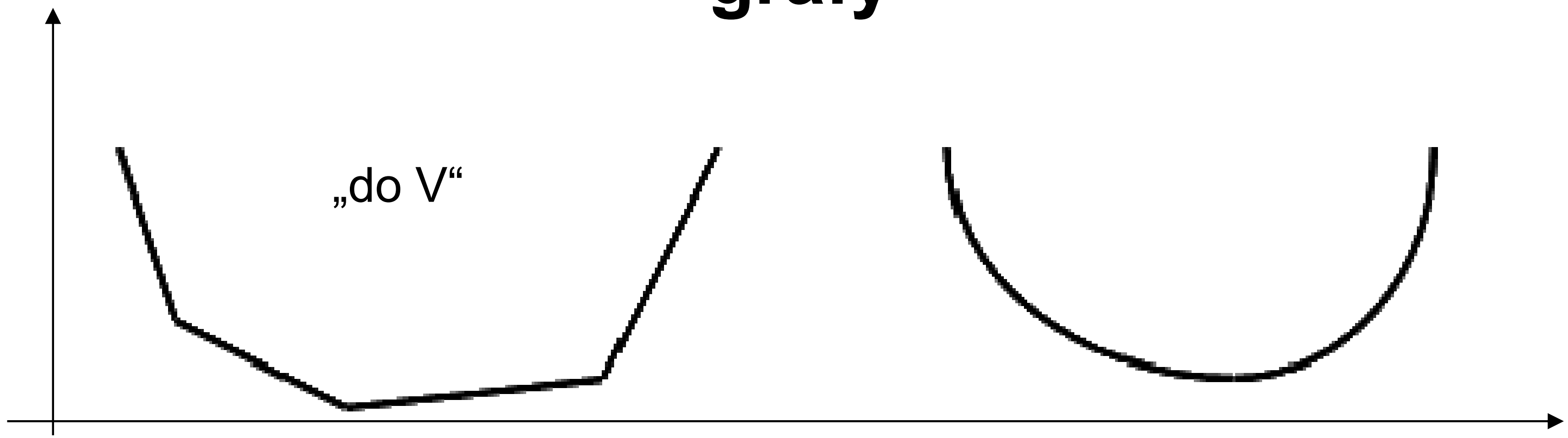
Ekonomicko-matematické metody 4

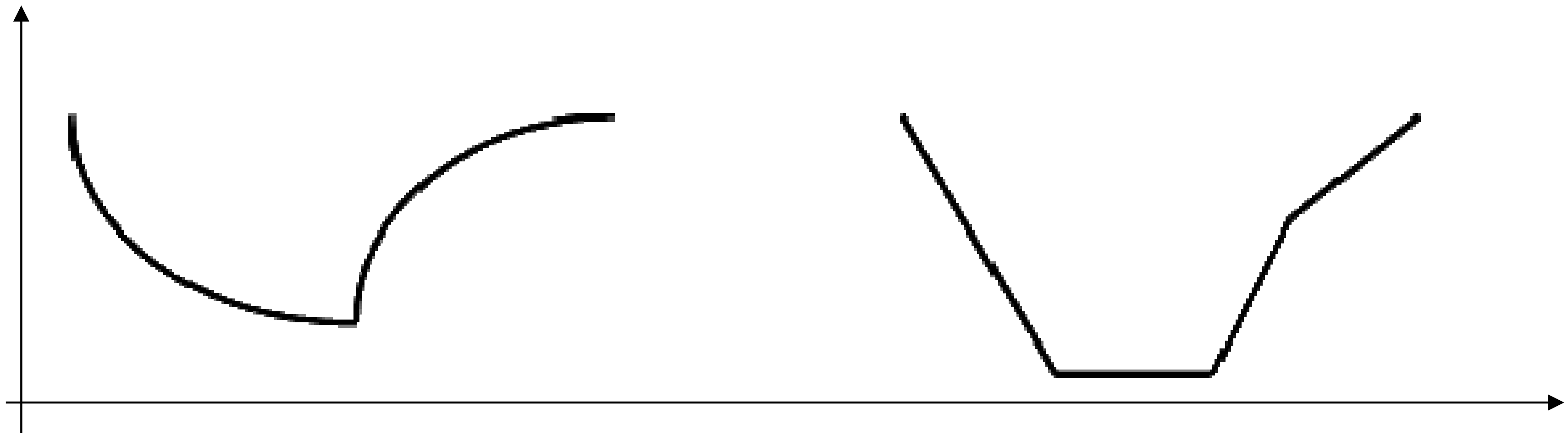
Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Konvexní a konkávní funkce v R^1…

