# Ekonomicko-matematické metody

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

# Předmět Ekonomicko-matematické metody

**Kód studijního předmětu:** INM/NPEMM
**Garant:** doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.
**Vyučující:** Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

**Rozsah studijního předmětu:** 2+1
**Počet kreditů:** 5 ECTS
**Způsob zakončení:** zkouška (písemná)
**Forma výuky:** přednáška, seminář v PC učebně

# Předmět Ekonomicko-matematické metody

## Podmínky absolvování předmětu:

- **Aktivní účast na seminářích: alespoň 70%**
- **Průběžný test max. 30b.**
- **Zkouškový test max. 70 b.**
- **Celkem max. 100 b.**

**Klasifikace:**

- **0 až 59 b. F**
- **60 až 64 b E**
- **65 až 69 b. D**
- **70 až 79 b. C**
- **80 až 89 b. B**
- **90 až 100 b. A**

# Předmět Ekonomicko-matematické metody v eLearningu

**Kurs a interaktivní osnova v IS SU**
**https://is.slu.cz/auth/el/opf/zima2022/INMNPEMM/**

**Adresář „public“ na disku L:**
**L:\mazurek\public**

**Obsahuje všechny materiály:** **distanční studijní oporu (texty), excelovské soubory s příklady ze seminářů, doplňkové soubory, studijní literaturu, SW, odkazy na jiné weby apod.**

# Trocha historie o matematickém modelování v ekonomii

- Matematika se do ekonomie začala prosazovat ve 30. letech minulého století
- Ke skutečnému boomu došlo až s nástupem počítačů
- **Rhind-Ahmesův papyrus** ze 17. stol. **př. n. l.** obsahuje některé hospodářské úlohy, které lze při troše tolerance považovat za matematické aplikace v ekonomii
- V novověké historii se lze setkat s matematickým modelováním již v klasických pracích o politické ekonomii, např. v díle **Political arithmetics** od anglického filosofa **W. Pettyho** (1623 – 1687)
- Švýcarský ekonom **León Walras** (1834 – 1910) jako první používal matematický aparát jako nedílnou součást svých ekonomických úvah o marginální teorii užitku a v teorii ekonomické rovnováhy
- **Vilfredo Pareto** (1848 – 1923) - žák L. Walrase - dovedl používání matematiky v ekonomii k dnešním standardům

# Rhind-Ahmesův papyrus 1

# Rhind-Ahmesův papyrus 2

- Asi 1600 let před naším letopočtem byl na dvoře faraóna Amenemhata III. jako královský písař a matematik zaměstnán Ahmes. V roce 1853 objevil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách jeden Ahmesův papyrus. Papyrus má tvar pásku širokého 33 cm a dlouhého více než 5 m. Obsahuje mimo jiné i následující úlohu:
- **Sto měr zrní je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. První dva dělníci mají dohromady dostat sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři dohromady. Kolik měr zrní dostal každý dělník?**

