
  - Optimální spojení míst.
  - Minimální Steinerův strom.
- **Cesty a trasy**
  - Hledání nejkratší cesty.
  - Úloha obchodního cestujícího.
  - Rozvozní úloha.
  - Problém vyzvednutí a doručení.
  - Úloha čínského listonoše.
- **Toky**
  - Hledání maximálního toku.
  - Hledání toku s minimálními náklady.
  - Transshipment problém.

4

Řízení projektů



Řízení projektů

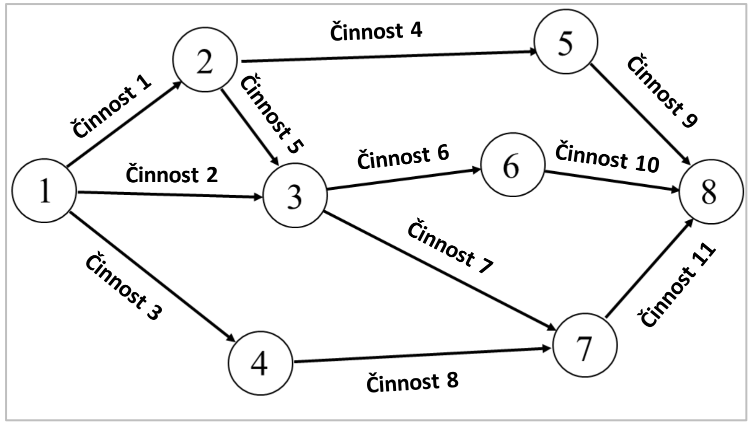
Úvod

- **Projekt**
  - Soubor navazujících činností (aktivit).
  - Činnosti:
    - doba trvání,
    - náklady na realizaci činnosti,
    - požadavky na zdroje
    - seznam bezprostředně předchozích činností.
- **Doba trvání**
  - deterministická (předem známá konstanta) – Critical Path Method (CPM), Metra Potential Method (MPM)
  - stochastická (hodnota náhodné veličiny) – Program Evaluation and Review Technique (PERT)

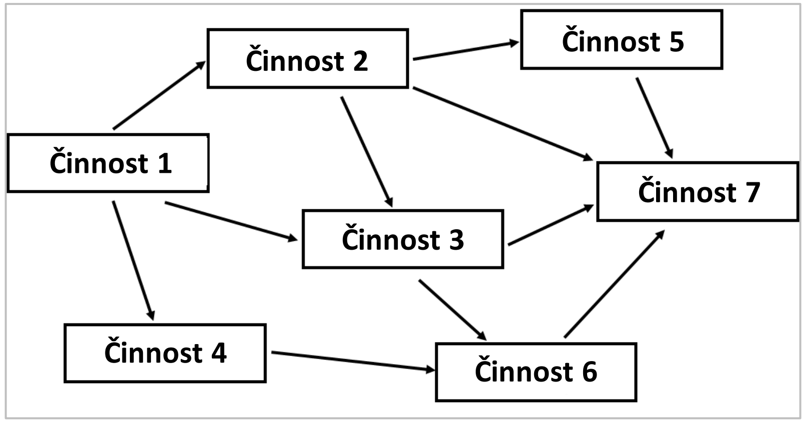
Řízení projektů

Úvod

- **Síťový graf**
  - Grafické znázornění projektu.
  - Činnosti jsou znázorněny
    - hranami (CPM),
    - uzly (MPM).



Obr. 18 – Činnosti znázorněné hranami



Obr. 19 – Činnosti znázorněné uzly

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Fáze projektu**
  - Plánování
    - definování všech činností, doby trvání a bezprostředně předchozích činností,
    - konstrukce síťového grafu znázorňujícího projekt.
  - Analýza
    - čas dokončení projektu,
    - začátek a konec každé činnosti,
    - kritická cesta obsahující úzká místa,
    - nekritické činnosti a jejich možné zpoždění,
    - Ganttův diagram.
  - Realizace a kontrola
    - porovnání skutečnosti s navrhovaným plánem,
    - provedení změn v plánu.

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Příklad**
  - Projektový manažer direktmarketingové firmy připravuje pro zákazníky vydání kolekce českých vánočních koled.
  - Kampaň má být naplánována tak, aby všichni vybraní zákazníci obdrželi nabídku do předem určeného termínu.
  - Projekt, týkající se hudební kampaně, je tvořen následujícími 11 činnostmi (viz Tabulka 24).

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Příklad**

Tab. 24 – Aktivity direktmarketingového projektu

Činnost	Popis činnosti	Doba trvání	Bezprostředně předchozí činnosti
A	Výběr skladeb	15	-
B	Mastering	8	A
C	Zpracování promotion materiálů	6	A
D	Analýza zákazníků	7	A
E	Výroba promotion materiálů	4	C, D
F	Doprava promotion materiálů	5	E
G	Výběr zákazníků	3	D
H	Výroba produktů	12	B, D
I	Zpracování dat o zákaznících	3	G
J	Kompletace	9	F, I
K	Obeslání	8	H, J

Řízení projektů

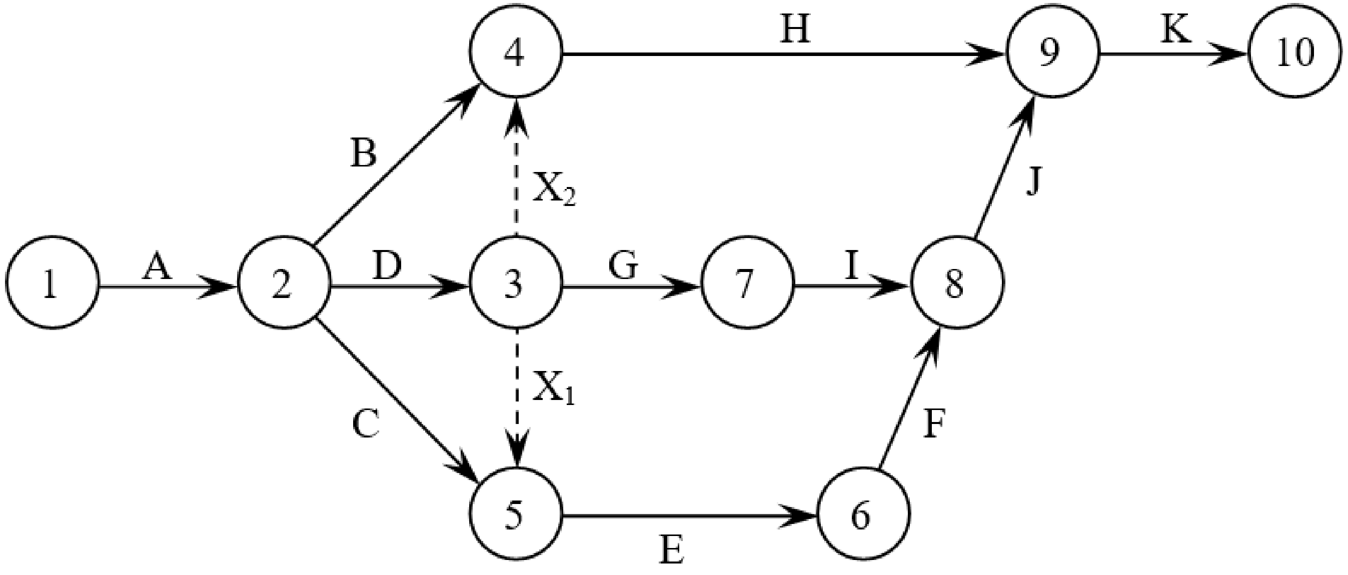
Metoda kritické cesty CPM

- **Konstrukce síťového grafu**
  - Jeden vstupní uzel na a jeden výstupní uzel.
  - Každá činnost musí být znázorněna právě jednou hranou.
  - Dva uzly jsou spojeny maximálně jednou hranou.
  - Uzel, znázorňující dokončenou činnost má vyšší číslo než uzel znázorňující začátek této činnosti – pravidlo zamezuje mj. tvoření okruhů v síťovém grafu.
  - Fiktivní činnosti (hrany) zajišťují správné návaznosti mezi reálnými činnostmi. Jejich doba trvání je nulová.

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Sestrojení síťového grafu**



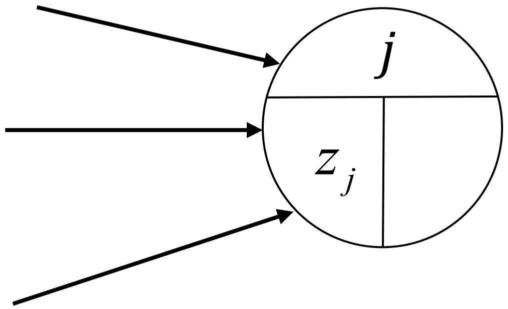
Obr. 20 – Síťový graf projektu

- X_1, X_2 – fiktivní hrany

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Výpočet termínů nejdříve možných začátků činností**
  - Pro každý uzel jsou v jeho levé dolní části vypočítány termíny nejdříve možných začátků činností, které v tomto uzlu začínají.
  - Výpočet probíhá vzestupně dle čísel jednotlivých uzlů od začátku do konce projektu.



$$z_j = \max_i (z_i + t_{ij}) \qquad j = 2, 3, \dots, n$$

Obr. 21 – Termín nejdříve možného začátku činností

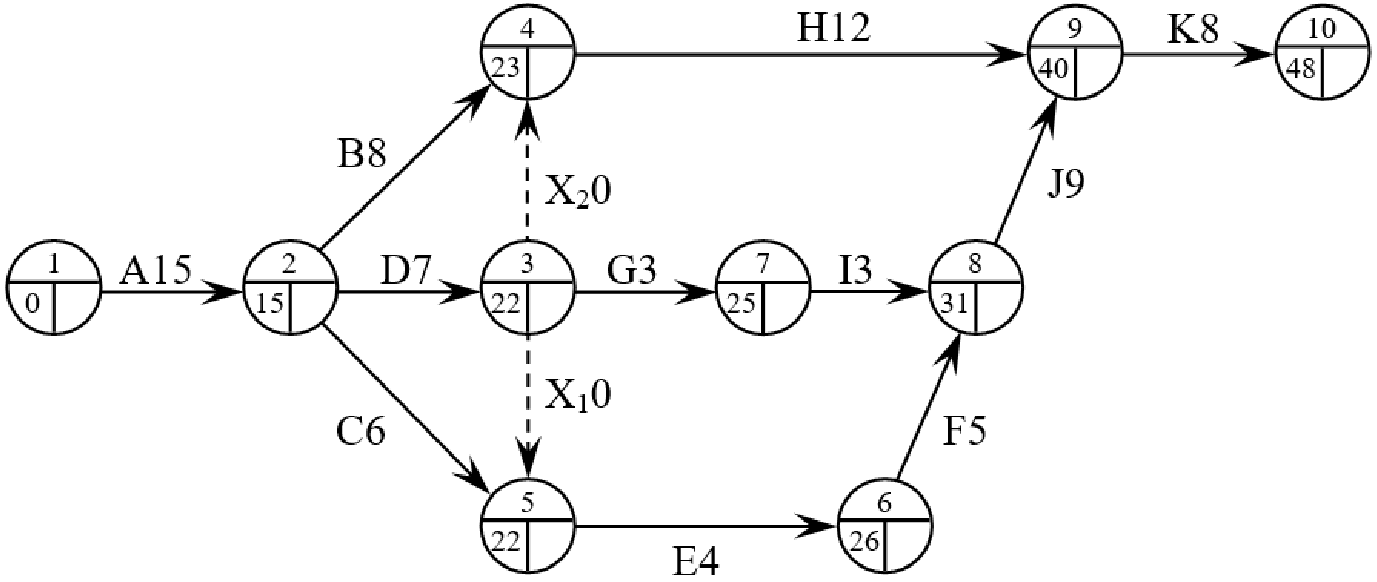
- Termín nejdříve možného dokončení projektu je termín nejdříve možného dokončení poslední činnosti:

$$T = z_n$$

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Výpočet termínů nejdříve možných začátků činností**



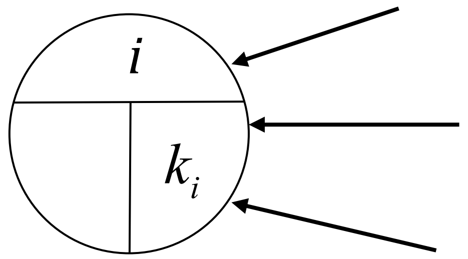
$T = 48$

Obr. 22 – Výpočet termínů nejdříve možných začátků činností

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Výpočet termínů nejpozději přípustných konců činností**
  - Termín nejpozději přípustného dokončení činnosti je nejpozději přípustný okamžik, kdy lze činnost dokončit bez zpoždění termínu dokončení projektu.
  - Tento termín často vychází z požadavku zákazníka, který pevně stanovil dobu, během níž musí být projekt dokončen.
  - Oproti předchozímu výpočtu termínů nejdříve možných začátků činností probíhající ve vzestupném pořadí, výpočet termínů nejpozději přípustných konců činností probíhá v sestupném pořadí.