grafy

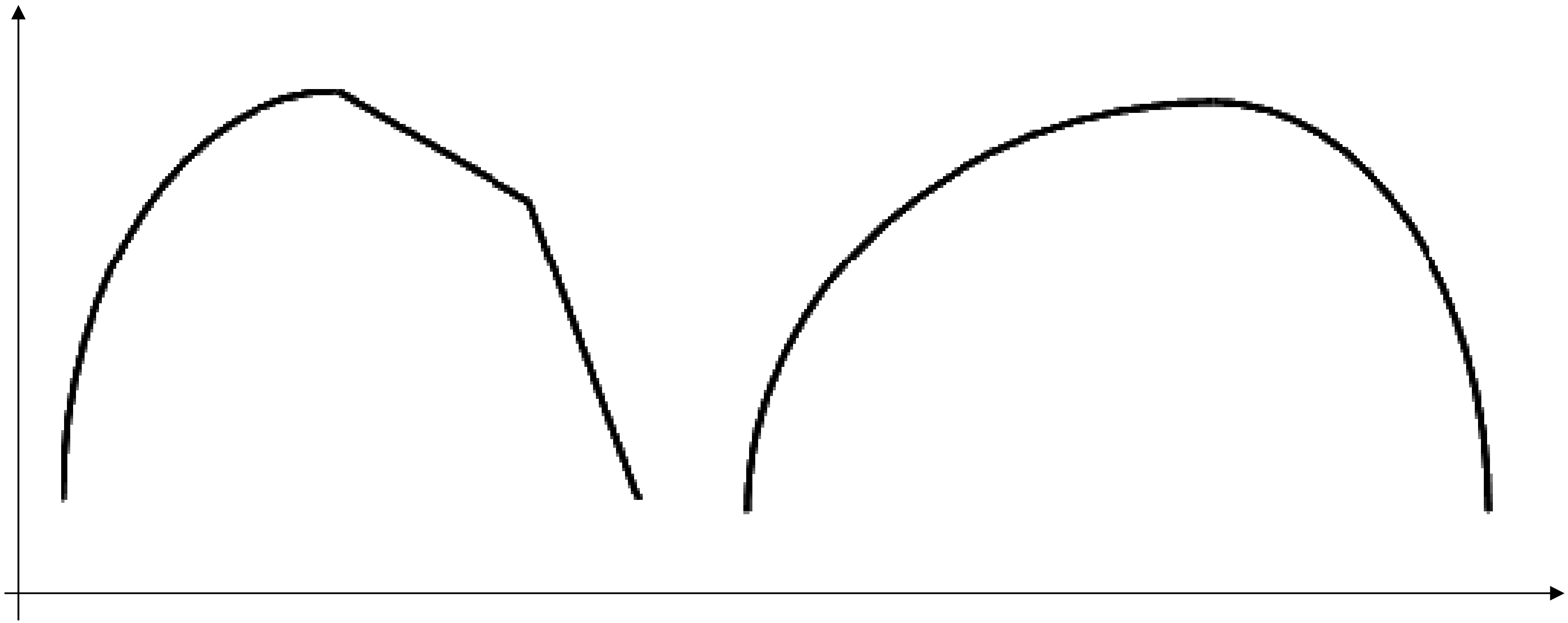


konvexní fce (nikoliv *ryze!*) **ryze konvexní fce (parabola)**



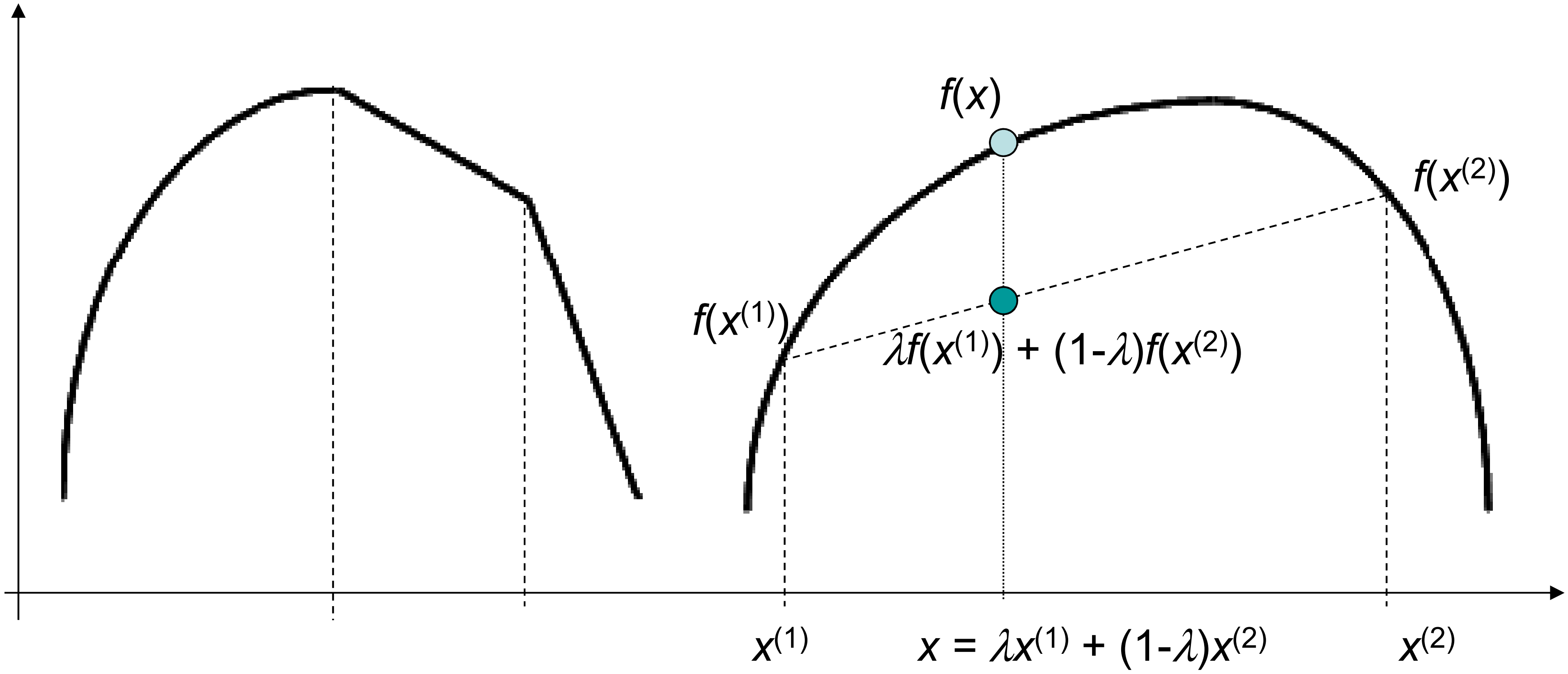
tyto funkce *nejsou* konvexní!!!