# Matematické metody v ekonomii

**zahrnují tyto oblasti:**

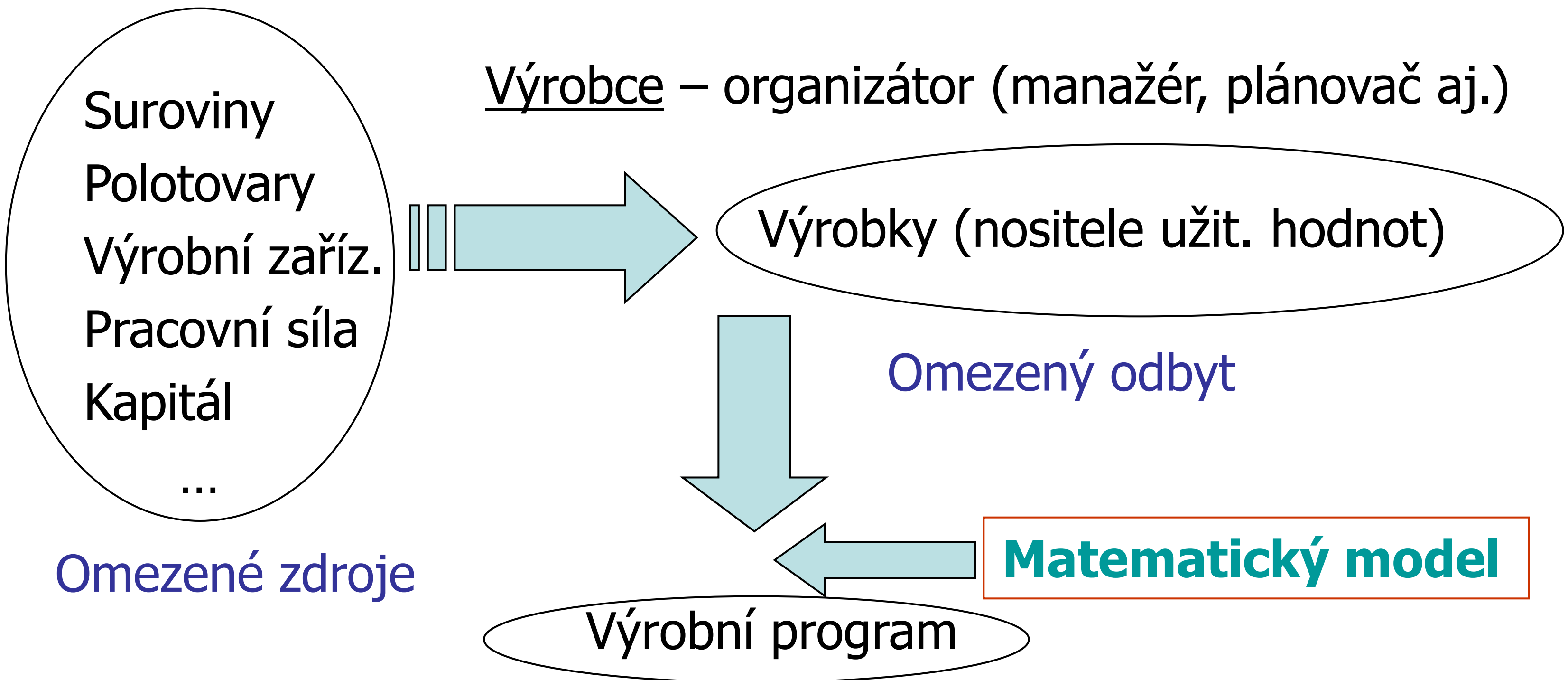
- Matematické programování a jeho aplikace v ekonomických disciplínách
- Lineární programování
- Vícekriteriální optimalizace
- Cílové programování
- Modely analýzy obalu dat
- Modely optimalizace portfolia
- Optimalizační úlohy na grafech
- Řízení projektů: Časová analýza: CPM, PERT
- Software k řešení optimalizačních úloh na PC
- Operační výzkum (operační analýza)
- Operační management

# Příklad tvorby matematického modelu:

## Maximalizace zisku podnikatele při omezených výrobních zdrojích a omezeném odbytu

***Název disciplíny:*** **Operační management**

***Teoretické schéma:***



# Výrobní program

- Výrobkový seznam ($n$ výrobků: $1, 2,\dots,n$)
- Objem výroby jednotlivých výrobků množství, kusy ( $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ) předem neznámý rozsah výroby

# Jednotlivé zisky a celkový zisk

- $c_j$ – zisk z výroby jednotky výrobku $j$

  $(j = 1, 2, \dots, n)$
- $c_j x_j$ – zisk z výroby množství $x_j$ výrobku $j$
- $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ – celkový zisk výrobního programu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

# Omezené zdroje

- Seznam omezených zdrojů ($m$ zdrojů: $1, 2, \ldots, m$)
- Disponibilní množství zdrojů
  ( $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$ )
- Volný nákup zdrojů z celkové omezené částky

# Technologické (strukturní) koeficienty

- $a_{ij}$ - technologický koeficient zdroje $i$ na výrobek $j$ (množství zdroje " $i$ " potřebného k výrobě jednotky výrobku " $j$ " )

- $a_{ij}\, x_j$ - množství zdroje " $i$ " potřebného k výrobě $x_j$ jednotek výrobku " $j$ "

- $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n$ - množství zdroje "$i$" potřebného k výrobě výrobního programu $X = (x_1 , x_2, \ldots, x_n)$

# Omezení odbytu

- $h_i$ - horní omezení odbytu výrobku "$i$"
- $0 \leq x_j \leq h_j$ - objem výroby výrobku "$j$" nesmí překročit odbytové možnosti

# Přípustné výrobní programy

PVP $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ splňuje:

- podmínky disponibilních zdrojů:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

