Ekonomicko-matematické metody 2

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Matematický aparát EMM

(1) Funkce 1 proměnné

„ y je funkcí x “ .... $y = f(x)$

y ... závisle proměnná

x ... nezávisle proměnná

Př.: $\mathrm{HV} = f(\mathrm{ZP})$

„Hrubá výroba“ je funkcí „základních prostředků“

Matematický aparát EMM

(2) Funkce více proměnných: $y = f(x_1 , x_2 , ... , x_n)$
„ y je funkcí $x_1 , x_2 , ... , x_n$ “

(2) Matice (vektory)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{31} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

typ $(m \times n)$

Matematický aparát EMM

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ — vektor = speciální matice typu $n \times 1$ („sloupcový vektor“)

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n]$$ — transponovaný (řádkový) vektor – matice typu $1 \times n$

Matematický aparát EMM

Násobení vektorů (tj. matic (1×n) „krát“ (n×1))

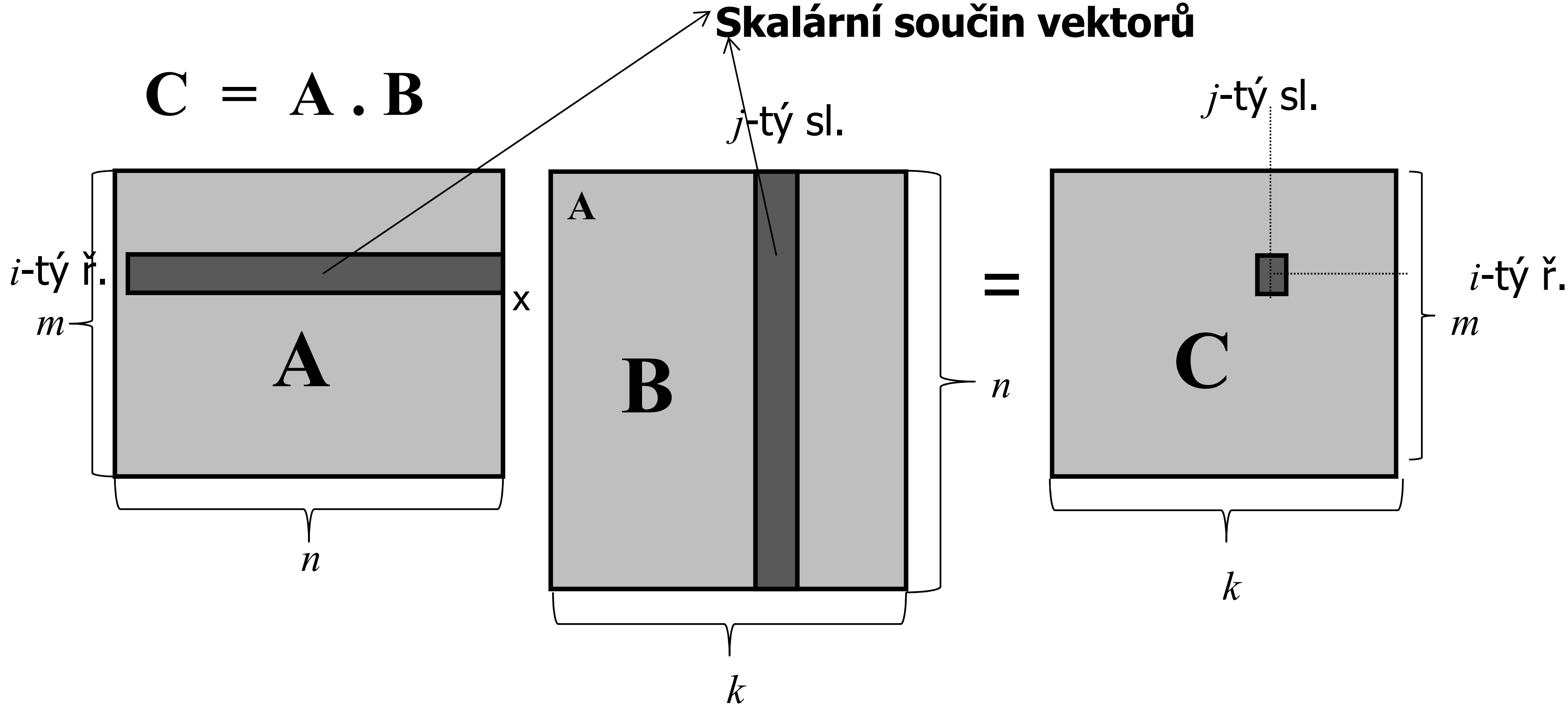
tzv. ***skalární součin vektorů***

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad , x_n] \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \text{„číslo“}$$

T — ***transpozice*** (otočení podle hlavní diagonály)

Násobení matic



$$(m\times n).(n\times k) = (m\times k)$$

Příklad 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 + 3.3 \\ 4.1 + 5.2 + 6.3 \\ 7.1 + 8.2 + 9.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Příklad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 + 3.3 & 1.3 + 2.2 + 3.1 \\ 4.1 + 5.2 + 6.3 & 4.3 + 5.2 + 6.1 \\ 7.1 + 8.2 + 9.3 & 7.3 + 8.2 + 9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 32 & 28 \\ 50 & 46 \end{bmatrix}$$

Příklad 3