Konvexní a konkávní funkce v R^1



konkávní fce (nikoliv ryze!) **ryze konkávní funkce**

Konvexní a konkávní funkce
Jak to vyjádřit matematicky?



konkávní fce (nikoliv ryze!) **ryze konkávní funkce**

Konvexní a konkávní funkce
Jak to vyjádřit matematicky?

(konkávní)

Funkce f je ***konvexní*** na konvexní množině $X \subset \mathbf{R}^n$ jestliže pro každé dva body $x^{(1)}, x^{(2)}$ z X a pro každá dvě čísla $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ taková že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ platí:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}).$$

$(\geq)$

Anebo ekvivalentně:

… pro každé číslo $0 \leq \lambda \leq 1$, platí:

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}) \leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}).$$

$(\geq)$

Konvexní a konkávní funkce …

(ryze konkávní)

Funkce f je ***ryze konvexní*** na konvexní množině $X \subset \mathbf{R}^n$ jestliže pro každé dva body $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ z X a každá dvě čísla $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ taková že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ platí:

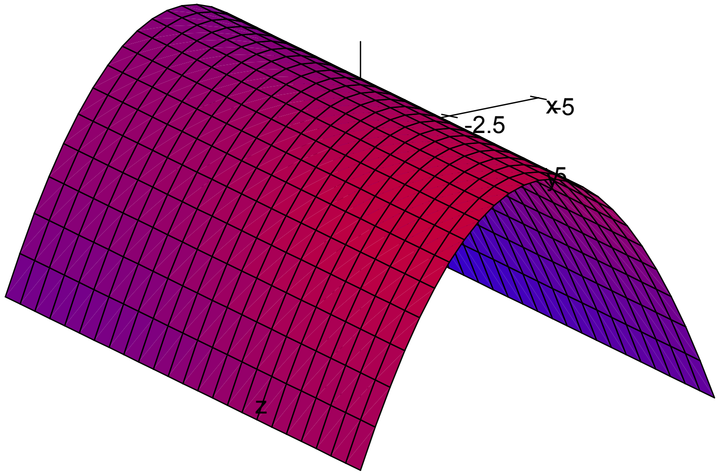
$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) < \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)})$$

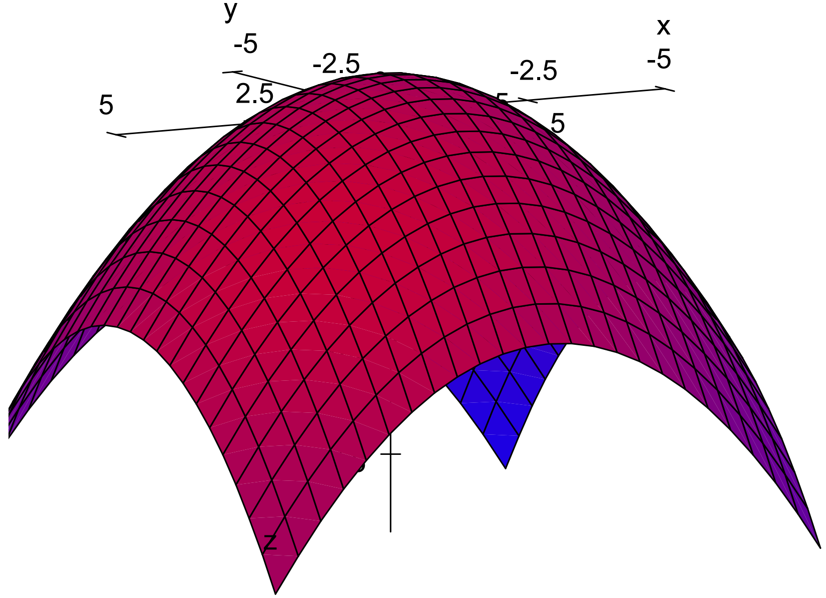
(>)

Zřejmě platí: Funkce f je na $X \subset R^n$ konkávní (resp. ryze konkávní) jestliže je funkce $-f$ konvexní (resp. ryze konvexní)

Poznámka: Zobecnění pro funkce n proměnných

Konvexní a konkávní funkce v R^2





$$f(x_1, x_2) = 5 - x_1^2$$

konkávní fce (nikoliv ryze!)