- podmínky odbytových možností:

$$0 \leq x_j \leq h_j \quad j = 1,2,\dots,n$$

# Optimální výrobní program

Takový přípustný výrobní program $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ který <u>maximalizuje</u> celkový zisk:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Pro nalezení OVP musíme shromáždit :

- výrobkový seznam
- jednotkové zisky
- disponibilní množství zdrojů
- technologické koeficienty
- omezení odbytu

# Optimální výrobní program …

Data

↓ sestavení modelu

matematický model

↓ řešení (počítač)

**optimální výrobní program** $\mathbf{X^* = (x^*_1 , x^*_2,\ldots, x^*_n)}$

# Optimalizace výrobního programu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \text{MAX};$$

za omezení

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + ... + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad i = 1,2,\dots, m$$

$$0 \leq x_j \leq h_j \qquad j = 1,2,\dots,n$$

# Příklad:

- Výrobce tzv. „racio“ pokrmů plánuje výrobu dvou typů směsí. Na jejich výrobu má na jedno plánovací období k dispozici rýži o kapacitě 270 tun,  pšenici o kapacitě 100 tun a ovesné vločky o kapacitě 60 tun. Při výrobě dvou typů směsí je třeba dodržovat složení daných směsí podle následující tabulky.

| Surovina | Racio směs | | Kapacita surovin |
|---|---|---|---|
| | Směs I | Směs II | |
| Rýže | 90% | 30% | 270 |
| Pšenice | | 50% | 100 |
| Vločky | 10% | 20% | 60 |

- Na základě všech nákladů souvisejících s výrobou a dle předpokládané prodejní ceny obou směsí byl vykalkulován zisk 2000 Kč za 1 tunu směsi typu I a 3000 Kč/t směsi typu II. Jak má firma naplánovat výrobu, aby byl celkový zisk maximální?

# Transformace ekonomického modelu na model matematický

| Surovina | Receptura směsi typ I | Receptura směsi typ II | Kapacita surovin [t] |
|---|---|---|---|
| Rýže | 90% | 30% | 270 |
| Pšenice | | 50% | 100 |
| Vločky | 10% | 20% | 60 |

**2 procesy:**

1. výroba směsi typu I v množství $\boldsymbol{x_1 \geq 0}$
2. výroba směsi typu II v množství $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$

**3 činitelé (zdroje):** Rýže, pšenice, ovesné vločky

# Efektivnost procesů:

- 1 tuna směsi typu I přináší zisk 2000 Kč
- 1 tuna směsi typu II přináší zisk 3000 Kč

Cenové koeficienty

- $z = 2000x_1 + 3000x_2$ - zisk z produkce

  - $x_1$ tun směsi typu I

  - $x_2$ tun směsi typu II

Účelová funkce

# Omezující podmínky:

**Vlastní omezení:**

$$\boxed{\begin{aligned} 0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 &\le \\ 0{,}5\,x_2 &\le \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 &\le \end{aligned}} \boxed{\begin{aligned} 270 \\ 100 \\ 60 \end{aligned}} \quad \left.\begin{aligned} &\text{rýže} \\ &\text{pšenice} \\ &\text{vločky} \end{aligned}\right\} \text{3 zdroje}$$

Strukturní koeficienty

Kapacitní koeficienty (pravé strany)

**Podmínky nezápornosti**: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

# Matematický model LP:

2 procesy, 3 zdroje (činitele)

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow$$ max(imalizovat)

