Ekonomicko-matematické metody 5

přednáší

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Úlohy lineárního programování (LP)

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP v kanonickém tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Primární úloha LP v kanonickém tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \max$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná

respektive

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Úlohy LP v kanonickém tvaru

Každou úlohu LP lze převést na kanonický tvar (P) resp. (D) pomocí obvyklých úprav:

- Podmínky $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $\boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{Cx} \geq \boldsymbol{d}$
  respektive
  podm. $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ napíšeme jako $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \geq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$
- Podmínky $\boldsymbol{Cx} \geq \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $-\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$
  respektive
  podmínky $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ napíšeme jako $-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \geq -\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$

Ekonomická interpretace duální proměnné

Význam duálních proměnných $y_1, \ldots, y_m$ v uvažované úloze stanovení optimálního výrobního programu při míchání směsí:

Jsou to tzv. *stínové ceny* (angl. *shadow prices*) jednotlivých zdrojů resp. vstupních surovin číslo
$i = 1, \ldots, m$.

Jestliže i-té suroviny je dostatek ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b_i$), potom její duální cena je nulová ($y_i = 0$).

Jestliže i-tá surovina se výrobou vyčerpá ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$), potom její duální cena je obvykle (!) kladná ($y_i > 0$).

Ekonomická interpretace duální proměnné II

Význam hodnoty duální proměnné y_i:

Jestliže $y_i > 0$, znamená to, že i-tá surovina se vyčerpala, a proto již není možné vyrobit více výrobků (směsí).

Jestliže i-tou surovinu je možné nakoupit na vnějším trhu, pak hodnota y_i představuje horní mez ceny, za kterou se vyplatí surovinu nakoupit (je-li dražší, zvýšení výroby nepřinese zisk).

Úlohy LP v kanonickém tvaru

Každou úlohu LP lze převést na kanonický tvar (P) resp. (D) pomocí obvyklých úprav:

- Proměnnou $x \in \mathbb{R}$ neomezenou ve znaménku napíšeme jako $x = x^+ - x^-$, kde $x^+, x^- \geq 0$.

  (V případě proměnné $y \in \mathbb{R}$ obdobně.)

- Cílovou funkci $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$ napíšeme jako $-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$ respektive cílovou funkci $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \max$ napíšeme jako $-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$

Důsledky věty o slabé dualitě $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$

- Jestliže $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D) taková, že $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$,
  potom obě řešení **jsou optimálními řešeními** obou úloh.

- Jestliže úloha (P) není omezená shora
  ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ při splnění $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$),
  potom úloha (D) **není přípustná**.

- Jestliže úloha (D) není omezená zdola
  ($\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow -\infty$ při splnění $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \ge \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$),
  potom úloha (P) **není přípustná**.

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Jestliže úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$, potom úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

- Jestliže úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$, potom úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

respektive

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Úloha (P) má optimální řešení právě tehdy, když úloha (D) má optimální řešení.

  To jest, optimální řešení mají
  - buď obě úlohy současně,
  - anebo žádná z nich.

- Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom jejich optimální hodnoty se rovnají.

Důsledek všech uvedených tvrzení

Pro úlohy (P) a (D) nastává právě jedna z následujících možností:

- obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné, mají optimální řešení a platí rovnost optimálních hodnot,
- úloha (P) není přípustná a úloha (D) není omezená zdola,
- úloha (D) není přípustná a úloha (P) není omezená shora,
- obě úlohy (P) a (D) jsou nepřípustné.

Úlohy LP v norm. a std. tvaru

Každou úlohu LP lze převést na normální (P) a standardní (D) tvar pomocí úprav, které už známe, a přidáme:

- Podmínky $\boldsymbol{Cy} \leq \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $\boldsymbol{Cy} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{d}$ neboli $\boldsymbol{Cy} + \boldsymbol{Is} = \boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice a $\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$ jsou nové proměnné (angl. slack variables)

Úlohy lineárního programování (LP)

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \min$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Úlohy LP ve standardním tvaru - příklad

Převeďte následující optimalizační úlohu (úloha 4-1) na standardní tvar:

$6\,x_1 + 3\,x_2 \rightarrow \text{MAX};$

při omezeních

$4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20\,,$
$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 22\,,$
$x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0\,.$

Řešení:

$6\,x_1 + 3\,x_2 \rightarrow \text{MAX};$

při omezeních

$4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 20\,,$
$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 = 22\,,$
$x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\,,\; x_4 \geq 0.$

Nakonec uveďme ještě vektorový tvar úlohy LP ve standardní formě

$$c^T x \rightarrow MAX; \qquad (5\text{-}7)$$

při omezeních

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \qquad (5\text{-}8)$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \qquad (5\text{-}9)$$

Základní pojmy LP

V následující analýze vlastností úloh LP budeme označovat množinu všech přípustných řešení úlohy LP (5-7) až (5-9) symbolem X, tj.