Obr. 23 – Termín nejpozději přípustných konců činností

- Termín nejpozději přípustného dokončení projektu může být nastaven v plánování procesu nebo může být zvažován jako termín nejdříve možného dokončení projektu:

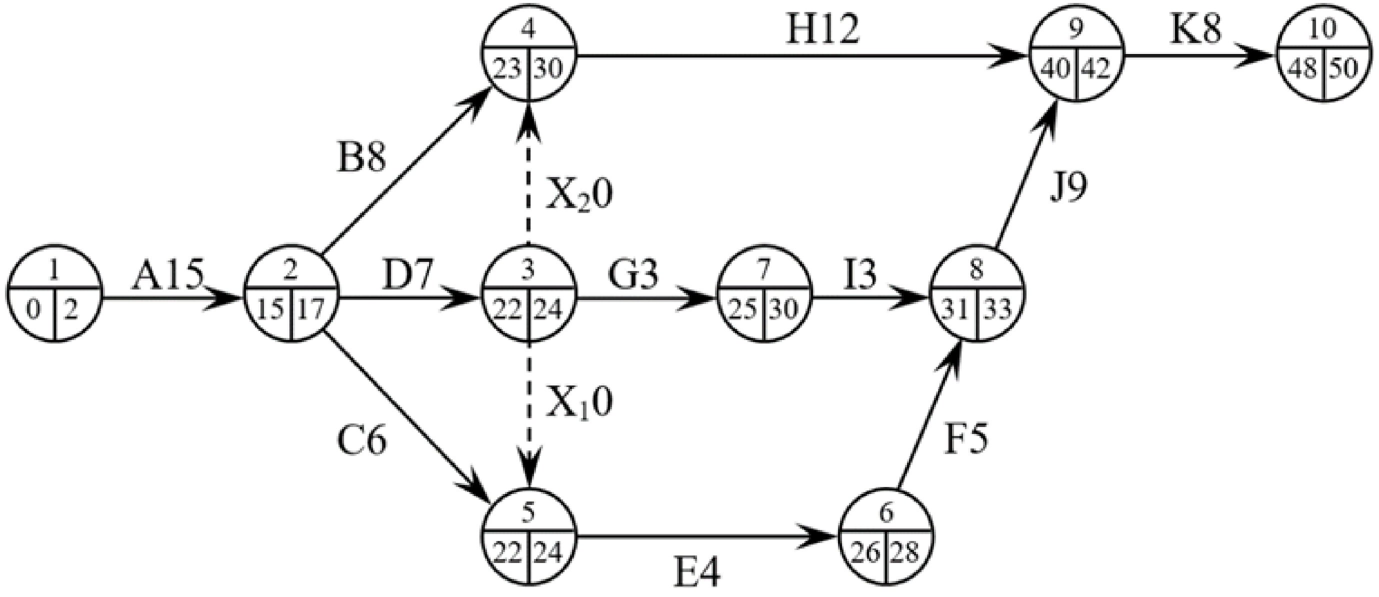
$$k_n = T_{PL} \geq T$$

$$k_i = \min_j (k_j - t_{ij}) \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Výpočet termínů nejpozději přípustných konců činností**



Obr. 24 – Výpočet termínů nejpozději přípustných konců činností

- Deadline T_{PL} = 48

Řízení projektů

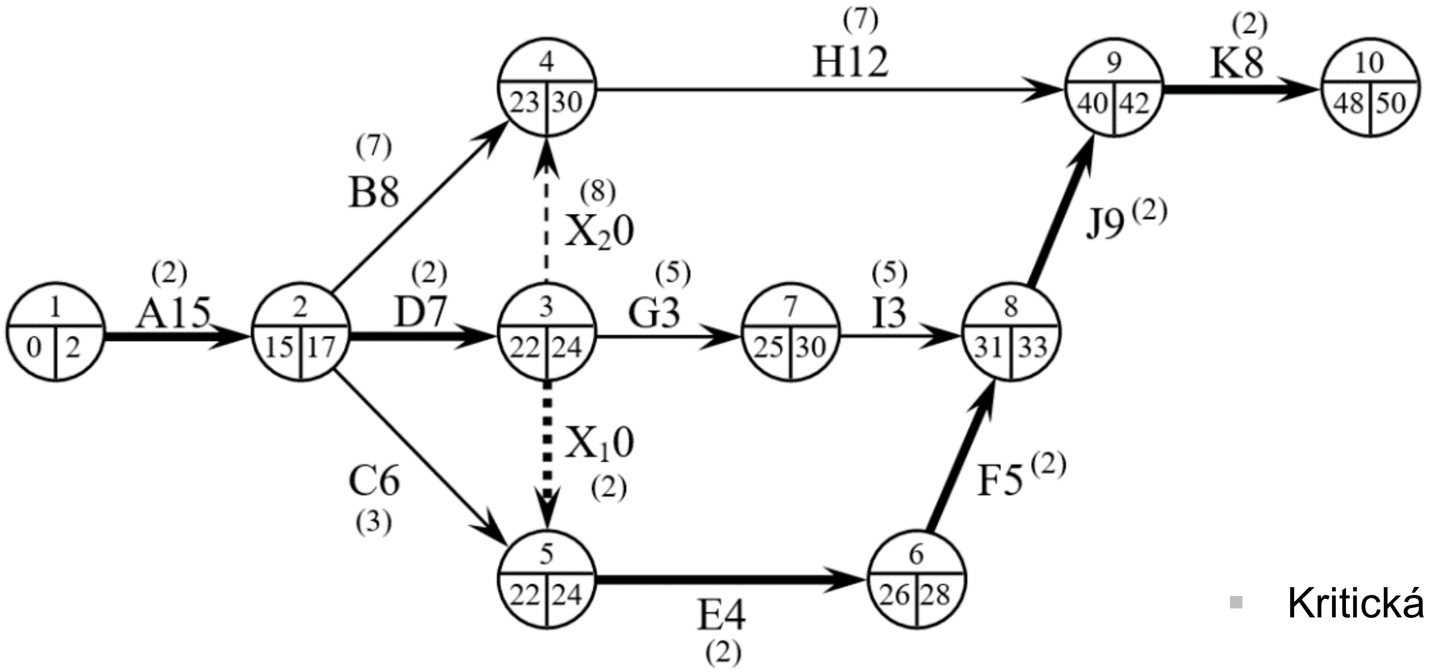
Metoda kritické cesty CPM

- **Určení kritické cesty**
  - Určení celkové časové rezervy pro všechny činnosti: $CR_{ij} = (k_j - z_i - t_{ij})$
  - Kritické činnosti: $CR_{ij} = T_{PL} - T$
  - Nekritické činnosti: $CR_{ij} > T_{PL} - T$
  - Mohou nastat tři základní možnosti povoleného zpoždění činnosti (za předpokladu splnění deadlinu T_{PL}) :
    1. Začátek činnosti může být posunut.
    2. Doba trvání činnosti může být prodloužena.
    3. Kombinace možností 1 a 2.

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Určení kritické cesty**



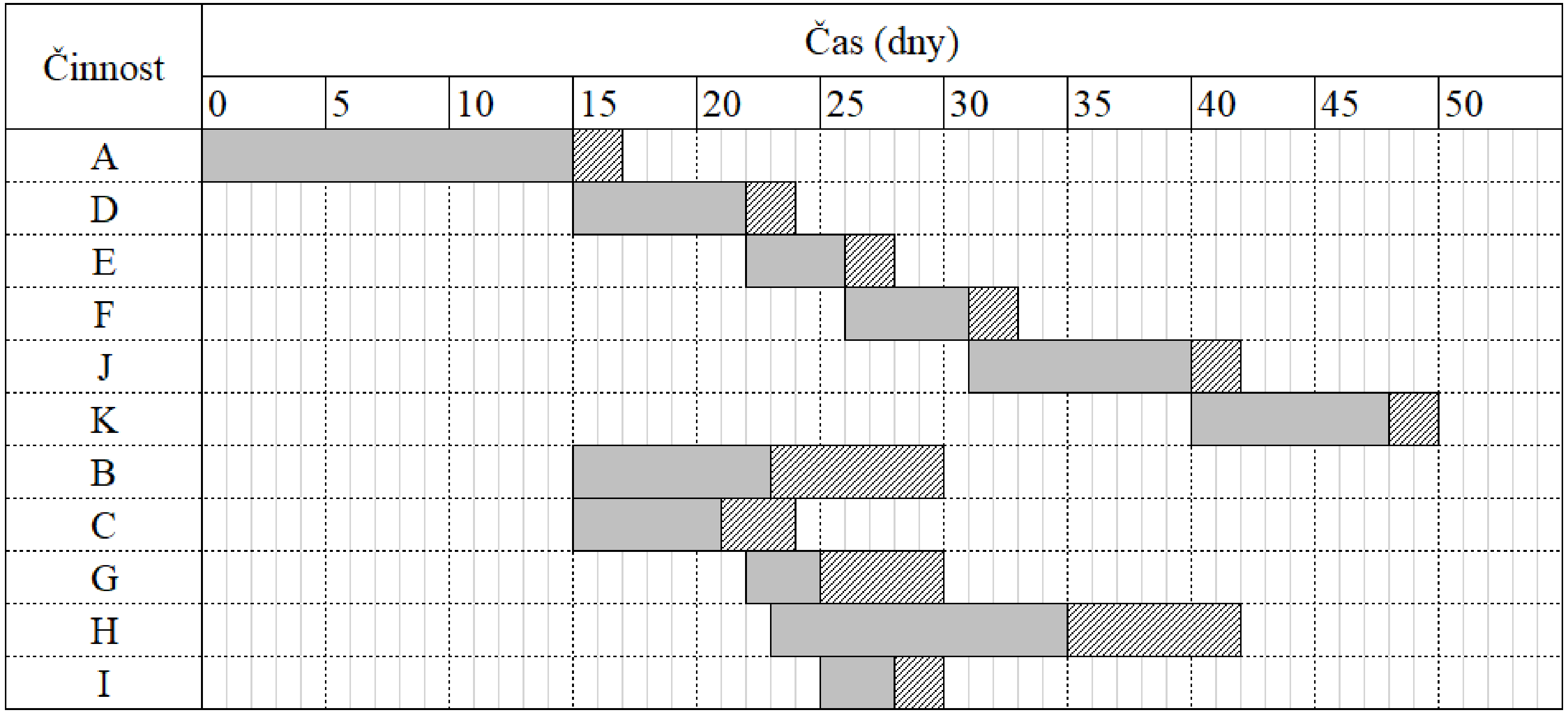
Obr. 25 – Kritická cesta

- Kritická cesta = A – D – (X_1) – E – F – J – K

Řízení projektů

Metoda kritické cesty CPM

- **Ganttův diagram**



Obr. 26 – Ganttův diagram

Řízení projektů

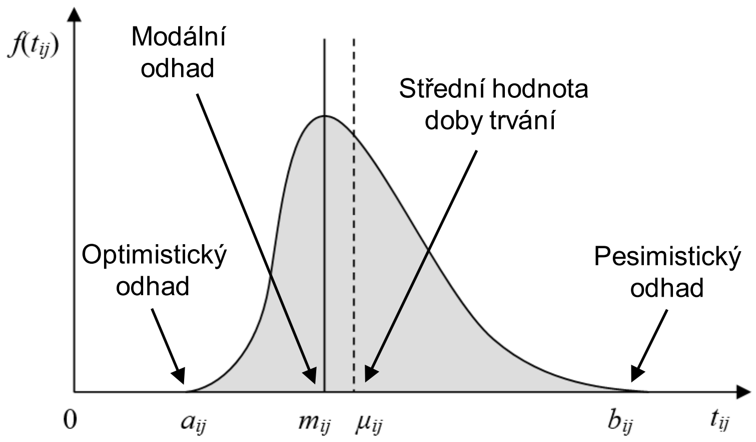
Metoda PERT

- **Předpoklady**
  - Doba trvání každé činnosti je hodnotou náhodné veličiny.
  - β-rozdělení:
    - a_{ij} - optimistický odhad jako nejkratší možná doba trvání činnosti,
    - b_{ij} - pesimistický odhad jako nejdelší doba trvání,
    - m_{ij} - modální odhad jako nejpravděpodobnější doba trvání činnosti, která předpokládá nejčastější (obvyklé) podmínky pro realizaci.
- **Střední hodnota doby trvání činnosti**

$$\mu_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

- **Směrodatná odchylka doby trvání činnosti**

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}$$



Obr. 27 – Hustota pravděpodobnosti β-rozdělení

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad**
  - V projektu jsou zadány tři definované odhady doby trvání činností namísto jediné pevně dané hodnoty.

Tab. 25 – Direktmarketingový projekt – vstupní data pro metodu PERT

Činnost	Popis činnosti	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	Bezprostředně předchozí činnosti
A	Výběr skladeb	11	15	19	-
B	Mastering	7	8	9	A
C	Zpracování promotion materiálů	5	6	7	A
D	Analýza zákazníků	5	7	9	A
E	Výroba promotion materiálů	2	3	10	C, D
F	Doprava promotion materiálů	3	4	11	E
G	Výběr zákazníků	2	3	4	D
H	Výroba produktů	8	11	20	B, D
I	Zpracování dat o zákaznících	2	3	4	G
J	Kompletace	6	8	16	F, I
K	Obeslání	6	8	10	H, J