$$\mathbf{A\,x = b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.x_1 + & 4.x_2 + & 7.x_3 \\ 2.x_1 + & 5.x_2 + & 8.x_3 \\ 3.x_1 + & 6.x_2 + & 9x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_1 + 4.x_2 + 7.x_3 = 10}$$

$$\boldsymbol{2.x_1 + 5.x_2 + 8.x_3 = 11}$$

$$\boldsymbol{3.x_1 + 6.x_2 + 9.x_3 = 12}$$

Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

— ***Jednotková matice***

(Jiné značení: „ $\boldsymbol{E}$ “)

Jednotková matice je neutrální vzhledem k násobení:

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$$

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice typu $n \times n$

(ekvivalentně: $\det A \neq 0$, popř. $\operatorname{hodnost} A = n$)

Potom má ***inverzní matici*** $\boldsymbol{A}^{-1}$, pro kterou platí:

Řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\mathbf{A\,x = b}$$ **(násobíme zleva $\mathbf{A^{-1}}$)**

$$\underbrace{\mathbf{A^{-1}A}}_{\mathbf{E}}\,\mathbf{x = A^{-1}b}$$

$$\mathbf{x = A^{-1}b}$$

Příklad 4

$$\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -11/3 & 13/3 & -5/3 \\ 10/3 & -11/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Příklad 4 …

Řešení:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -11/3 & 13/3 & -5/3 \\ 10/3 & -11/3 & 4/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Extrém funkce (maximum)

$f(x)$ ... reálná funkce definována na množině $X \subseteq \mathbf{R}^n$

výrobní program zisk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$\max\limits_{x \in X} f(x)$ ... maximální hodnota f na X

$\arg\max\limits_{x \in X} f(x)$ ... bod (vektor) nebo množina bodů (vektorů) z X v němž (kde) je dosažena maximální hodnota funkce f na X

Extrém funkce (minimum)