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \tag{5-10}$$

a množinu všech optimálních řešení této úlohy, tj. množinu všech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subset \mathbf{R}^n$, kde účelová funkce nabývá svého (globálního) maxima, symbolem X^*.

Přípustné řešení: každý vektor x, který splňuje podmínky:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,.$$

Optimální řešení: každý vektor x, pro který je účelová funkce maximální.
Značení: X^*.

Základní pojmy LP

Uvažujme maximalizační úlohu lineárního programování:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

na množině zadané soustavou lineárních nerovnic:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m,
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,$$

Každou z nerovnic tvořících vlastní omezení úlohy převedeme na rovnici tak, že k levé straně přičteme novou nezápornou proměnnou. Celkem tedy zavedeme dalších m proměnných, označme je $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. Tyto proměnné se nazývají doplňkové proměnné a vyjadřují rozdíl mezi levou a pravou stranou původních nerovností.

Základní pojmy LP

Původní úlohu jsme tedy převedli na úlohu:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

na množině zadané soustavou lineárních rovnic:

$$
\begin{array}{llllllll}
 & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = & b_1 \\
(4) & a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = & b_2 \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = & b_m,
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$$

Základní pojmy LP

Řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ soustavy (4) nazýváme bazickým řešením, jestliže

- $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0$,
- n (z celkového počtu $n+m$) proměnných je nulových
- sloupce matice soustavy (4) odpovídající zbývajícím m proměnným jsou lineárně nezávislé (tj. je možné je ekvivalentními úpravami převést na jednotkovou matici). Tyto proměnné nazýváme bazické proměnné.

Bazické řešení se nazývá degenerované, jestliže jsou nulové i některé bazické proměnné.

Tedy např. vektor, jehož složky jsou

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ ,\ x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \ldots\ ,\ x_{n+m} = b_n,$$

je bazické řešení soustavy (4), přičemž bazické proměnné jsou $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ (sloupce odpovídající těmto proměnným tvoří jednotkovou matici a jsou tedy lineárně nezávislé).

Simplexová metoda (algoritmus)

Autor: G. Dantzig (1947).

Simplexový algoritmus efektivně prohledává tzv. základní (bazická) řešení úloh lineárního programování, kterých je konečný počet a hledá mezi nimi řešení optimální.

Optimální řešení je takové základní řešení, které poskytuje nejlepší hodnotu účelové funkce.

Metoda souvisí s vlastnostmi polytopu v *N* dimenzionálním prostoru. Řešená úloha je tak i graficky interpretovatelná – hledají se co nejvzdálenější vrcholy polytopu.