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Popis metody**
  - Sestavení síťového grafu.
  - Výpočet středních hodnot a směrodatných odchylek doby trvání všech činností.
  - Aplikace metody CPM, určení kritické cesty (KC).
  - **Střední hodnota doby trvání projektu**

$$M = \sum_{(i,j)\in \mathrm{KC}} \mu_{ij}$$

  - **Rozptyl doby trvání projektu**

$$\sigma^2 = \sum_{(i,j)\in \mathrm{KC}} \sigma_{ij}^2$$

  - **Směrodatná odchylka doby trvání projektu**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Popis metody**
  - Pravděpodobnostní analýza:
    - **Jaká je pravděpodobnost, že projekt bude dokončen do předem stanoveného termínu T_S?**
      - Transformace se standardním normálním rozdělením $N(0,1)$:

$$z_p = \frac{T_S - M}{\sigma_{KC}}$$

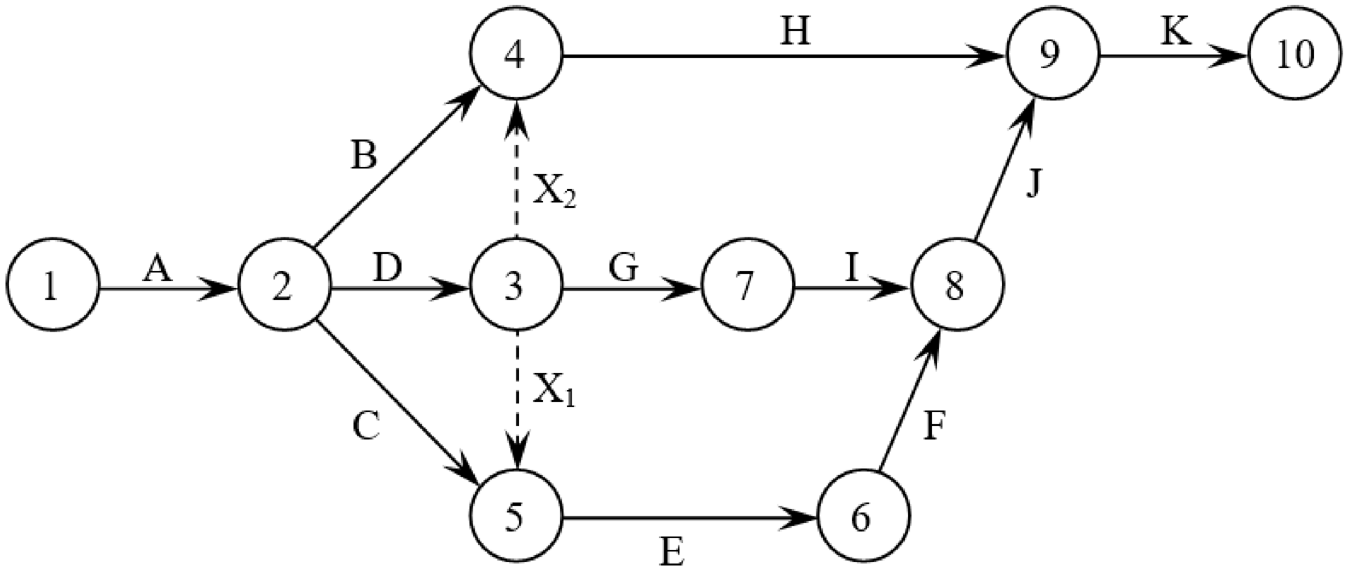
    - **V jakém termínu bude projekt dokončen s požadovanou pravděpodobností p?**

$$T_S = M + z_p \sigma_{KC}$$

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Sestrojení síťového grafu**



Obr. 28 – Síťový graf projektu

- X_1, X_2 – fiktivní hrany

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad**
  - Výpočet středních hodnot doby trvání činností.

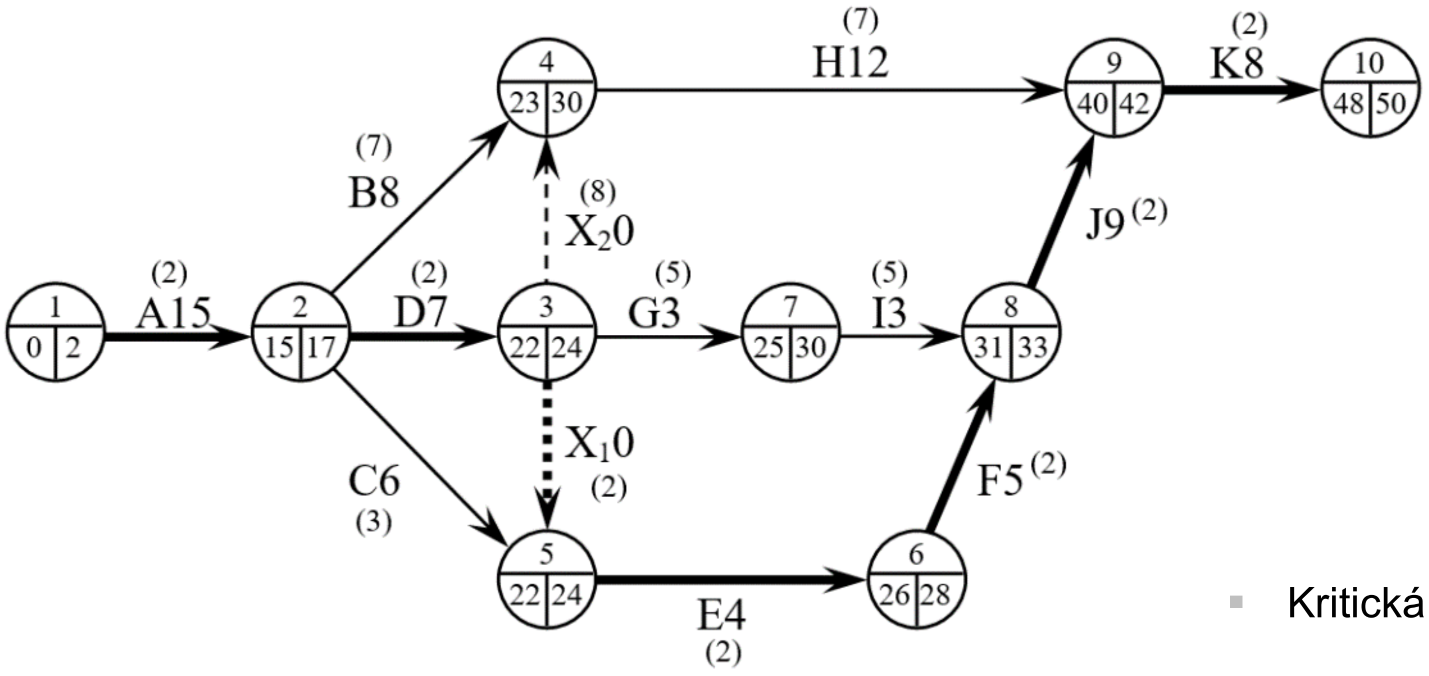
Tab. 26 – Direktmarketingový projekt – střední hodnoty doby trvání činností

Činnost	Popis činnosti	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	μ_{ij}
A	Výběr skladeb	11	15	19	15
B	Mastering	7	8	9	8
C	Zpracování promotion materiálů	5	6	7	6
D	Analýza zákazníků	5	7	9	7
E	Výroba promotion materiálů	2	3	10	4
F	Doprava promotion materiálů	3	4	11	5
G	Výběr zákazníků	2	3	4	3
H	Výroba produktů	8	11	20	12
I	Zpracování dat o zákaznících	2	3	4	3
J	Kompletace	6	8	16	9
K	Obeslání	6	8	10	8

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad**
  - Určení kritické cesty



- Kritická cesta: $A - D - (X_1) - E - F - J - K$

Obr. 29 – Příklad – určení kritické cesty

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad**
  - Výpočet směrodatné odchylky doby trvání činností.

Tab. 27 – Střední hodnoty a směrodatné odchylky doby trvání kritických činností

Činnost	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	μ_{ij}	σ_{ij}
A	11	15	19	15	8/6
D	5	7	9	7	4/6
E	2	3	10	4	8/6
F	3	4	11	5	8/6
J	6	8	16	9	10/6
K	6	8	10	8	4/6

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad**
  - Střední hodnota doby trvání projektu

    $$M = 15 + 7 + 4 + 5 + 9 + 8 = 48$$

  - Rozptyl doby trvání projektu

    $$\sigma^2_{\mathrm{KC}} = (8/6)^2 + (4/6)^2 + (8/6)^2 + (8/6)^2 + (10/6)^2 + (4/6)^2 = 9,$$

  - Směrodatná odchylka doby trvání projektu

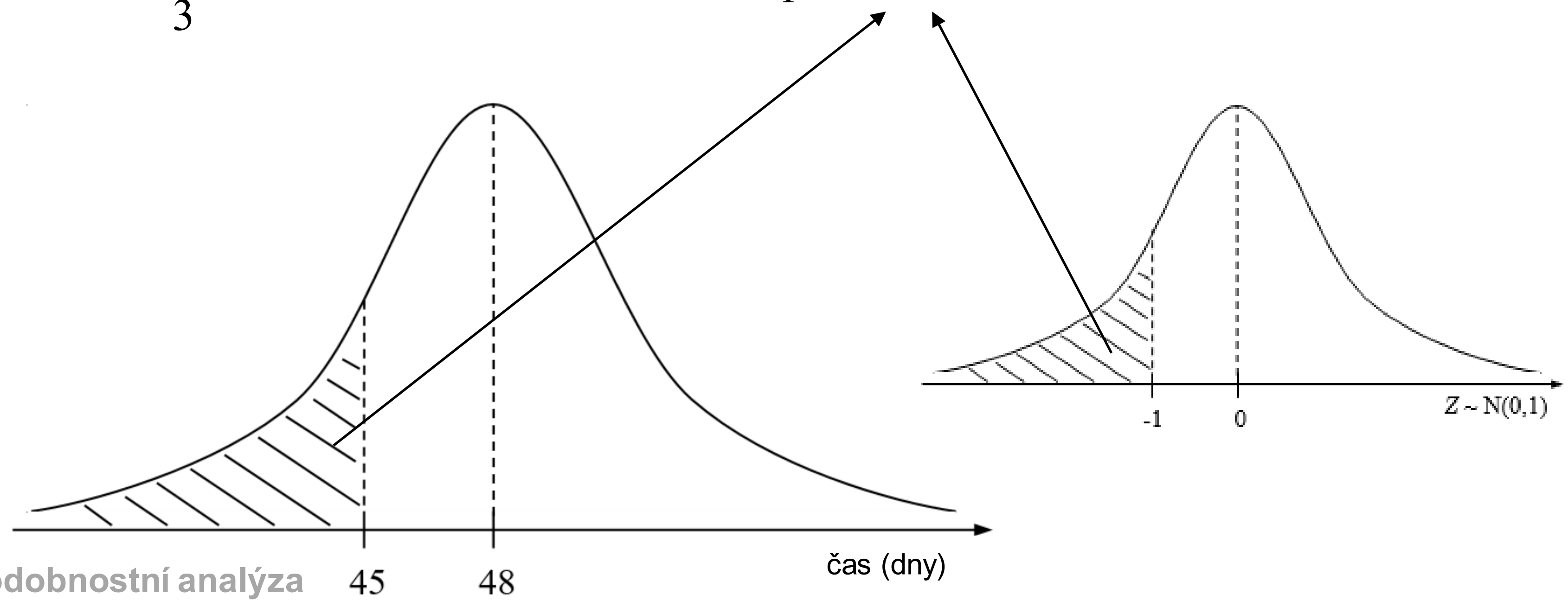
    $$\sigma_{\mathrm{KC}} = 3$$

Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad – pravděpodobnostní analýza**
  - Jaká je pravděpodobnost, že projekt bude dokončen do předem stanoveného termínu T_S = 45 dní?

$$z = \frac{45-48}{3} = -1 \xrightarrow{\text{Tabulky N(0,1)}} p = 0{,}1587$$



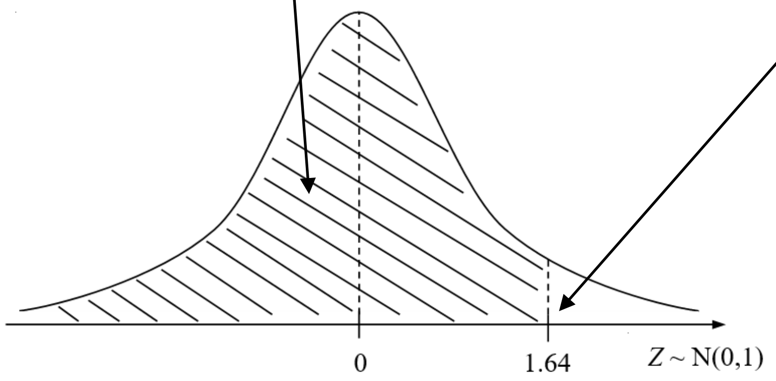
Obr. 30 – Pravděpodobnostní analýza

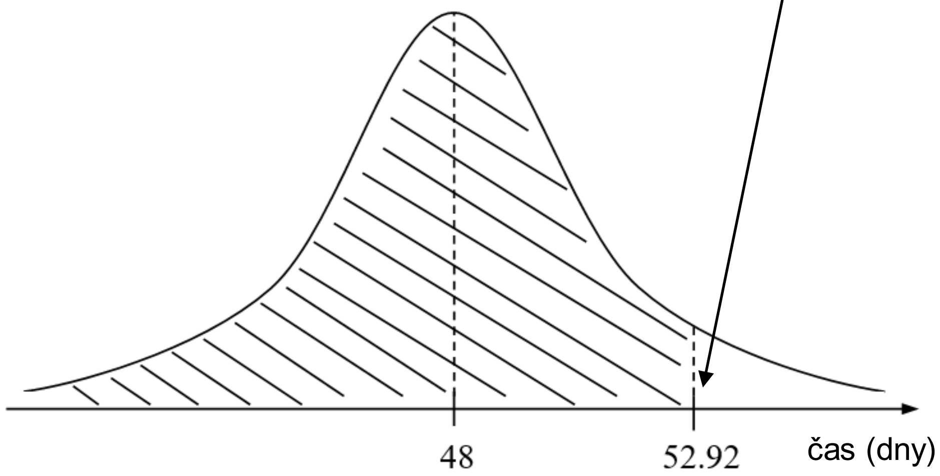
Řízení projektů

Metoda PERT

- **Příklad – pravděpodobnostní analýza**
  - V jakém termínu bude projekt dokončen s 95% pravděpodobností?

$$p = 0,95 \xrightarrow{\text{Tabulky N(0,1)}} z_{0.95} = 1,64 \longrightarrow T_S = 48 + 1,64(3) = 52,92$$