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \leq 270$$

$$0{,}5\,x_2 \leq 100$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

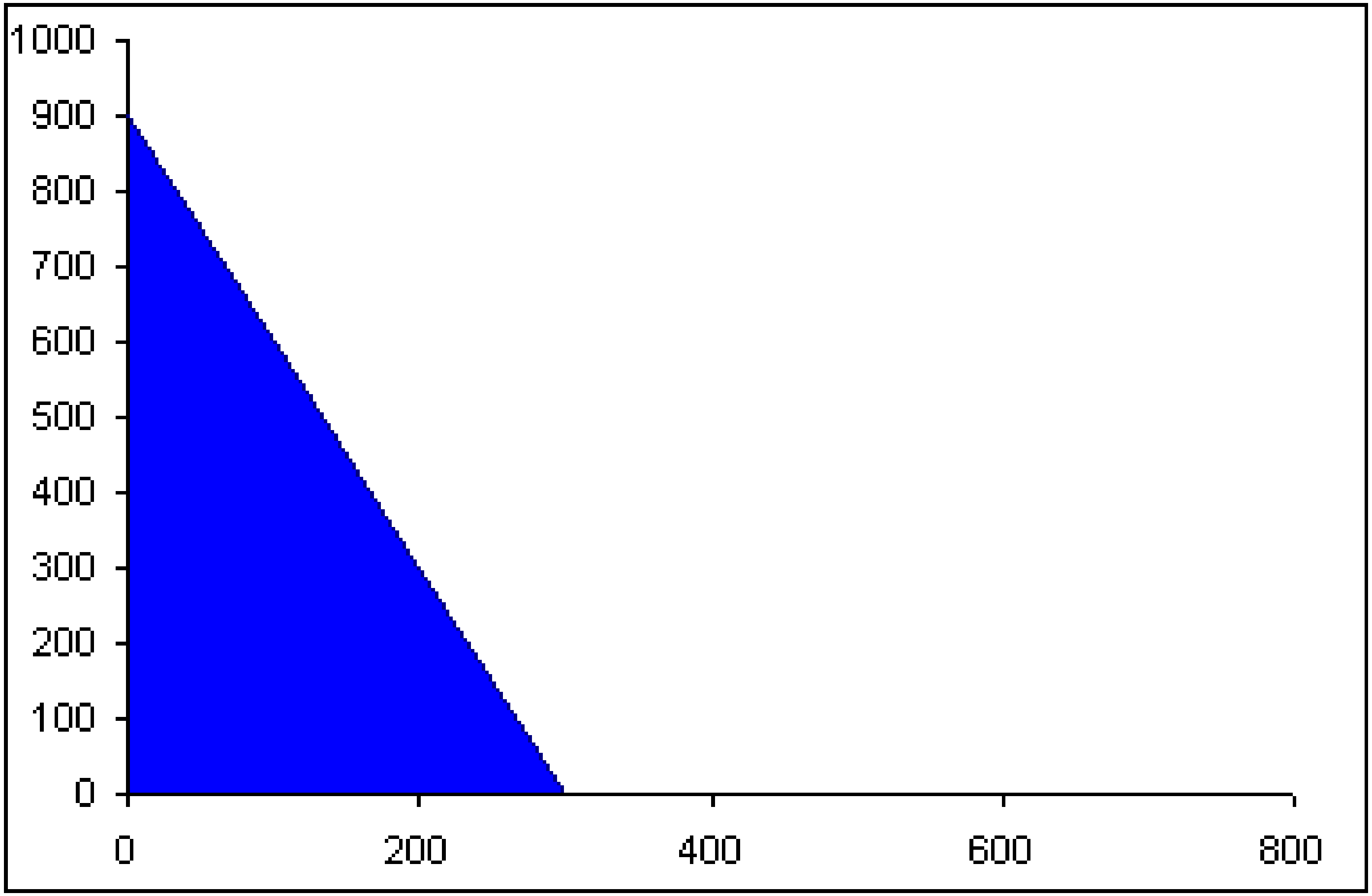
# Některá přípustná a nepřípustná řešení úlohy LP:

| Řešení | Proměnné | | Zbytek (+), nedostatek (-) surovin | | | Hodnota účelové funkce |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | Rýže | Pšenice | Vločky | |
| $X^1$ | 0 | 0 | 270 | 100 | 60 | 0 |
| $X^2$ | 100 | 100 | 150 | 50 | 30 | 500000 |
| $X^3$ | 300 | 0 | 0 | 100 | 30 | 600000 |
| $X^4$ | 0 | 300 | 180 | -50 | 0 | 900000 |
| $X^5$ | 200 | 200 | 30 | 0 | 0 | 1000000 |

Jaké je optimální řešení úlohy, tj. takové $x_1$ a $x_2$, které dávají max zisk?