Simplexová metoda

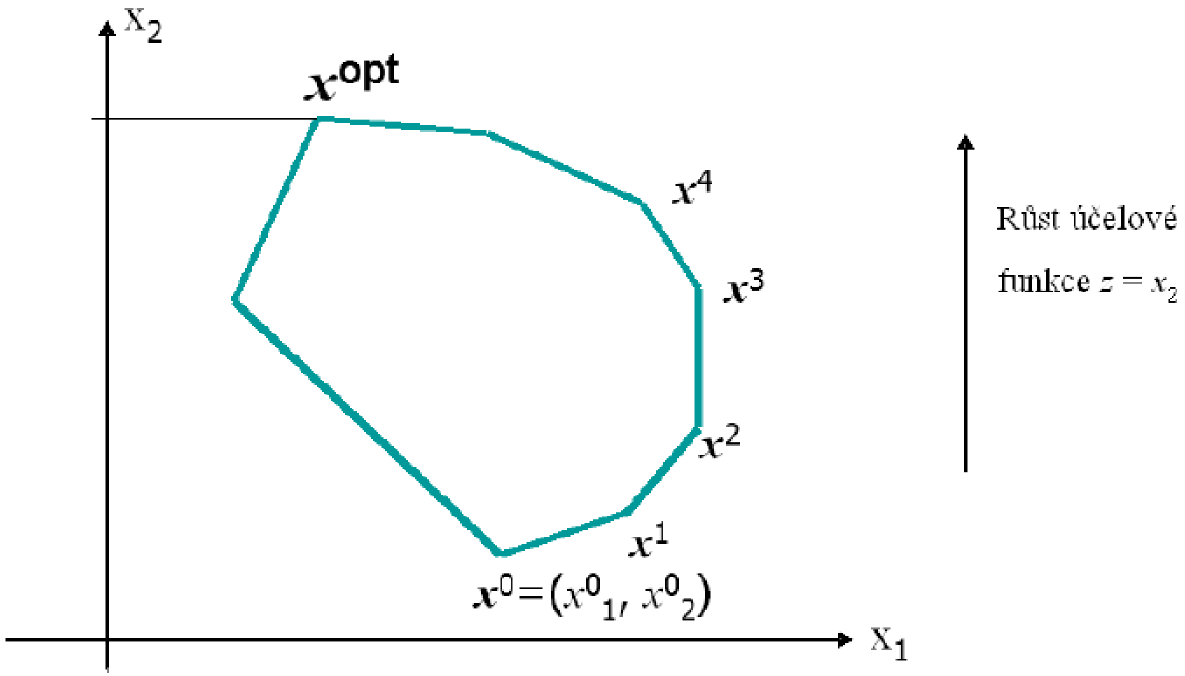
Simplexová metoda je iterační výpočetní postup pro nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování (pokud takové řešení existuje). Výchozím bodem tohoto algoritmu je nalezení výchozího základního řešení úlohy lineárního programování. Pokud je již takové řešení k dispozici, potom simplexová metoda v jednotlivých krocích vypočte vždy nové základní řešení s lepší nebo alespoň stejnou – v případě maximalizace vyšší – hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků musí tedy tento výpočetní postup vést k nalezení základního řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce nebo ke zjištění, že takové řešení neexistuje. Při jeho nalezení se musí podle základní věty LP – Věty 5-1 jednat o řešení optimální.

Postup výpočtu pomocí simplexové metody se někdy dělí na dvě fáze

I. nalezení výchozího základního řešení,
II. iterační postup vedoucí k optimalizaci účelové funkce.

V některých speciálních případech je nalezení výchozího základního řešení natolik snadné, že I. fáze výpočtu vlastně odpadá. V takovém případě se celý postup označuje jako **jednofázová simplexová metoda**. V obecném případě nemusí být však nalezení výchozího základního řešení úlohy LP jednoduché. Potom mluvíme o **dvoufázové simplexové metodě**.

Simplexová metoda



Simplexová metoda

Danou úlohu jsme tedy převedli na úlohu najít takové bazické řešení soustavy pro které je odpovídající hodnota účelové funkce $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ maximální. Hodnotu účelové funkce můžeme přidat do soustavy jako další proměnnou:

Rovnici $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ přepíšeme do tvaru

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + z = 0$$

a přidáme k soustavě (4):

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
 & \vdots & & & & & & \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n & & & + x_{n+m} & & = b_m, \\
-c_1x_1 - & c_2x_2 - \cdots - & c_nx_n & & & & +z & = 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$$

Simplexová metoda

Koeficienty získané soustavy zapíšeme do tabulky:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
				$\vdots$					
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0

Toto je tzv. výchozí simplexová tabulka a můžeme z ní vyčíst výchozí bazické řešení:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ ,\ x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \ldots\ ,\ x_{n+m} = b_n.$$

V levém sloupci vidíme bazické proměnné a proměnnou z, v pravém sloupci vidíme hodnotu bazických proměnných a hodnotu proměnné z (tj. hodnotu účelové funkce). Ostatní proměnné nejsou bazické a klademe je rovny nule. Toto výchozí přípustné řešení odpovídá vrcholu $(0, 0, \ldots, 0)$ přípustné množiny, hodnota účelové funkce je zde nulová.

Sloupec odpovídající proměnné z jsme záměrně vynechali, neboť se dále nebude měnit.

Simplexová metoda

Nyní je potřeba odpovědět na otázku, zda je výchozí hodnota z optimální a pokud ne, jakým způsobem najít bazické řešení s větší hodnotou, případně jak poznat, že optimální hodnota neexistuje.