$f(x)$ ... reálná funkce definována na množině $X \subseteq \mathbf{R}^n$

$\min\limits_{x \in X} f(x)$ ... minimální hodnota f na X

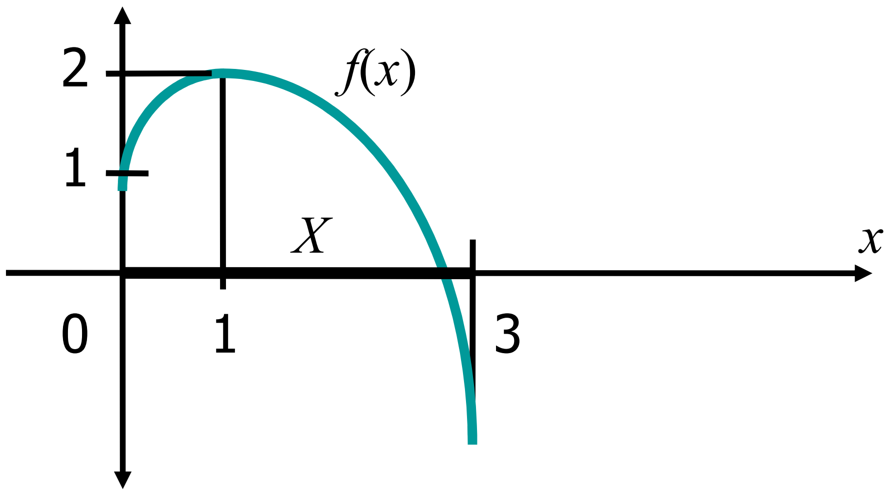
$\arg\min\limits_{x \in X} f(x)$ ... množina bodů z X v níž je dosažena minimální hodnota funkce f na X

Extrém funkce …

Příklad 5 a)

$$f(x) = 2 - (x-1)^2\,,\quad X = [0\,;\,3]$$

$$\max_{x\in X} f(x) = 2\,,\quad \arg\max_{x\in X} f(x) = \{1\}$$



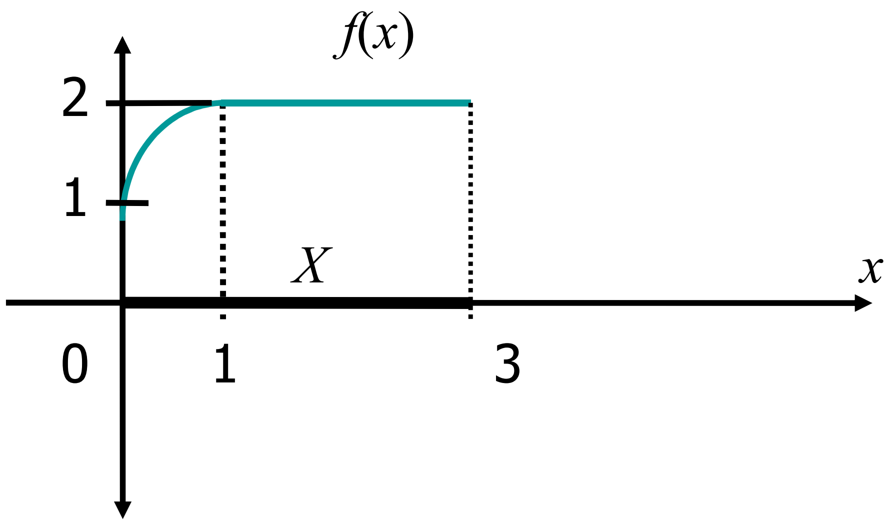
Extrém funkce …

Příklad 5 b)

$$f(x) = 2 - (x-1)^2\,,\;\; x \in [0\,,\,1] = X$$

$$= 1\,,\, x \in [1\,,\,3]$$

$$\max_{x \in X} f(x) = 2\,,\quad \arg\max_{x \in X} f(x) = [1\,,\,3]$$



$$\min_{x \in X} f(x) = 1$$

$$\arg\min_{x \in X} f(x) = \{0\}$$

Matematické programování

Základní úloha

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX}; \qquad (1)$$

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$
$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2)$$
$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Matematické programování

Základní úloha

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$ MAX; (1) účelová funkce

za podmínek

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\le b_1 \\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\le b_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\le b_m
\end{aligned}
$$

(2) omezující podmínky (mohou chybět)

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$ podmínky nezápornosti

Příklad 6

Nalezněte dvě kladná čísla s maximálním možným součinem, jejich součet je nejvýše 10:

$x_1 x_2 \rightarrow$ MAX;

$f(x_1, x_2) = x_1 . x_2$

za podmínek

$x_1 + x_2 \leq 10$

$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$x_1 \geq 0 \;, x_2 \geq 0$