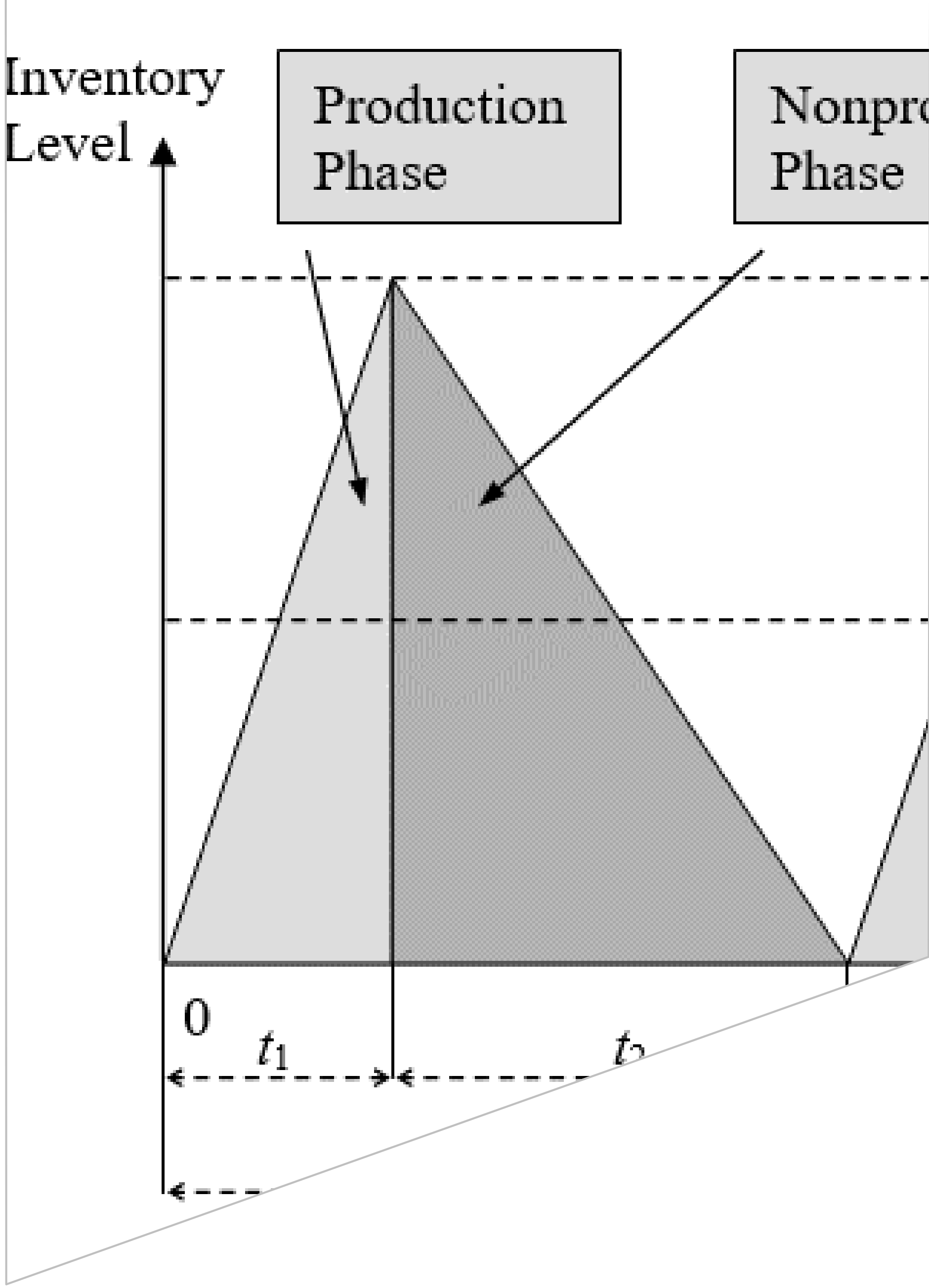




Obr. 31 – Pravděpodobnostní analýza

5

Modely řízení zásob



INTERNAL

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod

- **Zásoby**
  - Skladovány pro budoucí použití (rychle a flexibilně dostupné, minimalizace nákladů).
  - Příklady zásob:
    - suroviny,
    - materiál,
    - polotovary,
    - náhradní díly.
- **Řízení zásobování**
  - Kolik objednávat?
  - Kdy objednávat?
  - Cíl – minimalizace celkových nákladů.

Modely řízení zásob

Úvod

- **Dílčí náklady**
  - Skladovací náklady
    - pronájem skladovacích prostor,
    - manipulace,
    - pojištění zásob,
    - úrok (investice),
    - stárnutí & znehodnocení.
  - Pořizovací náklady
    - přepravní náklady,
    - celní poplatky,
    - náklady na přejímku a kontrolu zboží,
    - pojištění.

Modely řízení zásob

Úvod

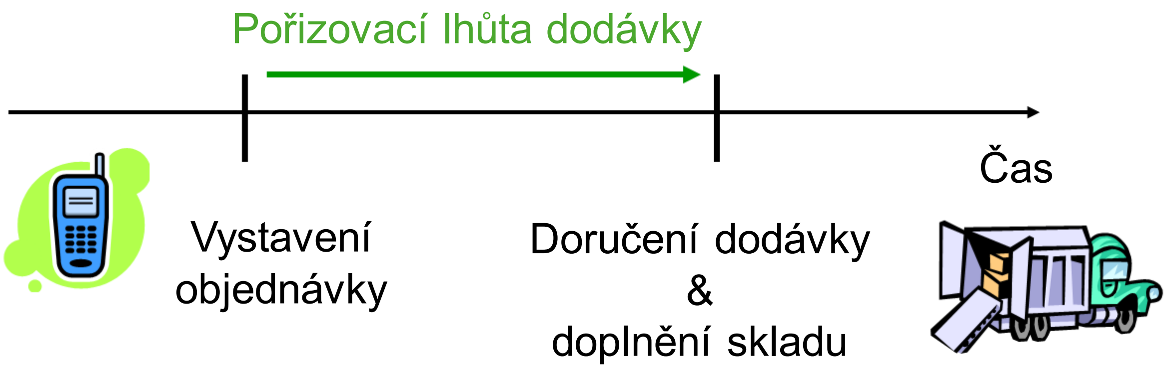
- **Stav zásoby**
  - Dostupné množství zásoby (množství skladované položky, množství skladovaného materiálu atd.) v určitém časovém okamžiku.
- **Poptávka**
  - Velikost poptávky – množství položek nebo materiálu požadovaných za určité období.
- **Čerpání zásob**
  - Intenzita spotřeby – množství skladovaných položek nebo materiálu přesunutého ze skladu. Odvození z velikosti poptávky.
  - Snižování stavu zásoby.
- **Doplňování zásob**
  - Přesun doručených položek nebo materiálu do skladu.
  - Zvyšování stavu zásoby.

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod

- **Objednávání**
  - Pořizovací lhůta dodávky – časový interval mezi okamžikem vystavení objednávky a okamžikem doručení dodávky.
  - Bod znovuobjednávky – stav zásob, při kterém je zapotřebí vystavit novou objednávku.



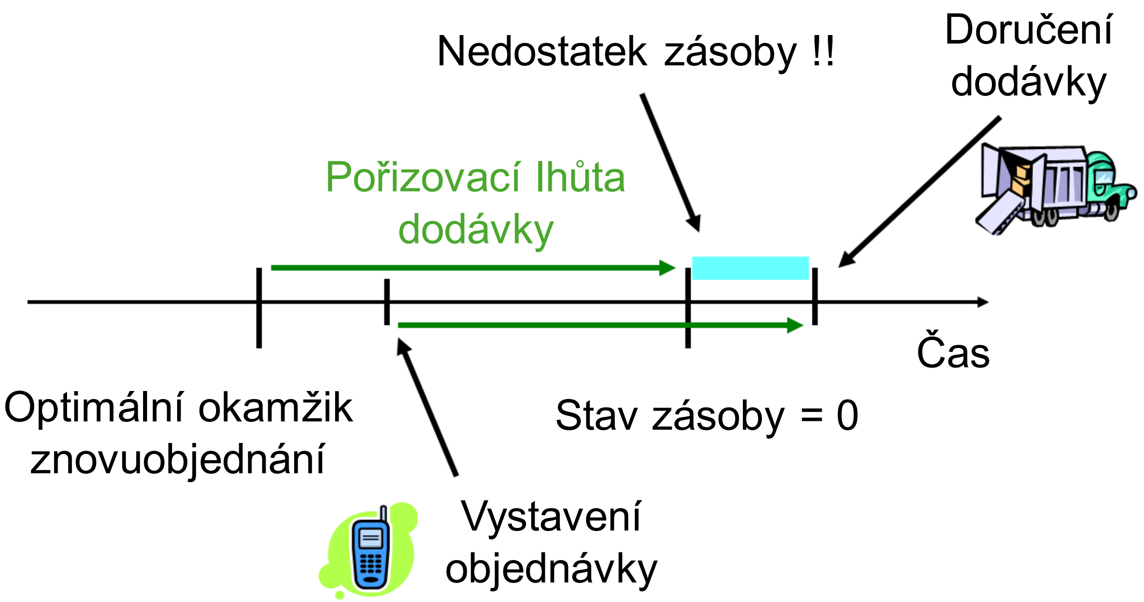
Obr. 32 – Proces znovuobjednání

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod

- **Nedostatek zásoby**
  - Prázdný sklad vede ke vzniku neuspokojené poptávky (jestliže nevzniká během intervalu, v němž je sklad prázdný, žádný požadavek, pak tento stav není považován za nedostatek zásoby).



Obr. 33 – Nedostatek zásoby

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

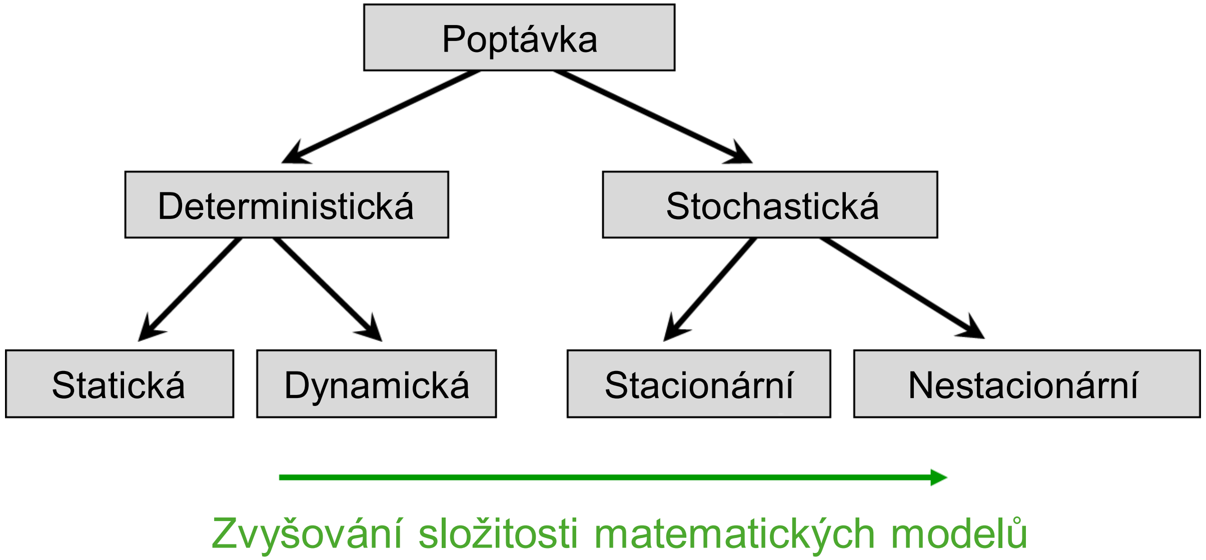
Úvod

- **Pojistná zásoba**
  - V případě stochastické poptávky.
  - Pojistná zásoba je vytvářena za účelem zabránit vzniku nedostatku zásoby. Obecně není možné zcela vyloučit vznik nedostatku zásoby (záleží na typu pravděpodobnostního rozdělení velikosti poptávky).
- **Deterministické modely**
  - Všechny parametry jsou předem známé (především velikost poptávky a pořizovací lhůta dodávky).
- **Stochastické modely**
  - Některé parametry jsou hodnotami náhodné veličiny.

Modely řízení zásob

Úvod

- **Klasifikace poptávky**



Obr. 34 – Klasifikace poptávky

- **Statická poptávka**
  - Velikost poptávky se v čase nemění.
- **Dynamická poptávka**
  - Velikost poptávky je předem známá, ale mění se v čase.
- **Stacionární poptávka**
  - Pravděpodobnostní rozdělení se v čase nemění.
- **Nestacionární poptávka**
  - Pravděpodobnostní rozdělení se v čase mění.

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Řízení zásob**
  - Kolik objednávat?
  - Kdy objednávat?
  - Jaké jsou celkové náklady?
  - Jaký je maximální stav zásoby?
  - Jaká je optimální délka zásobovacího cyklu?