$$f(x_1, x_2) = 3 - x_1^2 - x_2^2$$

ryze konkávní funkce

Konvexní a konkávní funkce …

„Lokální extrémy jsou zároveň globální!!!“

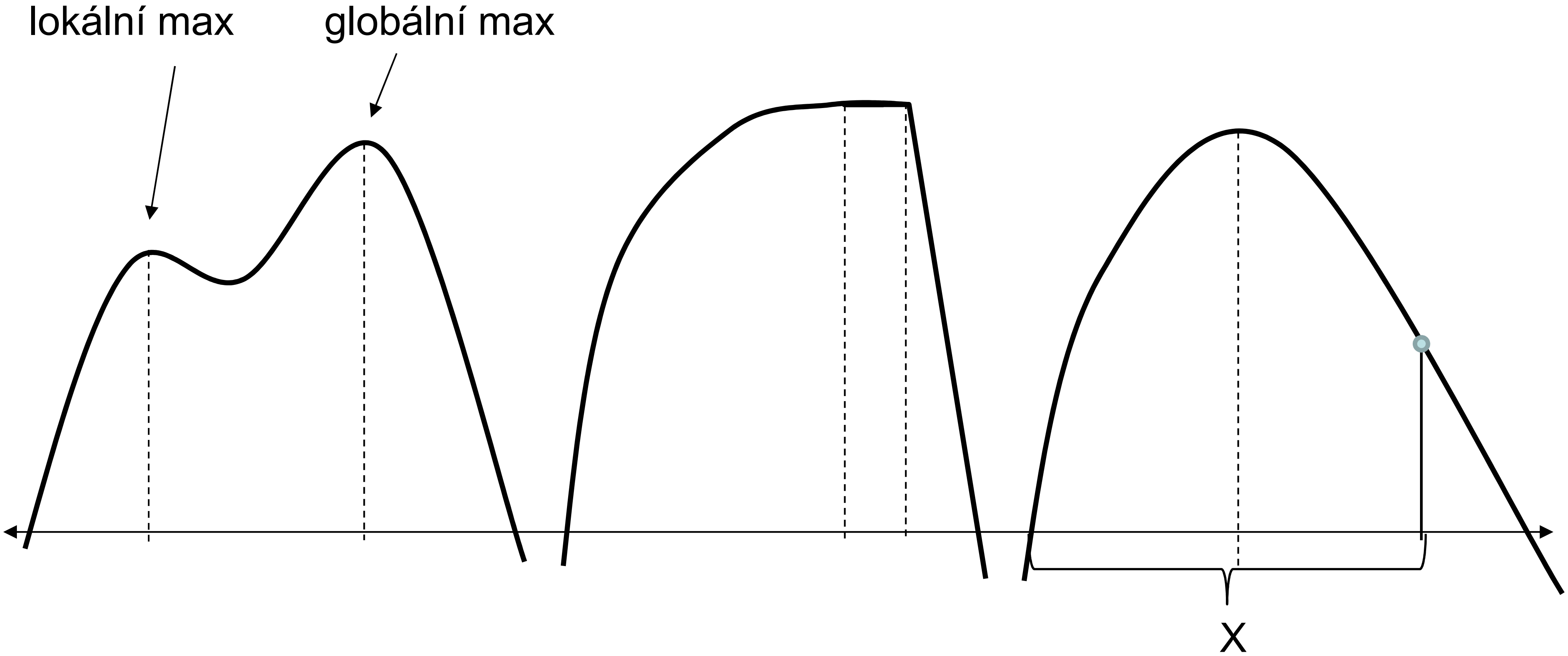
Věta 3: Jestliže x^0 je **lokální** maximum funkce $f(x)$ na X a funkce $f(x)$ je **konkávní** na X, potom x^0 je **globálním** maximem funkce $f(x)$ na X, tj. $x^0 = \arg\max_{x \in X} f(x)$

Je-li $f(x)$ navíc **ryze** konkávní na X, potom x^0 je ***jediným*** globálním maximem.

Poznámka 1: Analogicky pro lokální minimum a konvexní funkci…

Poznámka 2: Pozor, neplatí pro lokální **maximum** a **konvexní** funkci, resp. lok. **minimum** a **konkávní** funkci!!!

Příklad k Větě 3:



není konkávní funkce

konkávní fce

ryze konkávní fce

Konvexní a konkávní funkce …

Věta 4: $g_j(x)$ je **konvexní funkce** na $X \subset R^n$, $b_j \in \mathbf{R}^1$

potom (omezující podmínka)

$Z_j = \{x \in X \mid g_j(x) \leq b_j\}$ je **konvexní množina**

Poznámka 1: Průnik konvexních množin je konvexní množina! (Více omezujících podmínek!)

Poznámka 2: **Lineární funkce** je **zároveň** konvexní i konkávní! (nikoliv ryze!!!)

Jak poznáme, že je funkce konvexní v X ?

v $\mathbf{R}^1$ (matematika 1. ročník) : $f''(x) > 0$ pro $\forall\, x \in X$

v $\mathbf{R}^n$: pozor!!! parciální derivace:

$$\boldsymbol{H} = \{h_{ij}\} = \left\{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\} = \{\nabla^2 f(x)\}$$

Hessova matice (**Hessián**) je **pozitivně definitní (PD)**

Sylvestrova podmínka:

Jestliže všechny hlav. subdeterminanty jsou kladné, potom H je PD.