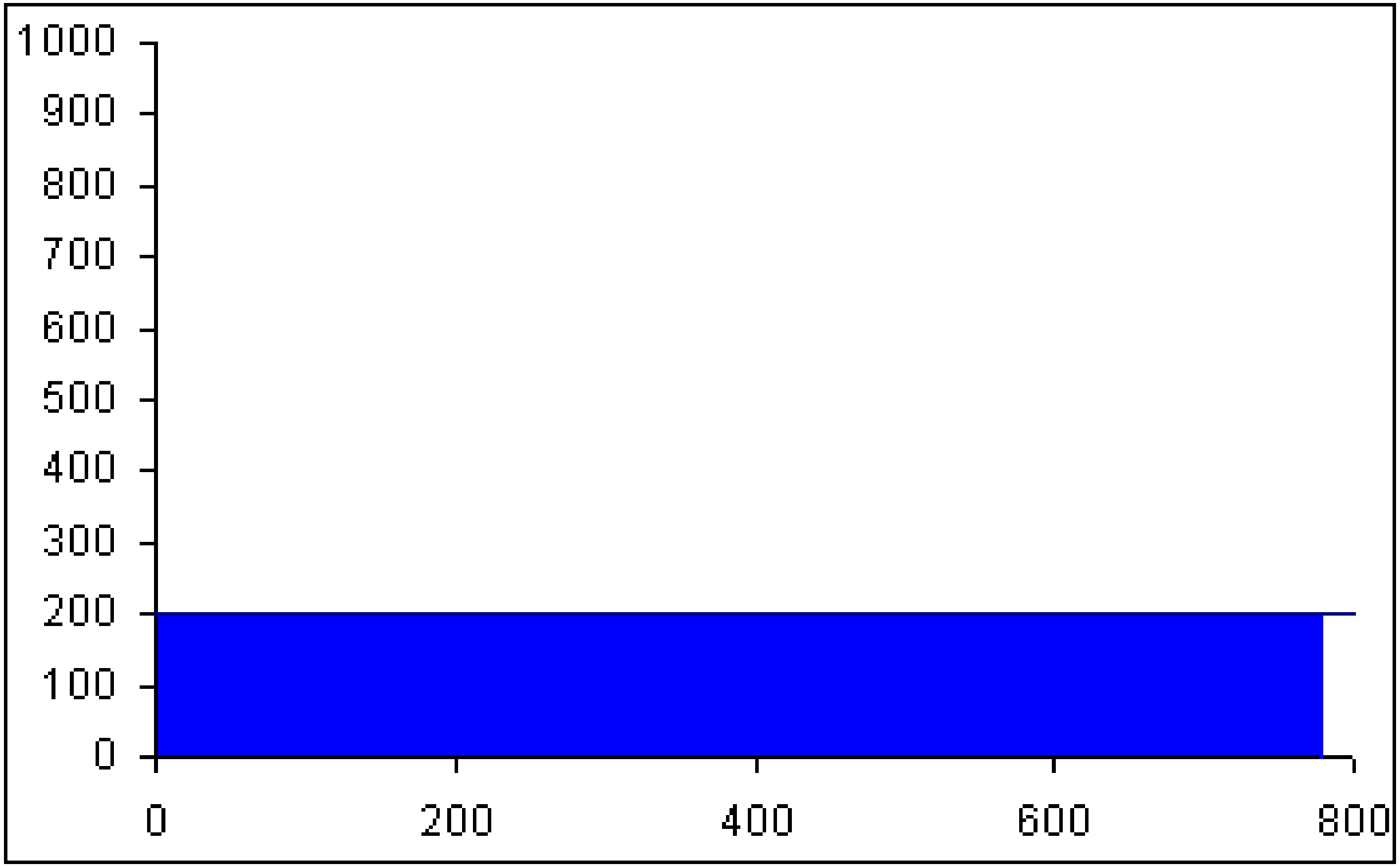
# Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \le 270,\ (x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$