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

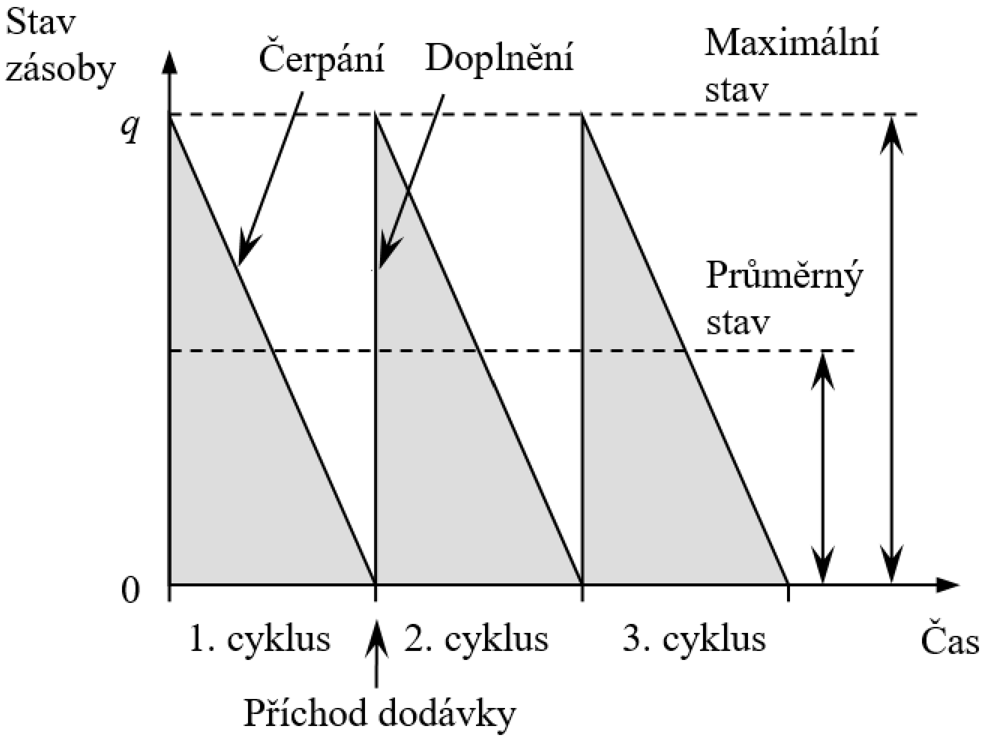
Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Předpoklady**
  - položka jediného typu,
  - poptávka je předem známá a v čase konstantní (statická)
  - pořizovací lhůta dodávky je známá a konstantní,
  - čerpání zásob ze skladu je rovnoměrné,
  - velikost objednávek je konstantní,
  - nákupní cena je nezávislá na velikosti objednávky (žádné množstevní slevy),
  - doplnění skladu probíhá v určitém časovém okamžiku, a to přesně v okamžiku jeho vyčerpání.

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Zásobovací cykly**



Obr. 35 – EOQ model – zásobovací cykly

INTERNAL

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Příklad**
  - Soukromý pivovar vyrábí měsíčně 4 000 hl piva.
  - 25 % produkce se prodává v podobě lahvového piva. Prázdné půllitrové láhve jsou uloženy v pivních přepravkách po 20 lahvích. Průměrné roční skladovací náklady jsou vyčísleny na 20 Kč za jednu přepravku.
  - Dodavatel lahví si účtuje 11 000 Kč za jednu dodávku, pivovar navíc musí zaúčtovat dalších 1 000 Kč za každou objednávku jako vlastní fixní náklady.
  - Pořizovací lhůta dodávky je 1/2 měsíce. Protože plnění lahví je rovnoměrný proces, čerpání lahví ze skladu je také rovnoměrné.
  - Provoz pivovaru je třísměnný (nepřetržitý), nesmí dojít k přerušení zásobovacího procesu.
  - Management pivovaru se rozhodl analyzovat zásobovací proces tak, aby minimalizoval celkové náklady, spojené se skladováním a objednáváním prázdných lahví.

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Vstupní parametry a proměnné**
  - Roční poptávka $Q = 120\ 000$ přepravek
  - Jednotkové skladovací náklady (roční) $c_1 = 20$ Kč/přepravka
  - Pořizovací náklady $c_2 = 12\ 000$ Kč/objednávka
  - Pořizovací lhůta dodávky $d = 1/2$ měsíce $= 1/24$ roku
  - Velikost objednávky q
  - Počet objednávek za rok n
  - Délka dodávkového cyklu t
  - Bod znovuobjednávky r

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Celkové roční náklady**

$$N = N_S + N_P$$

$$q_{\max} = q$$

$$q_{avg} = \frac{q}{2}$$

$$N_S = c_1 q_{avg} = c_1 \frac{q}{2}$$

$$n = \frac{Q}{q}$$

$$N_P = c_2 n = c_2 \frac{Q}{q}$$

$$\boxed{N(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q}}$$

N – celkové roční náklady
N_S – celkové roční skladovací náklady
N_P – celkové roční skladovací náklady
q_{max} – maximální stav zásoby
q_{avg} – průměrný stav zásoby

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

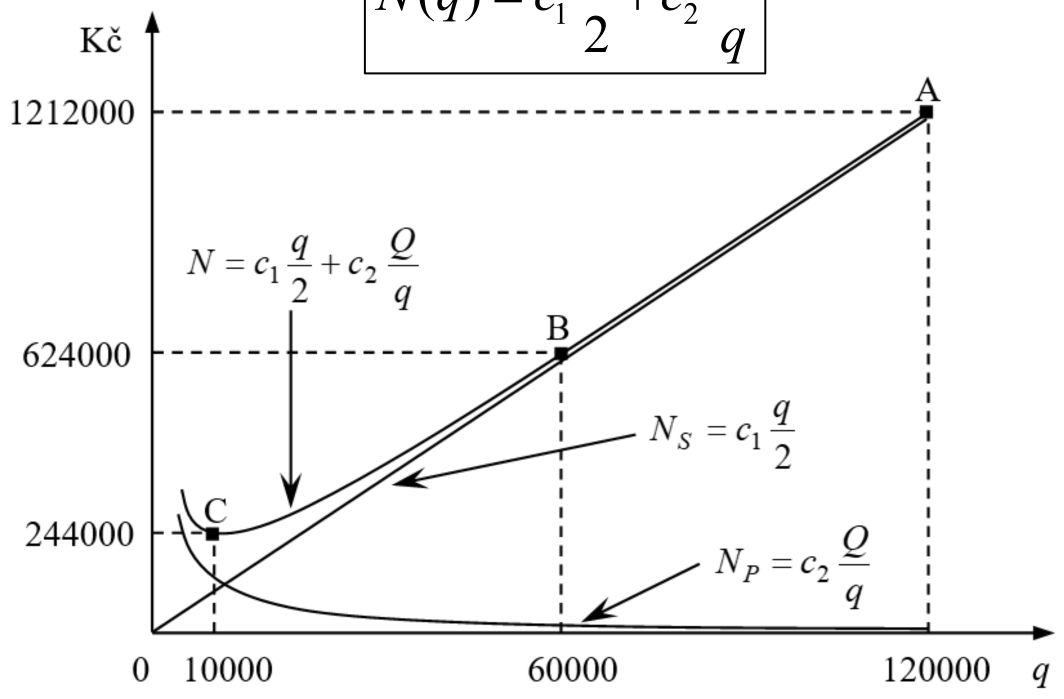
Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Celkové roční náklady**

Tab. 28 – Tři různé strategie řízení objednávek

	A	B	C
Poptávka Q	120000	120000	120000
Velikost objednávky q	120000	60000	10000
Jednotkové skladovací náklady c_1	20	20	20
Průměrný stav zásoby $q_{avg} = q/2$	60000	30000	5000
Celkové skladovací náklady N_S	**1200000**	**600000**	**100000**
Pořizovací náklady c_2	12000	12000	12000
Intenzita objednávek $n = Q/q$	1	2	12
Celkové pořizovací náklady N_P	**12000**	**24000**	**144000**
Celkové náklady N	**1212000**	**624000**	**244000**

$$\boxed{N(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q}}$$

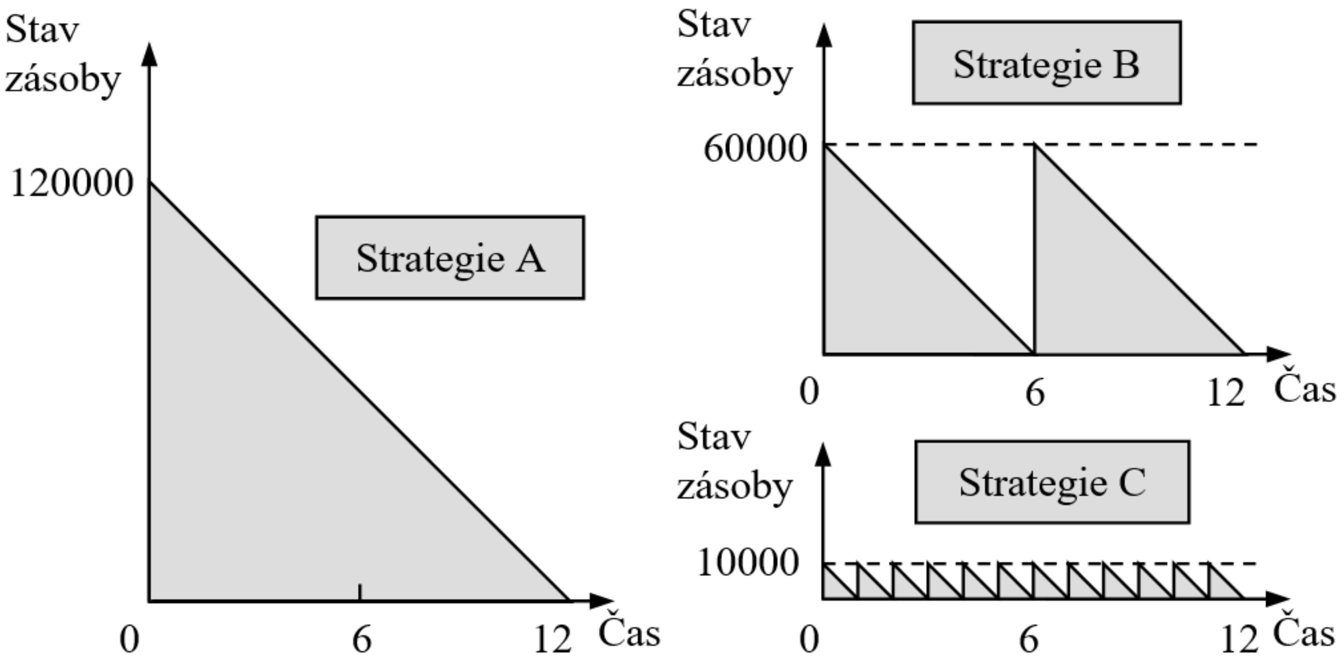


Obr. 36 – EOQ model – nákladové funkce

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Zásobovací cykly**



Obr. 37 – Zásobovací cykly při různých strategiích

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Optimální velikost objednávky**

$$N(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q} \quad \rightarrow \min$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{c_1}{2} - c_2 \frac{Q}{q^2} = 0$$

$$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}}} \qquad q^* = \sqrt{\frac{2\,(120000)\,(12000)}{20}} = 12000 \text{ přepravek}$$

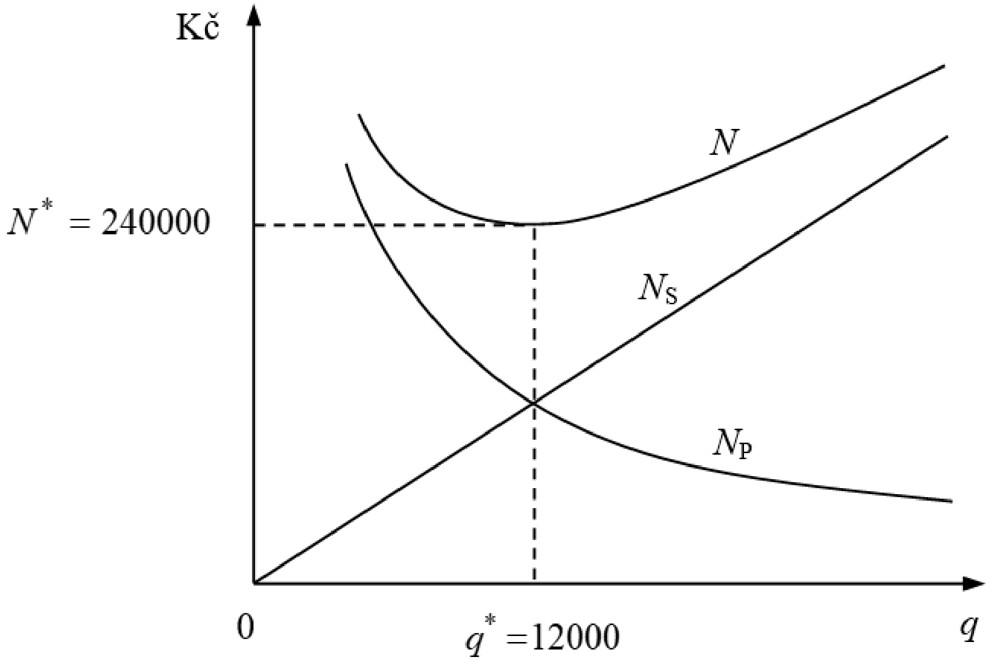
- **Optimální celkové roční náklady**

$$\boxed{N^* = \sqrt{2Qc_1c_2}} \qquad N^* = \sqrt{2\,(120000)\,(20)\,(12000)} = 240000 \text{ Kč}$$

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Optimální velikost objednávky, optimální celkové roční náklady**