Konvexní a konkávní funkce …

Věta 5: Funkce $f(x)$ je konvexní na X , jestliže všechny hlavní subdeterminanty Hessovy matice jsou kladné (pro všechna $x \in X \subset \mathbf{R}^n$)

Věta 6: $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou konvexní funkce na množině X, α_1, α_2 - nezáporné konstanty (tj.≥ 0), potom funkce

$$g(x) = \alpha_1 . f_1(x) + \alpha_2 . f_2(x)$$

je konvexní funkce na $X \subset \mathbf{R}^n$

Příklad 1:

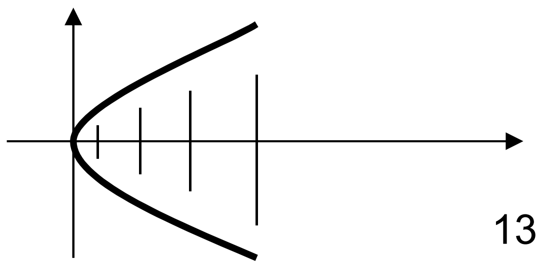
$$f(x,y) = 2x^2 + xy^2 + 3y^3 \qquad \nabla f(x) = 4x + y^2,\ 2xy + 9y^2$$

1. $\det [4] = 4 > 0$

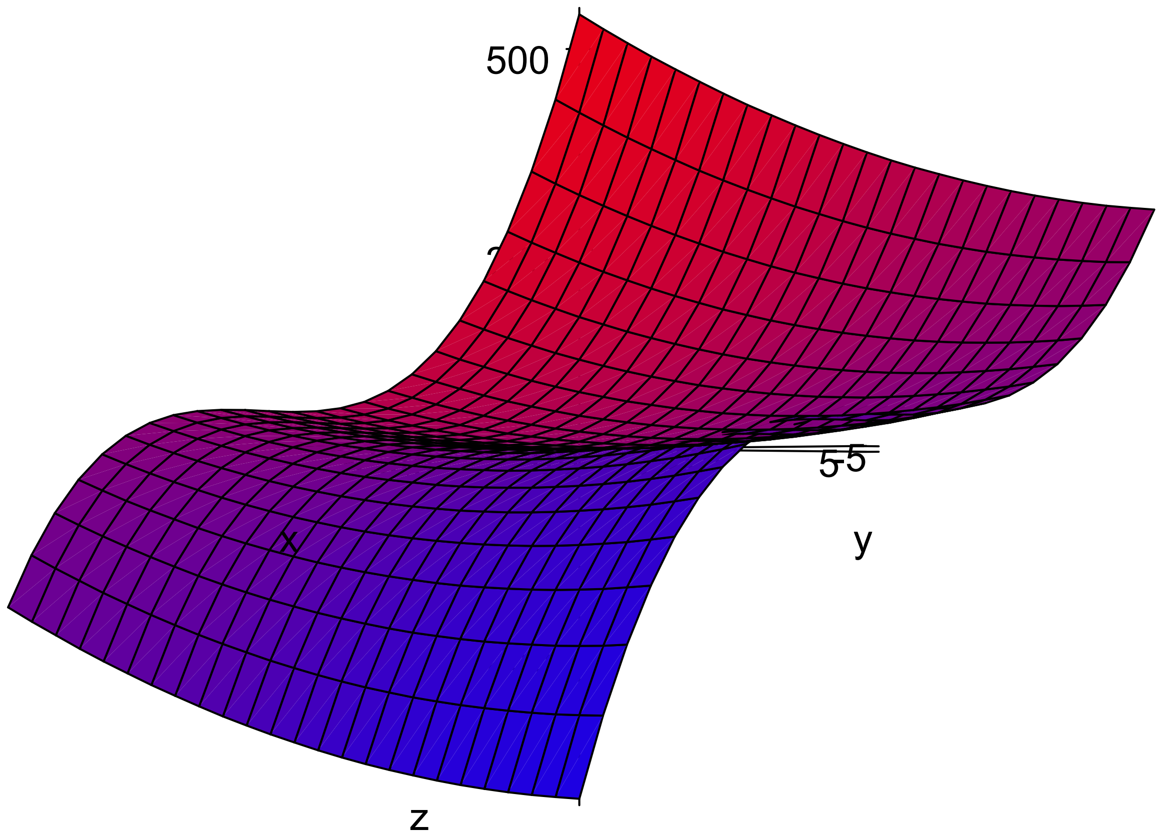
$$\boldsymbol{H} = \{\nabla^2 f(x)\} = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 2y \\ 2y & 2x+18y \end{bmatrix}$$

2. $\det \begin{bmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x+18y \end{bmatrix} = 8x + 72y - 4y^2 > 0$

f je konvexní na $X = \{(x,y) \mid 2x + 18y - y^2 > 0\}$ – vnitřek paraboly



Příklad 1 – pokrač.



Úloha matematického programování

tzv. úloha (1) , (2)

účelová funkce

$$f(x_1, x_2, \dots ,x_n) \rightarrow \text{MAX}; \qquad (1)$$

za podmínek

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots ,x_n) &\leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots ,x_n) &\leq b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots ,x_n) &\leq b_m \\ x = (x_1, x_2, \dots ,x_n) &\geq 0 \end{aligned}\right\} X \qquad (2)$$

omezující podmínky

(mohou chybět)

podmínky nezápornosti

Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \text{MAX};$$

za podmínek

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,n$$

f – funkce užitku (konkávní)

n – počet statků

p_i – cena jednotky i-tého statku

x_i – množství i-tého statku

b - důchodové omezení spotřebitele ($b > 0$)

Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 . x_2} \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \,,\, j = 1,2.$$

- funkce užitku f je konkávní, omezení je lineární (tj. konvexní)
- 2 statky, jednotkové ceny statků = 2, resp. 3
- důchodové omezení = 6

Úloha matematického programování ...

f je konkávní, g_i jsou konvexní funkce na $X \subset \mathbf{R}^n$:
Potom (1), (2) je **úlohou konvexního programování**

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ je **přípustné řešení** úlohy (1), (2) jestliže splňuje nerovnosti (2)
- $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X$ je **optimální řešení** úlohy (1), (2) jestliže je zároveň přípustné a $x^* = \arg\max f(x)$
tj. pro všechna $x \in X$ platí: $f(x) \leq f(x^*)$