Kriterium optimality

- Jsou-li všechny koeficienty v posledním řádku tabulky (řádek účelové funkce) nezáporné, pak z je optimální hodnota a odpovídající vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (v případě výchozí tabulky $(0, 0, \dots, 0)$) je optimální řešení.

- Je-li alespoň jeden koeficient v posledním řádku záporný, vybereme koeficient s nejvíce zápornou hodnotou a sloupec, ve kterém se tento koeficient nachází, nazveme klíčový sloupec.

  a. Pokud se v klíčovém sloupci nenachází žádný kladný prvek, znamená to, že účelová funkce není nad přípustnou množinou shora ohraničená a maximální hodnota tedy neexistuje. Úloha nemá řešení.

  b. Pokud je alespoň jeden prvek v klíčovém sloupci kladný, pak najdeme nové bazické řešení.

Simplexová metoda

Přechod k novému bazickému řešení

1. Pro všechny kladné prvky v klíčovém sloupci spočteme podíly:

$$\frac{\text{odpovídající hodnota } b_j}{\text{kladný prvek klíčového sloupce v } j\text{-tém řádku}}$$

   a vybereme prvek, pro který je tento podíl nejmenší. Tento prvek nazveme klíčový prvek a odpovídající řádek nazveme klíčový řádek.

2. Pomocí ekvivalentních řádkových úprav upravíme tabulku tak, abychom místo klíčového prvku dostali číslo jedna a na všech ostatních pozicích v klíčovém sloupci byly nuly. (Klíčový řádek vydělíme klíčovým prvkem a poté vhodné násobky klíčového řádku přičítáme k ostatním řádkům tabulky.)

3. Provedeme přepsání bazických proměnných v prvním sloupci. Místo původní proměnné bude v klíčovém řádku proměnná odpovídají klíčovému sloupci.

4. Z nové tabulky vyčteme nové bazické řešení a odpovídající hodnotu z. Stejným způsobem jako u výchozího řešení zjistíme, zda je hodnota optimální a pokud ne, přejdeme k dalšímu bazickému řešení.

Simplexová metoda

Příklad (Simplexová metoda)

Řešte úlohu

$$z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$$

při omezujících podmínkách

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Zavedeme dopňkové proměnné a převedeme na soustavu rovnic (spolu s rovnicí pro účelovou funkci):

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\
x_1 - x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 &= 6 \\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 + z &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Simplexová metoda

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	−1	−1	1	0	0	2
x_5	1	−1	1	0	1	0	4
x_6	1	1	2	0	0	1	6
z	−2	−1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 4,\ x_6 = 6,\ z = 0.$

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty $\Longrightarrow$ budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou z.
Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec.

Simplexová metoda

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\boxed{2}$	-1	-1	1	0	0	2
x_5	1	-1	1	0	1	0	4
x_6	1	1	2	0	0	1	6
z	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 4,\ x_6 = 6,\ z = 0.$

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty $\Longrightarrow$ budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou z.

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec. Pro všechna kladná čísla v klíčovém sloupci spočítáme podíly:

$$\boxed{\frac{2}{2} = 1}, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1} = 6$$

Vybereme prvek, pro který je podíl nejmenší – klíčový prvek. Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem 2 a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.)

V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude x_1 (místo x_4).

Simplexová metoda

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
x_6	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
z	0	-2	1	1	0	0	2

Bazické řešení: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,\ x_6 = 5,\ z = 2.$

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota $\Longrightarrow$ hledáme další bazické řešení s větší hodnotou z.

Jediná záporná hodnota v posledním řádku určuje klíčový sloupec, jediná kladná hodnota v klíčovém sloupci určuje klíčový prvek.

Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem $\frac{3}{2}$ a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.) V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude x_2 (místo x_6).

Simplexová metoda

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Třetí tabulka:

$$
\begin{array}{c||cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline\hline
x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\
x_5 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\
x_2 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\
\hline
z & 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{26}{3}
\end{array}
$$

Bazické řešení: $x_1 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{10}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = \frac{14}{3},\ x_6 = 0,\ z = \frac{26}{3}$.

V posledním řádku tabulky není žádná záporná hodnota $\Longrightarrow$ našli jsme optimální řešení.

Optimální řešení: $x_1 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{10}{3},\ x_3 = 0$.

Optimální hodnota: $z = \frac{26}{3}$.