Obr. 38 – Minimální náklady při optimální velikosti objednávky

Modely řízení zásob

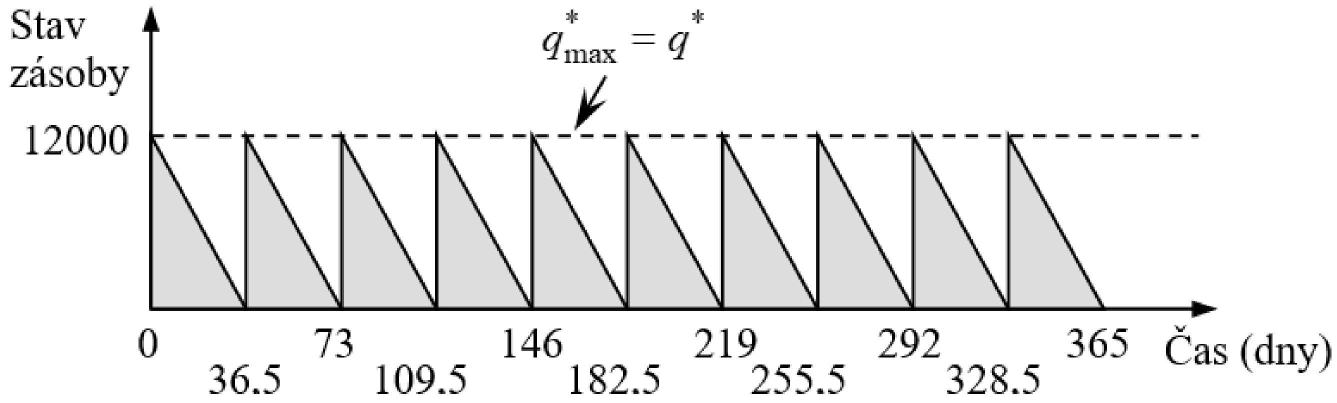
ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Optimální délka zásobovacího cyklu**

$$\boxed{t^* = \frac{1}{n^*} = \frac{q^*}{Q}}$$

t^* = 1/10 roku



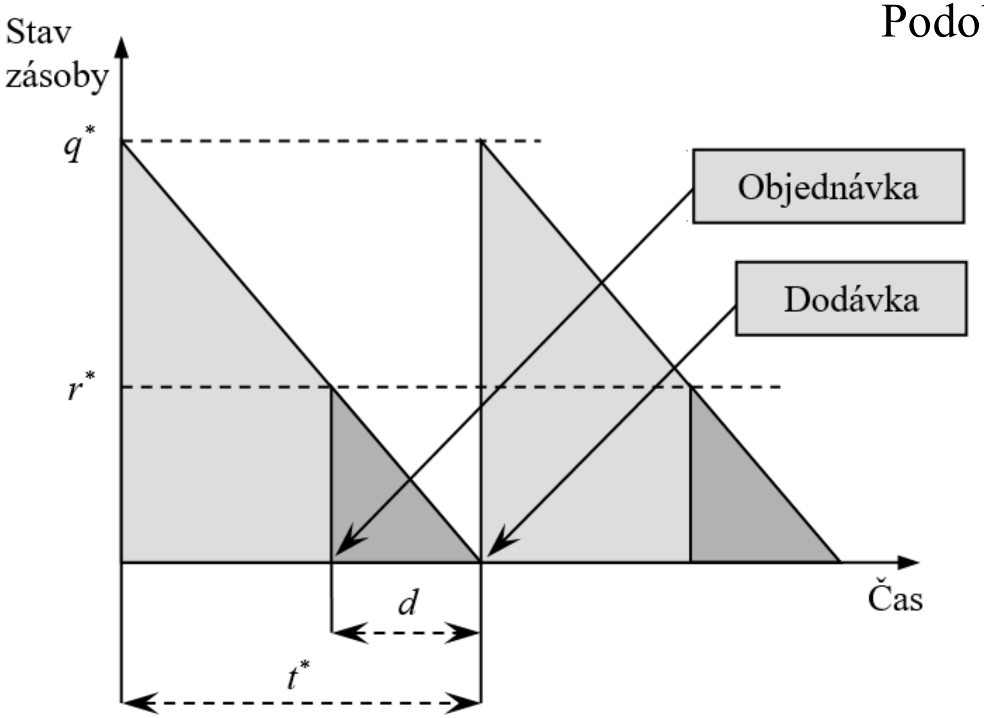
Obr. 39 – Zásobovací cykly při optimální strategii

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Optimální bod znovuobjednávky**



Obr. 40 – Určení bodu znovuobjednávky

Podobnost trojúhelníků: $$\frac{r^*}{q^*} = \frac{d}{t^*}$$

$$\boxed{r^* = \frac{dq^*}{t^*} = dQ}$$

$$r^* = \frac{1}{24}120\,000 = 5\,000$$ přepravek

$$\boxed{r^* = \frac{dq^*}{t^*} \bmod q^* = dQ \bmod q^*}$$

INTERNAL

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Příklad**
  - Firma zabývající se distribucí uhlí realizuje pravidelné týdenní objednávky (předpokládáme 50 týdnů v roce).
  - Roční nájem skladových prostor činí 20 Kč na jednu tunu uhlí, pořizovací náklady na jednu objednávku jsou 800 Kč.
  - Zkušební přechod na pravidelné dvoutýdenní objednávky nezpůsobil žádnou změnu celkových ročních nákladů.
  - Vypočtěte velikost objednávky a velikost celkových ročních nákladů odpovídající předchozí i současné strategii.
  - Optimalizujte zásobovací proces.

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Vstupní parametry a proměnné**
  - Roční skladovací náklady na jednotku $c_1 = 20$ Kč/tuna
  - Pořizovací náklady $c_2 = 800$ Kč/objednávka
  - Počet objednávek – strategie 1 $n_1 = 50$/rok
  - Počet objednávek – strategie 2 $n_2 = 25$/rok
  - Velikost objednávky – strategie 1 q
  - Velikost objednávky – strategie 2 $2q$
  - Celkové roční náklady – strategie 1 N_1
  - Celkové roční náklady – strategie 2 N_2

Modely řízení zásob

Model EOQ – Optimální velikost objednávky

- **Velikost objednávky a celkové roční náklady pro obě strategie**

$$N_1 = N_2$$

$$c_1 \frac{q}{2} + n_1 c_2 = c_1 \frac{2q}{2} + n_2 c_2$$

$$20 \frac{q}{2} + 50(800) = 20 \frac{2q}{2} + 25(800)$$

$$q = 2000 \text{ tun}$$

$$2q = 4000 \text{ tun}$$

$$N_1 = N_2 = 60000 \text{ Kč}$$

$$Q = 50.2000 = 100000 \text{ tun}$$

- **Optimální velikost objednávky a optimální celkové roční náklady**

$$q^* = \sqrt{\frac{2(100000)(800)}{20}} \doteq 2828 \text{ tun}$$

$$N^* = \sqrt{2(100000)(20)(800)} \doteq 56570 \text{ Kč}$$

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Řízení zásob**
  - Jaká je optimální velikost výrobní dávky?
  - Jaký je maximální stav zásoby?
  - Jaké jsou celkové náklady?
  - Jak dlouho trvá výroba?
  - Kdy se má začít s přípravou následující výrobní dávky?

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

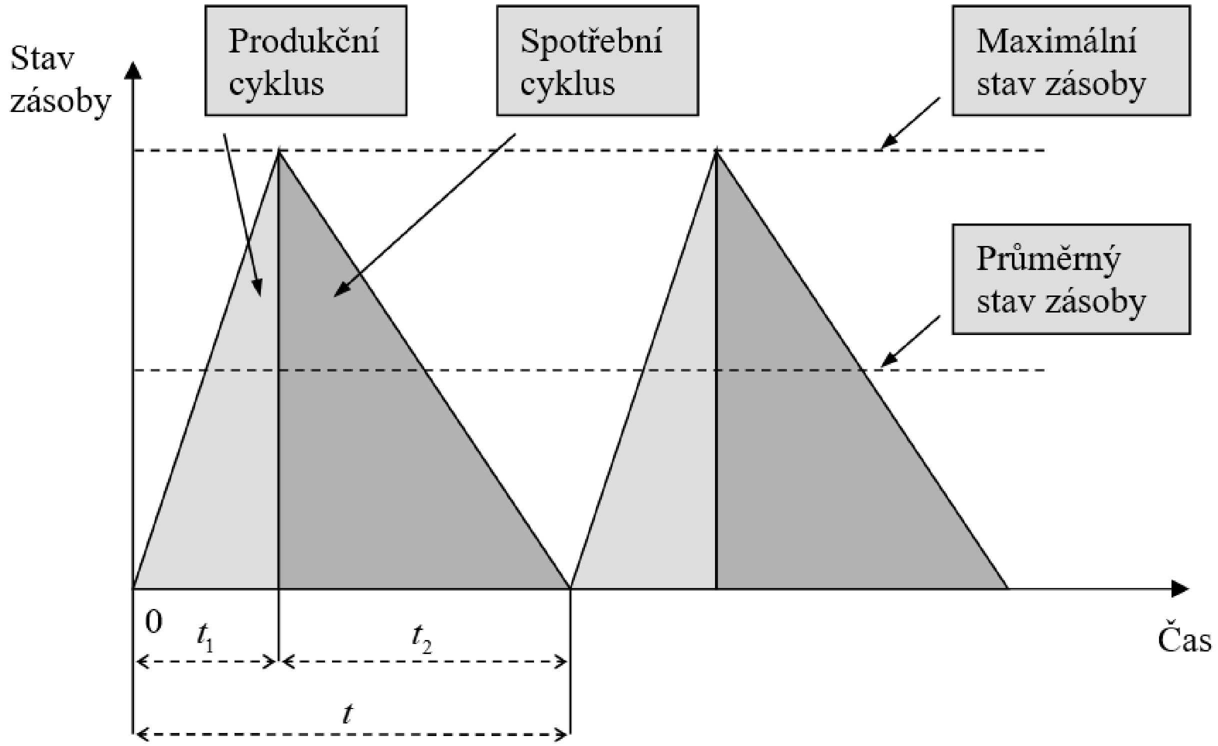
Produkčně – spotřební model

- **Předpoklady**
  - položka jediného typu,
  - poptávka je předem známá a v čase konstantní (statická)
  - délka časového intervalu nutného pro přípravu následující výrobní dávky je známá a konstantní hodnota,
  - čerpání zásob ze skladu je rovnoměrné,
  - velikost dávky je konstantní,
  - doplnění probíhá v produkčním cyklu,
  - žádný nedostatek ani přebytek (produkční cyklus začíná přesně v momentě dokončení spotřebního cyklu).

Modely řízení zásob

Produkčně – spotřební model

- **Zásobovací cykly**



Obr. 41 – Zásobovací cykly v produkčně – spotřebním modelu

Modely řízení zásob

Produkčně – spotřební model

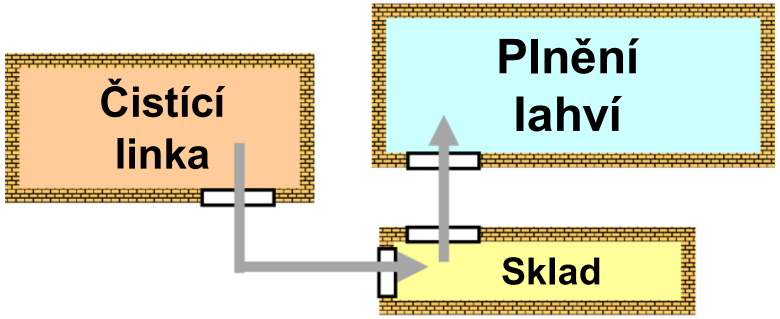
- **Zásobovací cykly**
  - Produkční cyklus
    - intenzita produkce,
    - intenzita spotřeby,
    - doplňování zásob.
  - Spotřební cyklus
    - intenzita spotřeby,
    - čerpání.

intenzita produkce > intenzita spotřeby

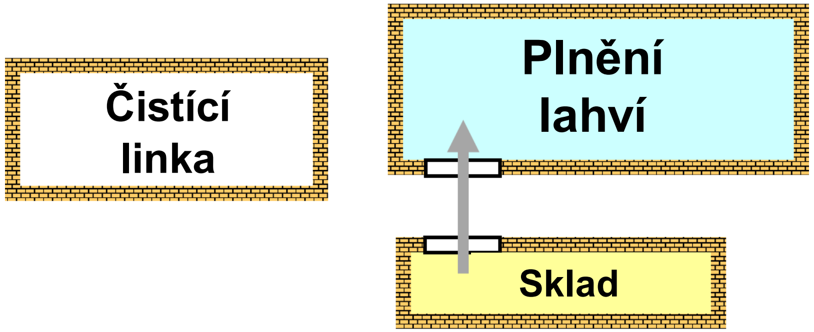
Modely řízení zásob

Produkčně – spotřební model

- **Příklad**
  - Soukromý pivovar vyrábí měsíčně 4 000 hl piva.
  - 25 % produkce se prodává v podobě lahvového piva. Prázdné půllitrové láhve jsou uloženy v pivních přepravkách po 20 lahvích. Průměrné roční skladovací náklady jsou vyčísleny na 20 Kč za jednu přepravku.
  - Linka je schopná vyčistit maximálně 8 000 lahví za den.
  - Náklady spojené s přípravou jedné čistící dávky jsou 12 000 Kč.
  - Příprava čistící linky trvá 1/2 měsíce.
  - Cílem je optimalizovat výrobní a zásobovací proces.