- Speciální případ: f , g_i - lineární funkce, tj.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \ldots + a_{ni} x_n - b_i$$

Teorie sedlových bodů

- **Lagrangián úlohy (1), (2):**

Lagrangeovy multiplikátory

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} y_j (b_j - g_j(\mathbf{x}))$$

- (**Nezáporný) sedlový bod Lagrangiánu úlohy (1), (2)**:

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ přičemž $\bar{\boldsymbol{x}} \geq 0$, $\bar{\boldsymbol{y}} \geq 0$ a platí:

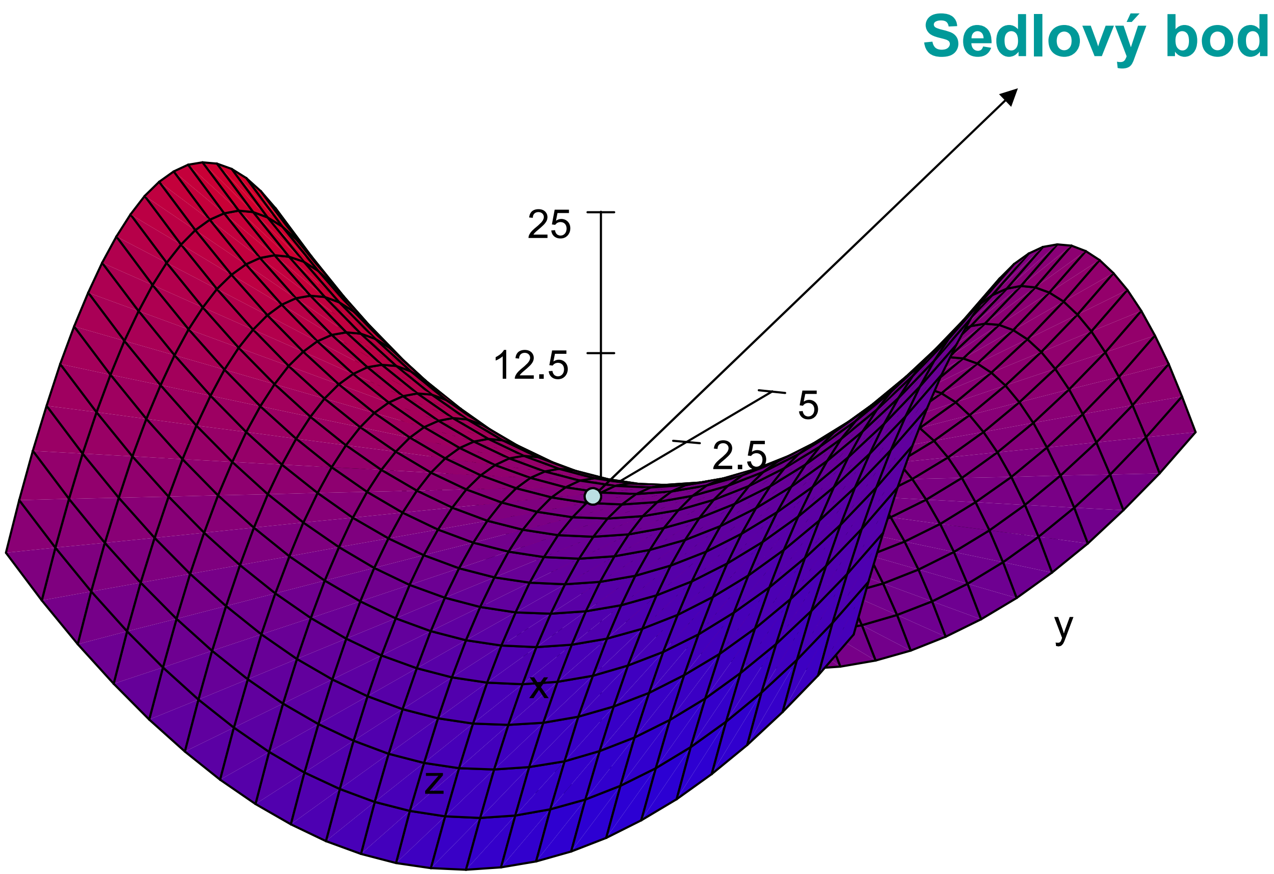
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) \leq \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \leq \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \qquad (3)$$

pro všechna $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

- **Poznámka:**
Pozor!!! $\bar{x}, \bar{y}$ jsou vektory, tj. $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{x}}_n)$
$\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{\boldsymbol{y}}_1, \bar{\boldsymbol{y}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{y}}_m)$

Teorie sedlových bodů

Sedlový bod funkce $f(x,y) = -x^2y^2$



Teorie sedlových bodů

Věta 7:

Jestliže $\bar{\boldsymbol{x}}$,$\bar{\boldsymbol{y}}$ je nezáporný sedlový bod Lagrangiánu úlohy (1), (2),

tj. $\bar{\boldsymbol{x}} \geq 0$, $\bar{\boldsymbol{y}} \geq 0$,

potom $\bar{\boldsymbol{x}} = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f(x)$, tj. $\bar{\boldsymbol{x}}$ je optimálním řešením úlohy (1), (2)

Poznámka 1: Sedlový bod je optimálním řešením úlohy (1),(2)