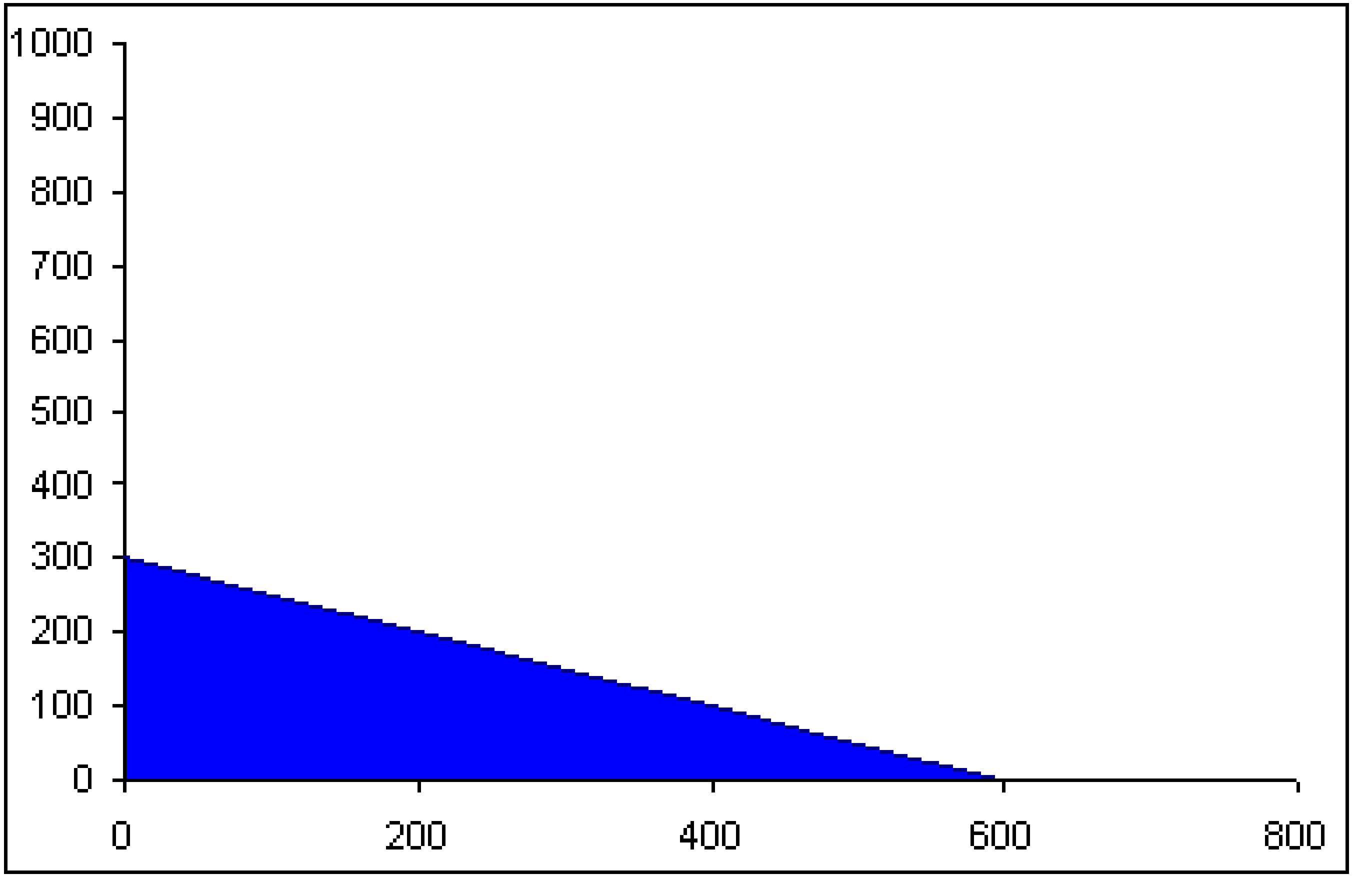
# Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}5\,x_2 \le 100,\ (x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$