Obr. 42 – Produkční cyklus



Obr. 43 – Spotřební cyklus

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Vstupní parametry a proměnné**
  - Velikost celkové (roční) poptávky $Q = 120\ 000$ přepravek
  - Jednotkové skladovací náklady (roční) $c_1 = 20$ Kč/přepravek
  - Fixní náklady na přípravu a realizaci jedné výrobní dávky $c_2 = 12\ 000$ Kč/dávka
  - Délka časového intervalu nutného pro přípravu následující výrobní dávky $d = 1/2$ měsíce$= 1/24$ roku
  - Intenzita produkce $p = 146\ 000$ přepravek za rok
  - Intenzita spotřeby $h = 120\ 000$ přepravek za rok
  - Velikost výrobní dávky q
  - Celkový počet výrobních dávek (v jednom roce) n
  - Délka zásobovacího cyklu t
  - Délka produkčního cyklu t_1
  - Délka spotřebního cyklu t_2
  - Stav zásob, při kterém se začíná připravovat následující výrobní dávka r

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Celkové roční náklady**

$$N = N_S + N_D$$

$$q = pt_1$$

$$q_{\max} = pt_1 - ht_1 = (p-h)t_1 = \frac{p-h}{p}q$$

$$q_{avg} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{p-h}{p}\frac{q}{2}$$

$$N_S = c_1 q_{avg} = c_1 \frac{p-h}{p}\frac{q}{2}$$

$$n = \frac{Q}{q}$$

$$N_D = c_2 n = c_2 \frac{Q}{q}$$

$$\boxed{N(q) = c_1 \frac{p-h}{p}\frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q}}$$

N – celkové roční náklady
N_S – celkové roční skladovací náklady
N_D – celkové roční náklady na přípravu a realizaci dávek
$q_{\max}$ – maximální stav zásoby
q_{avg} – průměrný stav zásoby

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Optimální velikost výrobní dávky**

$$N(q) = c_1 \frac{p-h}{p}\frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q} \quad \to \min$$

$$\frac{dN(q)}{dq} = \frac{c_1}{2}\frac{p-h}{p} - \frac{c_2 Q}{q^2} = 0$$

$$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}}\sqrt{\frac{p}{p-h}}}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2(120000)(12000)}{20}}\sqrt{\frac{146000}{146000-120000}} \doteq 28\,436{,}16 \ \text{přepravek}$$

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Optimální celkové roční náklady**

$$\boxed{N^* = \sqrt{2Qc_1c_2}\sqrt{\frac{p-h}{p}}}$$

$$N^* = \sqrt{2(120000)(20)(12000)}\sqrt{\frac{146000-120000}{146000}} \doteq 101280 \text{ CZK.}$$

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Optimální délka výrobního cyklu**

$$\boxed{t_1^* = \frac{q^*}{p}} \qquad t_1^* = 0{,}1948 \text{ roku} = 71{,}1 \text{ dne}$$

- **Optimální délka spotřebního cyklu**

$$\boxed{t_2^* = \frac{q_{\max}^*}{h} = \frac{p-h}{ph}q^*} \qquad t_2^* \doteq 0{,}0422 \text{ roku} = 15{,}4 \text{ dne}$$

- **Optimální délka zásobovacího cyklu**

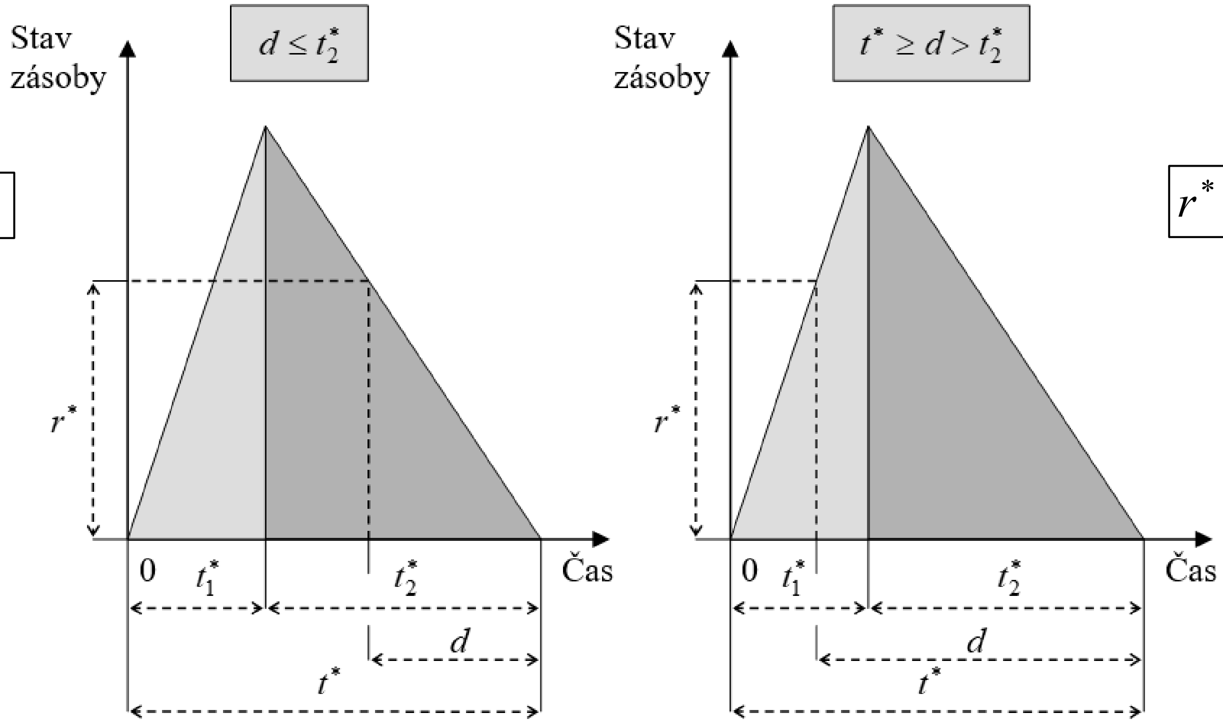
$$\boxed{t^* = t_1^* + t_2^*} \qquad t^* \doteq 0{,}1948 + 0{,}0422 = 0{,}237 \text{ roku} = 86{,}5 \text{ dne}$$

Modely řízení zásob

Produkčně – spotřební model

- **Stav zásoby na začátku období pro přípravu následující výrobní dávky**

$$\boxed{r^* = hd}$$



$$\boxed{r^* = (p - h)\,(t^* - d)}$$

Obr. 44 – Stav zásoby na začátku období pro přípravu následující výrobní dávky

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Produkčně – spotřební model

- **Stav zásoby na začátku období pro přípravu následující výrobní dávky**

$$d = 1/24 \doteq 0{,}0417 < t_2^* \doteq 0{,}0422$$

$$\boxed{r^* = hd,} \quad r^* = \frac{1}{24}120000 = 5000 \text{ přepravek}$$

- **Maximální stav zásoby pro optimální velikost čisticí dávky**

$$\boxed{q_{\max}^* = ht_2^*} \qquad q_{\max}^* \doteq 5064 \text{ přepravek}$$

Modely řízení zásob

Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Předpoklady**
  - položka jediného typu,
  - stochastická poptávka,
  - uskutečněna jediná objednávka (v průběhu nelze doplňovat sklad),
  - na konci sledovaného období mohou nastat dvě situace:
    - přebytek,
    - nedostatek.
- **Příklady sezónního zboží a zboží podléhajícího rychlé zkáze a znehodnocení**
  - noviny, pečivo, květiny, ovoce, módní oděvy, vánoční stromky.

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Příklad**
  - Oddělení potravin v hypermarketu řeší otázku, jak velkou zásobu rohlíků má vytvořit pro daný den.
  - Rohlíky do hypermarketu dodává pekárna, která si účtuje 1 Kč za kus. Hypermarket svým zákazníkům nabízí 1 kus za 2 Kč. Pokud na konci dne nějaké rohlíky zbydou, pak se nechají ztvrdnout či usušit a použijí se na výrobu strouhanky. V sáčku, který se prodává za 12 Kč, je nastrouháno 20 rohlíků.
  - Experti odhadli, že následující den se velikost poptávky bude řídit normálním pravděpodobnostním rozdělením se střední hodnotou 10 000 ks a směrodatnou odchylkou 500 ks.
  - Kolik rohlíků má hypermarket objednat, pokud chce maximalizovat zisk?

Modely řízení zásob

Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Vstupní parametry a proměnné**
  - střední hodnota velikosti poptávky μ = 10 000 rohlíků
  - směrodatná odchylka velikosti poptávky σ = 500 rohlíků
  - nákupní cena 1 Kč/rohlík
  - prodejní cena 2 Kč/rohlík
  - zůstatková hodnota 12/20 = 0,6 Kč/rohlík
  - skutečná velikost poptávky Q
  - velikost objednávky q
  - úroveň obsluhy p

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Mezní ztráta**
  - Velikost objednávky převyšuje skutečnou velikost poptávky nebo se jí rovná ($q \geq Q$)

    $\boxed{ML = \text{nákupní cena} - \text{zůstatková hodnota}}$ $\quad ML = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ Kč/rohlík

  - Očekávaná mezní ztráta

    $\boxed{p(ML)}$

- **Mezní ušlý zisk**
  - Velikost objednávky je nižší než skutečná velikost poptávky ($q < Q$)

    $\boxed{MPL = \text{prodejní cena} - \text{nákupní cena}}$ $\quad MPL = 2 - 1 = 1$ Kč/rohlík

  - Očekávaný mezní ušlý zisk

    $\boxed{(1 - p)(MPL)}$

Modely řízení zásob

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Optimální úroveň obsluhy**

$$pML = (1-p)MPL$$

$$\boxed{p = \frac{MPL}{ML + MPL}} \qquad p = \frac{1}{0,4+1} \doteq 0,7143$$

- Optimální velikost objednávky

$$\mathrm{P}\left\{Q \le q\right\} \ge p$$

$$z_p = \frac{Q-\mu}{\sigma} \qquad \rightarrow \qquad Q = z_p\sigma + \mu$$

$$q \ge \mu + z_p\sigma$$

$$\boxed{q^* = \mu + z_p\sigma} \qquad q^* = 10\,000 + 0,57\,(500) = 10\,285 \;\text{ rohlíků}$$

Modely řízení zásob

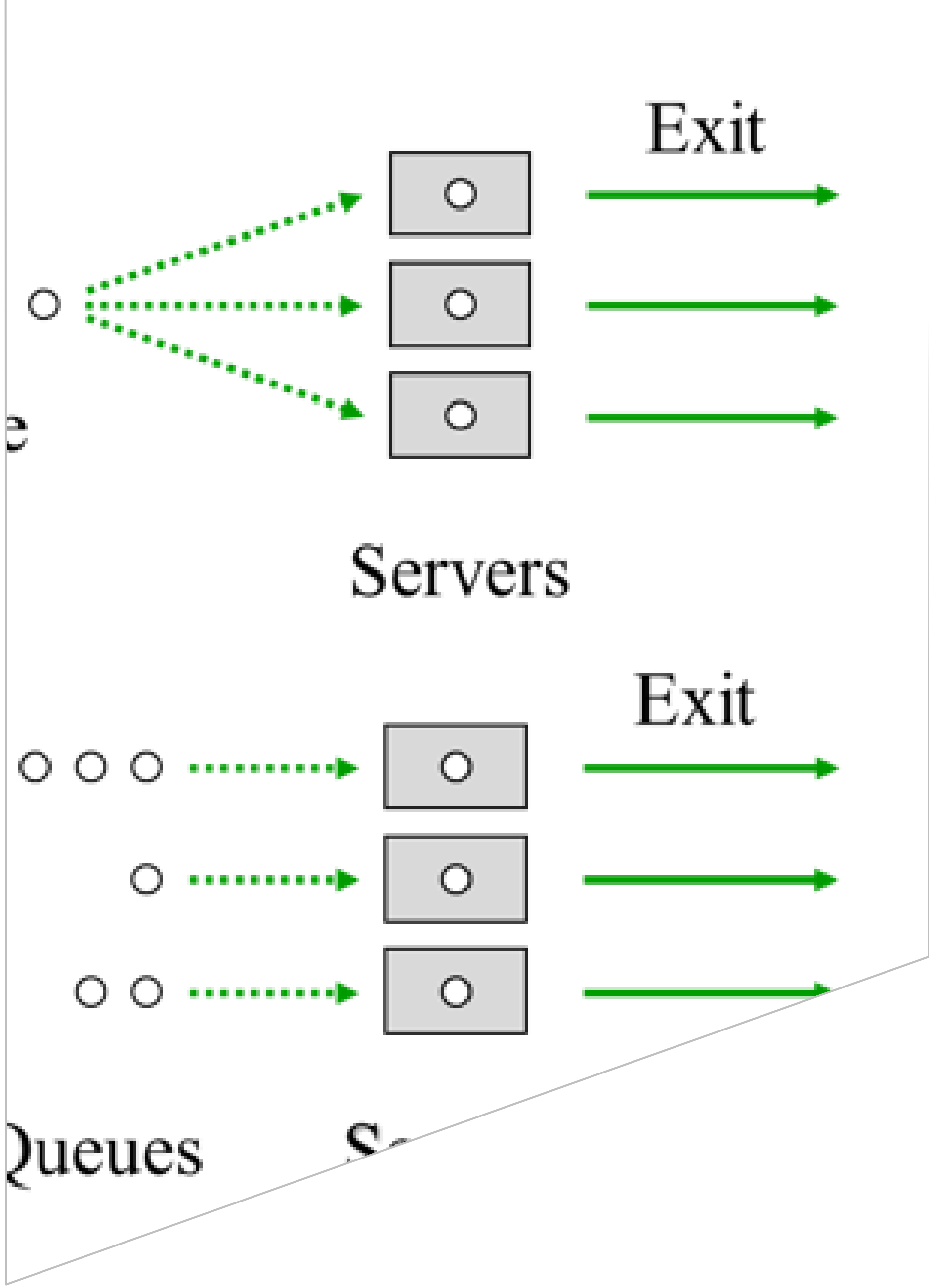
Stochastický model s jednorázově vytvářenou zásobou

- **Příklad**
  - Předpokládejme nyní, že velikost denní poptávky po rohlících má diskrétní rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení s minimální hodnotou 8 000 ks a maximální hodnotou 10 000 ks. Opět máme rozhodnout o optimální velikosti objednávky.
- **Optimální velikost objednávky**

$$q^* = 8\,000 + 0{,}7143\,(10\,000 - 8\,000) \doteq 9\,429 \text{ rohlíků}$$

6

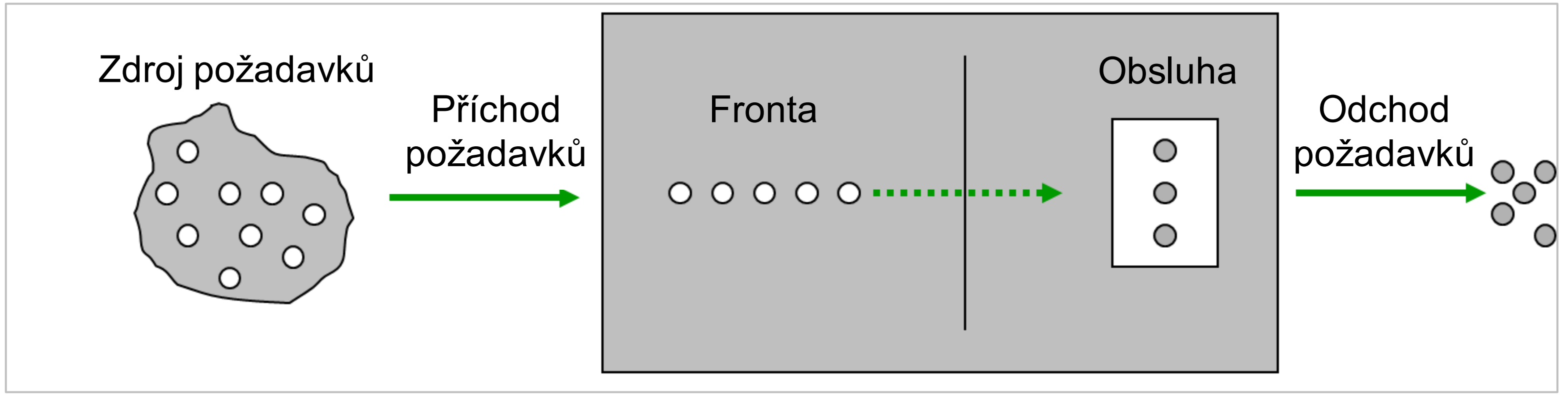
Modely hromadné obsluhy



Modely hromadné obsluhy

Úvod

- **Systém hromadné obsluhy**
  - Dva prvky v systému
    - požadavky,
    - obslužná zařízení (obslužné linky).