Poznámka 2: Když $\bar{\boldsymbol{x}}$ je optimálním řešením úlohy (1), (2), potom nemusí ještě existovat $\bar{\boldsymbol{y}}$ takový, že $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$ je nezáporný sedlový bod Lagr. (1), (2)

Teorie sedlových bodů

Postačující podmínka pro existenci sedlového bodu

Věta 8: Jestliže $\bar{x} \geq 0$ je optimálním řešením úlohy (1),(2) a $\boldsymbol{f}$ je konkávní, $\boldsymbol{g_j}$ jsou konvexní funkce na $\boldsymbol{X}$

existuje bod $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \mathbf{R}^n$, takový, že platí

$\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) < b_i$ pro všechna i pro která je $\boldsymbol{g_i}$ nelineární

(tzv. **podmínka regularity, Slaterova)**

potom existuje $\bar{y} \geq 0$ takové, že

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ je nezáporným sedlovým bodem Lagrangiánu úlohy (1), (2):

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} y_j (b_j - g_j(\boldsymbol{x}))$$

Teorie sedlových bodů
(tzv. Kuhn-Tuckerův teorém)

Věta 9:

f je konkávní, g_j jsou konvexní diferencovatelné funkce potom $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ je sedlovým bodem Lagrangiánu F úlohy (1), (2), právě když platí:

(*)

$$\nabla_x F(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \leq 0 \qquad \nabla_y F(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \geq 0$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T \nabla_x F(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0 \qquad \bar{\boldsymbol{y}}^T \nabla_y F(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} \geq 0 \qquad \bar{\boldsymbol{y}} \geq 0$$

tzv. **Kuhn - Tuckerovy podmínky**

Poznámka:

K.-T. podmínky umožňují nalézt sedlový bod řešením soustavy nerovností (*), což je **zobecněná podmínka „nulovosti gradientu**“

Příklad 2: Výroba „racio“ pokrmů

(úloha lineárního/kvadratického programování)

(1) Jednotkový zisk nezávisí na množství produkce:

$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow$ MAX; „zisk“

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \leq 270 \quad \text{„rýže“}$$

$$0{,}5\,x_2 \leq 100 \quad \text{„pšenice“}$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \leq 60 \quad \text{„vločky“}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

(2) Jednotkový zisk roste s růstem produkce:

$z = (2000 + x_1)\,x_1 + (3000 + 8x_2)\,x_2 =$

$= 2000\,x_1 + 3000\,x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 \rightarrow$ MAX; „zisk“

za podmínek (stejných!)

Příklad 2 - pokrač.1:

(úloha nelineárního - kvadratického programování)

$$z = 2000\,x_1 + 3000\,x_2 + x_1^{\,2} + 8x_2^{\,2} \rightarrow \text{MAX}; \qquad (1^*)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 &\leq 270 \quad \text{„rýže“} \\ 0{,}5\,x_2 &\leq 100 \quad \text{„pšenice“} \qquad (2^*) \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 &\leq 60 \quad \text{„vločky“} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

…to je úloha nekonvexního (kvadratického) programování

Lagrangián úlohy (1*), (2*):

$$F(x_1, x_1, y_1, y_2, y_3) = 2000\,x_1 + 3000\,x_2 + x_1^{\,2} + 8x_2^{\,2}$$
$$+\, y_1(270 - 0{,}9x_1 - 0{,}3\,x_2) + y_2(100 - 0{,}5\,x_2) + y_3(60 - 0{,}1x_1 - 0{,}2\,x_2)$$

Příklad 2 - pokrač.2:

Lagrangián úlohy (1*), (2*):

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2000\, x_1 + 3000\, x_2 + x_1^2 + 8x_2^2$$
$$+\, y_1(270 - 0{,}9x_1 - 0{,}3\, x_2) + y_2(100 - 0{,}5\, x_2) + y_3(60 - 0{,}1x_1 - 0{,}2\, x_2)$$

K.T. podmínky:

$\partial F/\partial x_1 = 2000 + 2x_1 - 0{,}9y_1 - 0{,}1y_3 \leq 0$

$\partial F/\partial x_2 = 3000 + 16x_2 - 0{,}3y_1 - 0{,}5y_2 - 0{,}2y_3 \leq 0$

$\partial F/\partial y_1 = 270 - 0{,}9x_1 - 0{,}3x_2 \geq 0$

$\partial F/\partial y_2 = 100 - 0{,}5x_2 \geq 0$

$\partial F/\partial y_3 = 60 - 0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 \geq 0$

$x_i \geq 0,\ y_j \geq 0,\ i = 1{,}2.\ j = 1{,}2{,}3.$

+ podmínky komplementarity.

Příklad 2 - pokrač. 3:

Podmínky komplementarity:

$$x \cdot \nabla_x F(x,y) = x_1 \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_1} + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_n} = 0$$

Máme:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x_j} \leq 0$ a současně $x_j \geq 0$, tudíž $x_j \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_j} = 0$

Druhá podmínka komplementarity:

$$y \cdot \nabla_y F(x,y) = y_1 \cdot \left(b_1 - g_1(x)\right) + \cdots + y_m \cdot \left(b_m - g_m(x)\right) = 0$$