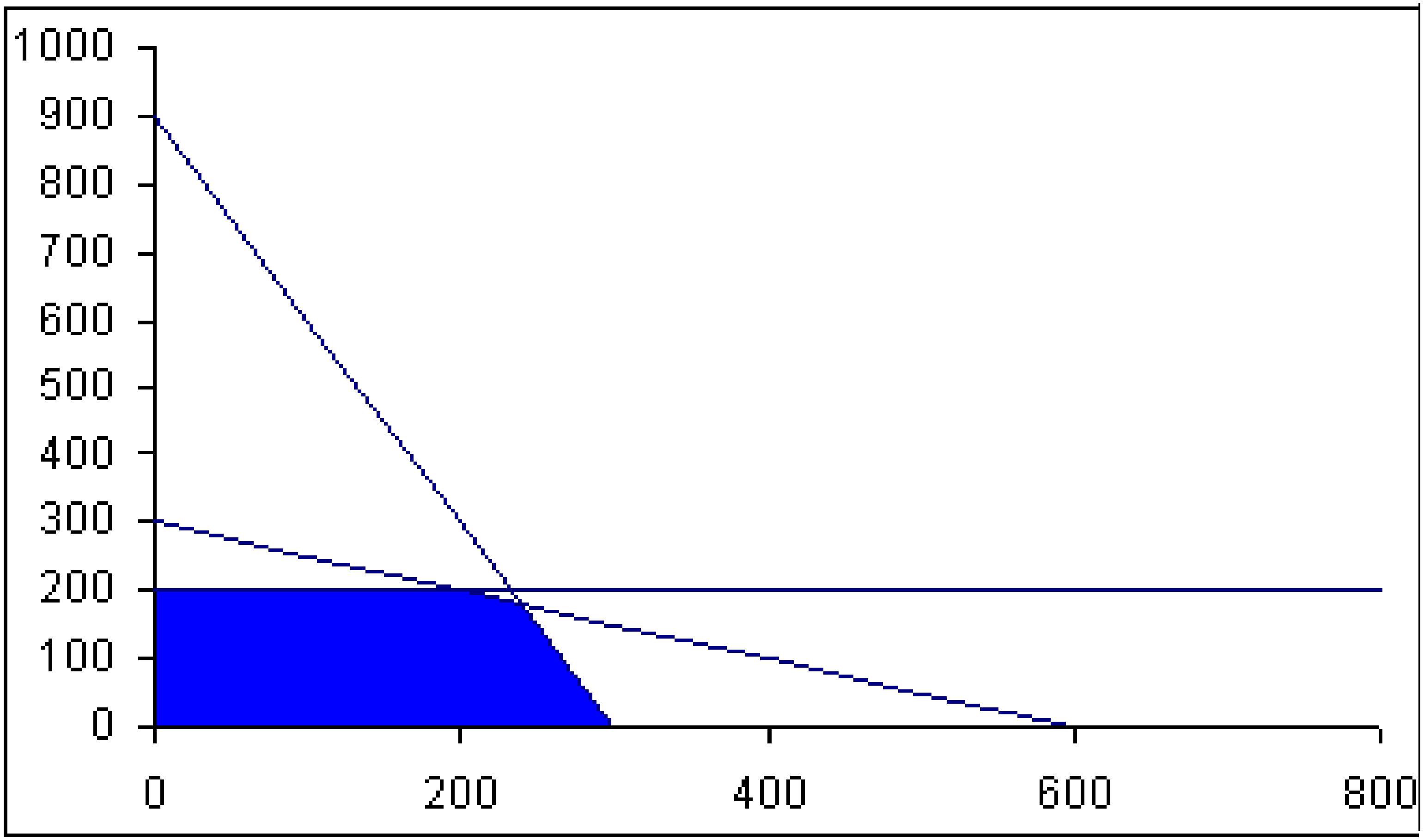


# Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \;\leq\; 60,\ (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$$