Obr. 45 – Základní schéma systému hromadné obsluhy

Modely hromadné obsluhy

Úvod

- **Systém hromadné obsluhy**
  - Příklady reálných systémů hromadné obsluhy

Tab. 29 – Příklady systémů hromadné obsluhy

Systém hromadné obsluhy	Požadavek	Obslužné zařízení
lékařská pohotovost	pacient	lékař
banka	klient	úředník
křižovatka	auto	semafor
call centrum	hovor	operátor
letiště	letadlo	runway
hasičská stanice	požár	zásahová jednotka
stanice záchranné služby	dopravní nehoda	záchranná jednotka

Modely hromadné obsluhy

ŠKODA AUTO Vysoká škola

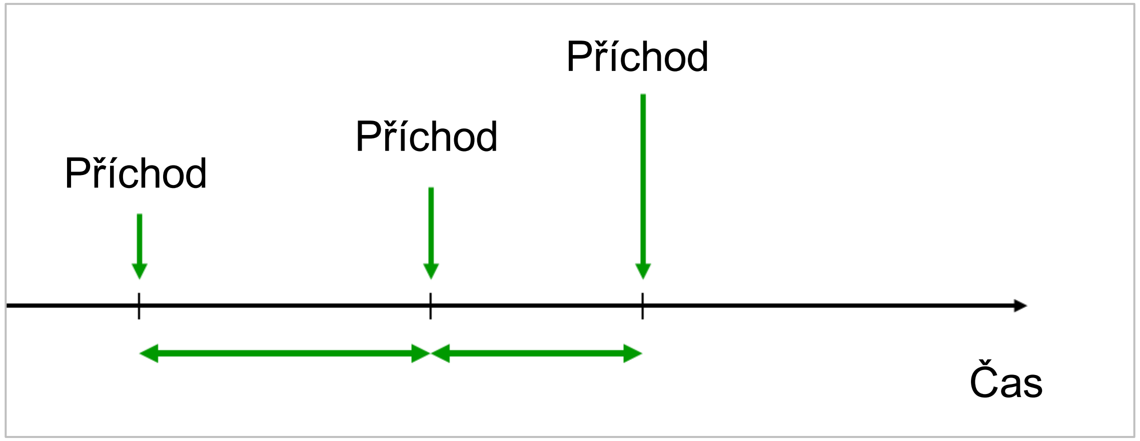
Úvod

- **Zdroj požadavků**
  - Velikost zdroje
    - nekonečný (turisté),
    - konečný (vozový park firmy).
- **Příchody požadavků**
  - Způsob příchodu
    - individuálně (pacient),
    - ve skupinách (skupina turistů).
  - Čas příchodu
    - plánované (vlaky),
    - neplánované (pacienti bez objednání, např. na pohotovosti).

Modely hromadné obsluhy

Úvod

- **Příchody požadavků**
  - Počet požadavků
    - počet požadavků, které do systému přijdou za jednotku času (Poissonovo pravděpodobnostní rozdělení),
    - λ = intenzita příchodu požadavků – průměrný počet požadavků, příchozích za jednotku času.
  - Okamžik příchodu požadavků
    - interval mezi příchody – doba mezi příchody dvou po sobě příchozích požadavků. (exponenciální rozdělení),
    - $1/\lambda$ = střední doba mezi příchody požadavků do systému – průměrná doba mezi příchody dvou požadavků.



Obr. 46 – Příchod požadavků

Modely hromadné obsluhy

Úvod

- **Obsluha**
  - Počet požadavků
    - počet požadavků, které zařízení obslouží za jednotku času (Poissonovo pravděpodobnostní rozdělení),
    - μ = intenzita obsluhy – průměrný počet požadavků obsloužených za časovou jednotku.
  - Doba obsluhy
    - doba, za kterou je požadavek obsloužen (exponenciální rozdělení),
    - $1/\mu$ = střední doba trvání obsluhy – průměrná doba trvání obsluhy požadavků.

Modely hromadné obsluhy

Úvod

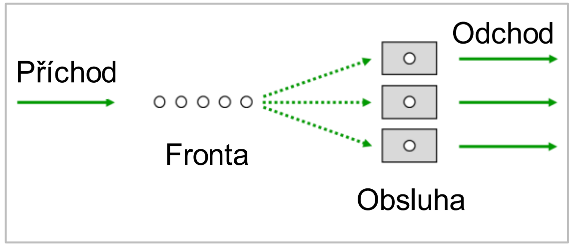
- **Síť obslužných zařízení**
  - Typ zařízení – typ nabízené obsluhy.
  - Počet zařízení – jedno nebo více zařízení.
  - Uspořádání obslužných zařízení – způsob uspořádání zařízení.
- **Konfigurace**
  1. Jednoduchý systém hromadné obsluhy

Obr. 47 – Jednoduchý systém hromadné obsluhy

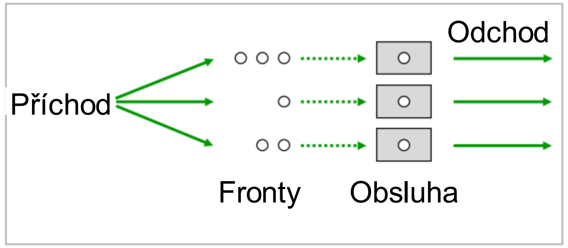
Modely hromadné obsluhy

Úvod

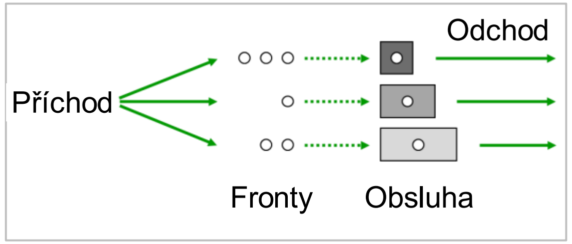
- **Konfigurace**
  2. Paralelní uspořádání obslužných linek



Obr. 48 – Identická obsluha, společná fronta

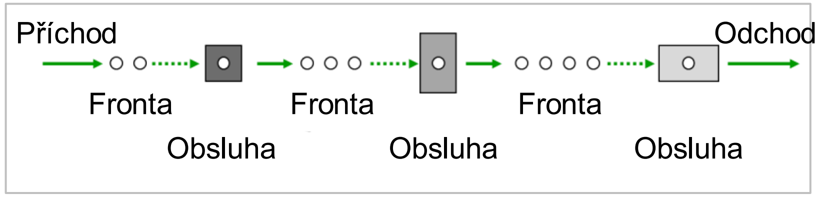


Obr. 49 – Identická fronta, samostatné fronty



Obr. 50 – Neidentická obsluha

  3. Sériové uspořádání obslužných linek



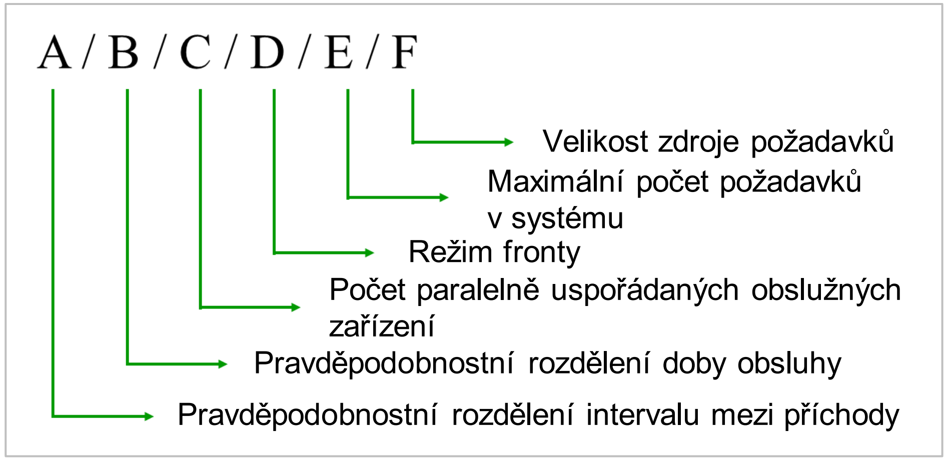
Obr. 51 – Sériové uspořádání obslužných linek

  4. Kombinované uspořádání obslužných linek

Modely hromadné obsluhy

Úvod

- **Režimy front**
  - FCFS (First-Come, First-Served) – FIFO (First-In, First-Out)
  - LCFS (Last-Come, First-Served) – LIFO (Last-In, First-Out)
  - PRI (PRIority system) – fronta s prioritou
  - SIRO (Selection In Random Order) – náhodný výběr
- **Klasifikace modelů hromadné obsluhy (Kendallova klasifikace)**



Obr. 52 – Kendallova klasifikace

Modely hromadné obsluhy

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Předpoklady**
  - Kendallův kód: M/M/1/FIFO/∞/∞,
  - jedno obslužné zařízení,
  - exponenciální pravděpodobnostní rozdělení intervalu mezi příchody (λ = intenzita příchodu požadavků),
  - exponenciální pravděpodobnostní rozdělení doby obsluhy (μ = intenzita obsluhy),
  - režim fronty je FIFO,
  - kapacita systému je neomezená,
  - zdroj požadavků je nekonečný,
  - $\mu > \lambda$ stabilizace systému.

Modely hromadné obsluhy

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Příklad**
  - V obchodu se smíšeným zbožím je prodejní pult s jedním prodavačem.
  - Během otevírací doby od 8:00 do 18:00 přichází do obchodu průměrně 18 zákazníků za hodinu.
  - Prodavač dokáže obsloužit během hodiny průměrně 25 zákazníků.
  - Úkolem je provést analýzu tohoto systému hromadné obsluhy.
- **Vstupní parametry**
  - Intenzita příchodu požadavků $\lambda = 18$ požadavků za hodinu
  - Intenzita obsluhy $\mu = 25$ požadavků za hodinu

Modely hromadné obsluhy

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Pravděpodobnostní charakteristiky**
  - Intenzita provozu
    - pravděpodobnost, že obslužné zařízení pracuje,
    - pravděpodobnost, že prodavač právě obsluhuje nějakého zákazníka,
    - pravděpodobnost, že zákazník bude muset čekat ve frontě.

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}} \qquad \rho = 0{,}72$$

  - Pravděpodobnost, že v systému není žádný požadavek
    - pravděpodobnost, že obslužné zařízení nepracuje,
    - pravděpodobnost, že zákazník nebude muset čekat ve frontě.

$$\boxed{p_0 = 1 - \rho} \qquad p_0 = 0{,}28$$

p_n

Modely hromadné obsluhy

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Pravděpodobnostní charakteristiky**
  - Pravděpodobnost, že se v systému nachází přesně n požadavků.

$$p_n = p_0 \rho^n = (1-\rho)\rho^n$$

Tab. 30 – Pravděpodobnost, že v prodejně je přesně n zákazníků

n	p_n
0	0,280
1	0,202
2	0,145
3	0,105
4	0,075
5	0,054

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$$

Modely hromadné obsluhy

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Časové charakteristiky**
  - Průměrná doba, kterou požadavek stráví v systému

$$\boxed{T = \frac{1}{\mu - \lambda}} \qquad T \doteq 0{,}143 \text{ hodin} \doteq 8{,}6 \text{ min}$$

  - Průměrná doba čekání požadavku ve frontě

$$\boxed{T_f = T - \frac{1}{\mu}} \qquad T_f \doteq 0{,}103 \text{ hodin} \doteq 6{,}2 \text{ min}$$

Modely hromadné obsluhy

Jednoduchý exponenciální model HO

- **Charakteristiky týkající se počtu požadavků**
  - Průměrný počet požadavků nacházejících se v systému

$$\boxed{N = \lambda T} \qquad N \doteq 2{,}57 \text{ požadavků}$$

  - Průměrný počet požadavků čekajících ve frontě

$$\boxed{N_f = \lambda T_f} \qquad N_f \doteq 1{,}85 \text{ požadavků}$$

Modely hromadné obsluhy

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Exponenciální model HO s paralelními zařízeními

- **Předpoklady**
  - Kendallův kód: M/M/K/FIFO/∞/∞,
  - K paralelně uspořádaných identických zařízení,
  - exponenciální pravděpodobnostní rozdělení intervalu mezi příchody (λ = intenzita příchodu požadavků),
  - exponenciální pravděpodobnostní rozdělení doby obsluhy (μ = intenzita obsluhy),
  - režim fronty je FIFO,
  - kapacita systému je neomezená,
  - zdroj požadavků je nekonečný,
  - $K\mu>\lambda$ stabilizace systému.

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Děkuji za pozornost

Jan Fábry

Katedra řízení výroby, logistiky a kvality

fabry@savs.cz www.janfabry.cz