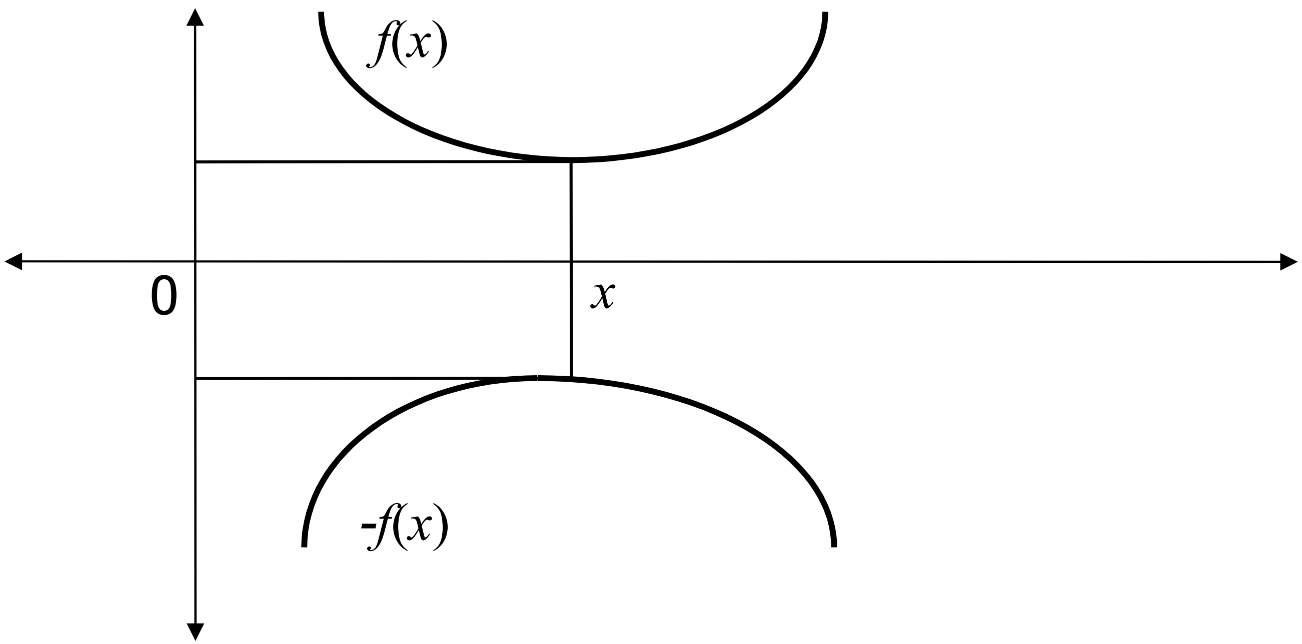
Řešení na semináři pomocí Excel – Řešitel

(Výsledek: $x_1^* = 5$, $x_2^* = 5$)

Základní úloha …

$\min f(x) = -\max -f(x)$

$x^* = \arg\min f(x) = \arg\max(-f(x))$



Převedení nerovností na rovnosti

přídatné proměnné*:* x_{n+1} , x_{n+2} , ... , x_{n+m} :

$$g_1(x_1, x_2, \dots ,x_n) + x_{n+1} = b_1$$
$$g_2(x_1, x_2, \dots ,x_n) + x_{n+2} = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g_m(x_1, x_2, \dots ,x_n) + x_{n+m} = b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = n+1, \dots, n+m$$

Převedení rovnice na nerovnost

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_j$$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_j \;, \quad g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_j$$

Příklad 6 – převedení omezujících podmínek na rovnosti

$x_1 x_2 \rightarrow$ MAX;

za podmínek

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Ověření na semináři pomocí Excel - Řešitel

Podmínka nezápornosti proměnných

Každé číslo x (neomezené ve znaménku) lze zapsat jako rozdíl dvou nezáporných čísel x^+ a x^- :

$$x = x^+ - x^-\,,$$

kde

$$x^+, x^- \geq 0$$

Lokální a globální extrémy

x^0 ... lokální **maximum** funkce $f(x)$ ...(lokální **minimum** funkce)
$\exists$ okolí U bodu x^0 : $\forall\ x \in U \subset X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

x^* ... globální **maximum** $f(x)$ ... (globální **minimum** funkce)
$\forall\ x \in X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)