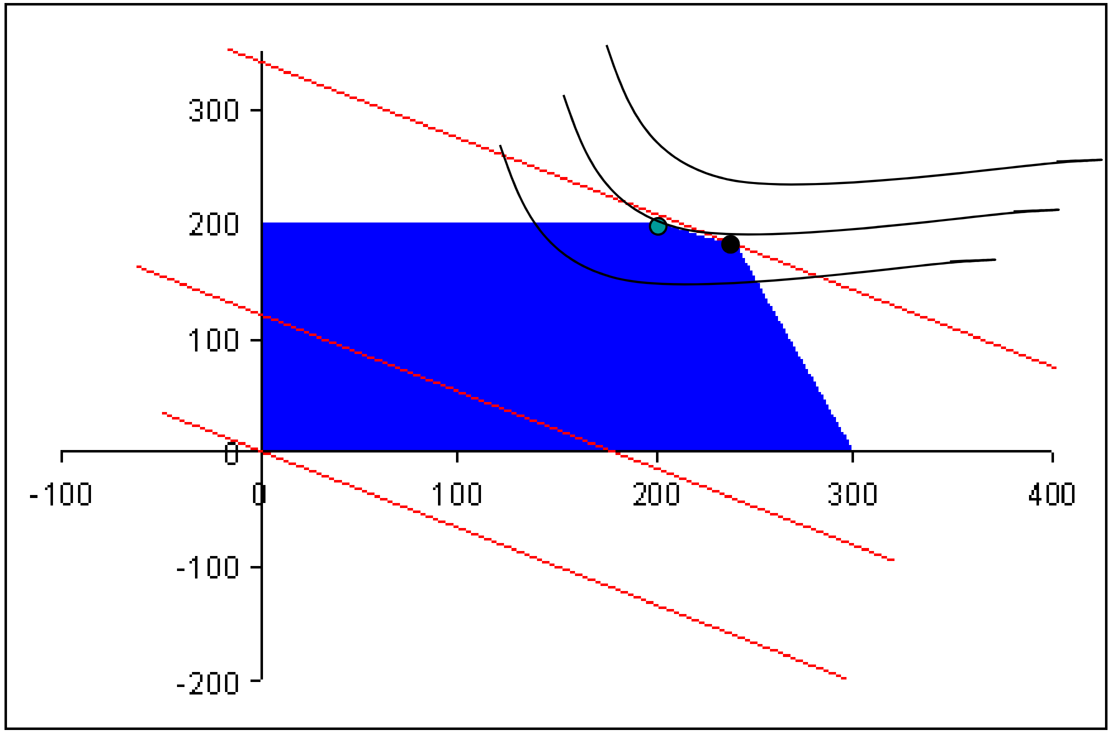
Máme:

$b_i - g_i(x) \geq 0$ a současně $y_i \geq 0$, tudíž $y_i \cdot \left(b_i - g_i(x)\right) = 0$

Příklad 2 - pokrač. 4:

Řešení úlohy (1), (2): $x_1 = 240, \quad x_2 = 180$, $z = 1020000$

Řešení úlohy (1*), (2*): $x_1^* = 200, \; x_2^* = 200, \; z^* = 1\,360\,000$



$y_1^* = 0$

$y_2^* = 2\,800$

$y_3^* = 24\,000$

Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,n$$

f – funkce užitku (konkávní)

n – počet statků

p_i – cena jednotky i-tého statku

x_i – množství i-tého statku

b - důchodové omezení spotřebitele ($b > 0$)

Maximalizace užitku spotřebitele
Kuhn-Tuckerovy podmínky

K.T. podm.:

$$\nabla_x F(\boldsymbol{x}, y) \le 0 \qquad \nabla_y F(\boldsymbol{x}, y) \ge 0$$

$$\boldsymbol{x}^T \nabla_x F(\boldsymbol{x}, y) = 0 \qquad y\, \nabla_y F(\boldsymbol{x}, y) = 0$$

$$\boldsymbol{x} \ge 0 \qquad y \ge 0$$

Lagrangián:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n - b)$$

$$F(\boldsymbol{x}, y) = f(\boldsymbol{x}) - y\,(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} - b)$$

K.T. podm.:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \le y\, \boldsymbol{p}^T \qquad \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \le b$$

$$\boldsymbol{x}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) = y\, \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \qquad y\, \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} = y\, b$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \qquad y \ge 0$$

Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = x_1 . x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \; , \; j = 1,2.$$

K.T. podm.:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \leq y\, \boldsymbol{p}^T \qquad \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \leq b$$

$$\boldsymbol{x}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) = y\, \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \qquad y\, \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} = y\, b$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \qquad y \geq 0$$

Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = x_1 . x_2 \to \text{MAX};$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \text{ , } j = 1,2.$$

K.T. podm.:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \leq y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 \leq y \\ x_1 \leq y \end{matrix}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 x_2 = y(x_1 + x_2)$$

$$y(x_1 + x_2 - 6) = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Řešení:

$$x_1^* = x_2^* = y^* = 3$$

$$f(x_1^*, x_2^*) = 9$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky a dualita v LP …

Lagrangián k (P):

$$F(x,y) \;=\; c^{\mathrm{T}}x + y^{\mathrm{T}}(b - Ax)$$

K.T. podmínky (*) a (**):

$$\nabla_x F(x,y) = c - A^{\mathrm{T}}y \le 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A^{\mathrm{T}}y \ge c}$$
$$\nabla_y F(x,y) = b - A\,x \ge 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A\,x \le b}$$
$$x^{\mathrm{T}}\,\nabla_x F(x,y) = x^{\mathrm{T}}(c - A^{\mathrm{T}}y) = 0$$
$$y^{\mathrm{T}}\,\nabla_y F(x,y) = y^{\mathrm{T}}\,(b - A\,x) = 0$$
$$x \ge 0\,,\; y \ge 0$$