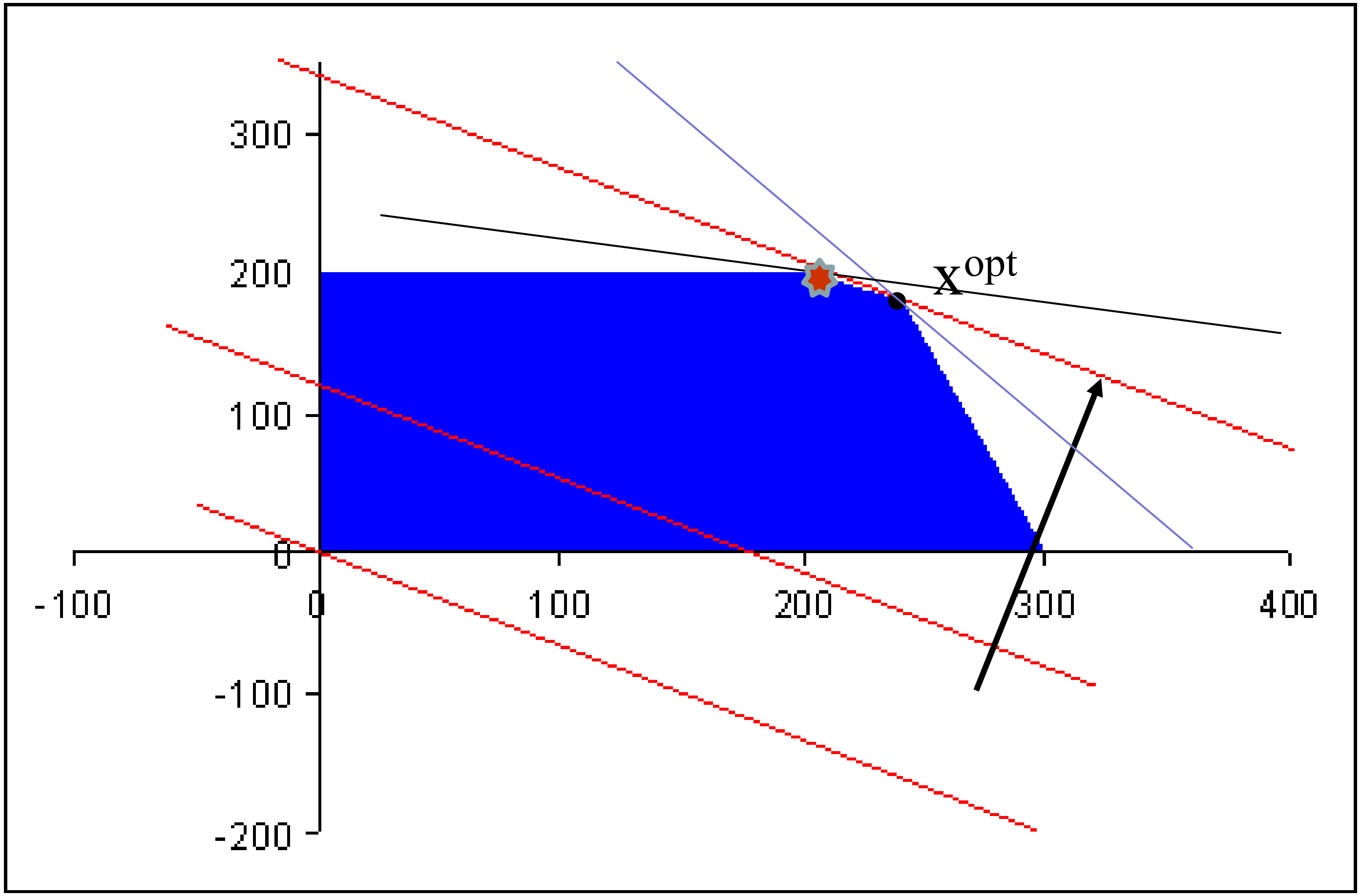


# Grafické znázornění výsledné množiny všech přípustných řešení:



# Grafické řešení úlohy LP:

$x_1 = 240 \quad x_2 = 180 \quad z = 1\,020\,000$



# Modifikace modelu:

## rizikovost procesů

- 1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk 2000 Kč
- 1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk 3000 Kč

- $\boxed{z = 2000x_1 + 3000x_2}$ - očekávaný (průměrný) zisk z produkce

  - $x_1$, resp. $x_2$ tun směsi typu I, resp. typu II

  Jednotkové zisky jsou náhodné veličiny s diskrétním nebo spojitým rozdělením pravděpodobnosti → celkový zisk z produkce je ROVNĚŽ náhodná veličina!

# Příklad:

## náhodný zisk (diskrétní rozdělení náh. vel.)

1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk:

1500 Kč s pravděpodobností 0,2

2000 Kč s pravděpodobností 0,6

2500 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

*E*(jednot. zisk2) = 1500*0,2 + 2000*0,6 + 2500*0,2 = 2000 Kč

1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk:

2000 Kč s pravděpodobností 0,2

3000 Kč s pravděpodobností 0,6

4000 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

*E*(jednot. zisk1) = 2000*0,2 + 3000*0,6 + 4000*0,2 = 3000 Kč

# Omezující podmínky:

**Vlastní omezení:**

$$
\begin{aligned}
0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 &\le 270 \quad \text{rýže}\\
0{,}5\,x_2 &\le 100 \quad \text{pšenice}\\
0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 &\le 60 \quad \text{vločky}
\end{aligned}
\quad \Bigg\}\ \text{3 zdroje}
$$

Strukturní koeficienty

Kapacitní koeficienty (pravé strany)

**Strukturní, resp. kapacitní koeficienty mohou být rovněž rizikové (tj. náhodné veličiny)**

Optimalizační úlohy s náhodnými koeficienty se řeší pomocí metod **matematického programování**

# Závěry

- Ekonomický model – reálná situace (pojmy, teorie, data…)
- Matematický model – přibližný (symbolický) model reality
- Řešení matemat. modelu – slouží pro podporu rozhodnutí – DSS
- Rozhodnutí pro reálnou akci – provádí vždy člověk!!!