Firma vyrábí 3 druhy čajových směsí, určete optimální výrobní program tak, aby firma maximalizovala svůj zisk. Složení jednotlivých směsí je v tabulce.

	Směs 1	Směs 2	Směs 3	Kapacita (kg)
Černý čaj	0.4	0.2	0.1	100
Zelený čaj		0.3	0.3	150
Roibos	0.3	0.2	0.5	200
Jasmín	0.1	0.2	0.1	500
Jednotkový zisk	80,000	60,000	60,000	

x1	x2	x3
66.666667	233.3333	266.6667

Zisk 35333333.3

Podmínky

	L	P
Černý čaj	100	100
Zelený čaj	150	150
Roibos	200	200
Jasmín	80	500

Určete, zda je daná funkce dvou proměnných konvexní nebo konkávní v bodě [2,1].

$$f(x,y) = 10xy^2 - 40x + x^4 + 12y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10y^2 - 40 + 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 20xy + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 20y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 20y$$

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 & 20y \\ 20y & 20x \end{bmatrix}$$

$$H[2,1] = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

subdeterminanty:

$$[48] > 0 \qquad \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} = 48 \cdot 40 - 20 \cdot 20 > 0$$

$$[40] > 0$$

$\Rightarrow$ KONVEXNÍ

Určete, zda je daná funkce dvou proměnných konvexní nebo konkávní v bodě [-1,3].

$$f(x,y) = 2x^2 + xy^2 + 3y^3$$

bod [-1,3]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 9y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 18y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x+18y \end{bmatrix}$$

$$H[-1,3] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 52 \end{bmatrix}$$

subdeterminanty: $[4] > 0$, $[52] > 0$, $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 52 \end{bmatrix} = 4 \cdot 52 - 6 \cdot 6 > 0$

$\Rightarrow$ KONVEXNÍ

Řešte problém matematického programování:

$$f(x,y) = 2x^2$$

$g1{:}\ 2x => y^2,$

x	y	f
17.9687	2.031342	725.984344

podmínky	L	P
g1	35.9373158	4.126350701
g2	20	20

$+ xy^2 + 3y$ $\rightarrow$ MIN (konvexní funkce má minimum!)

g2: x+y>=20

Řešte:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to \max;$$

s.t.

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 \leq 169$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4.$$

x1	x2	x3	x4	f	
3.37	6.75	10.12	13.49	341.41	
				g	b
				169.00	169.00

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 .\, x_2} \rightarrow \text{MAX;}$$

za podmínek

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \; , j = 1,2.$$

- funkce užitku f je konkávní, omez
  (tj. konvexní)
- 2 statky, jednotkové ceny statků =
- důchodové omezení = 6

x1	x2	f
1.5	1	1.224745

podmínka:

L	P
6	6

ení je lineární

= 2, resp. 3

Určete Kuhn Tuckerovy podmínky:

$$6\,x_1 + 3\,x_2 \to \mathrm{MAX};$$

při omezeních

$$4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20\ ,$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 22\ ,$$
$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ .$$

Řešení viz strana 52 ve skriptech.

Primární úloha

Výrobce tzv. „racio“ pokrmů plánuje výrobu dvou typů směsí. Na jejich výrobu má na jedno plánovac
pšenici o kapacitě 100 tun a ovesné vločky o kapacitě 60 tun. Tyto suroviny jsou smluvně zajištěny a
Při výrobě dvou typů směsí je třeba dodržovat složení daných směsí podle následující tabulky.

Surovina	Racio směs		surovin [t]
	typ I	typ II	
Rýže	90%	30%	270
Pšenice		50%	100
Vločky	10%	20%	60

$c^T x$ ---> max

s.t.

Ax <= b

x >= 0

maximalizovat

$z = 2000x_1 + 3000x_2$

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \leq 270$$
$$0{,}5x_2 \leq 100$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

c^T =	2000	3000
A =	0.9	0.3
	0	0.5
	0.1	0.2

:í období (1 rok) k dispozici rýži o kapacitě 270 tun,
liší se svou nákupní cenou.

x =	240	$c^T x$ =	1020000
	180		
	L		P
	270		270
Ax =	90	b =	100
	60		60

Duální úloha:

(P) $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \to$ MAX;
při omezeních
$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$.

Úlohu (P) označujeme
nujeme tzv. **duální úlohu**

(D) $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \to$ MIN;
při omezeních
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$.

b^T =

270	100

A^T =

0.9	0
0.3	0.5

: jako **primární úloha LP**. Ze stejných vstupních údajů k ní defi-
ı **LP.**

	b^Ty =				
60	1020000				
		L		P	
	y =	A^ty =		c =	
0.1	666.666667	2000	>=	2000	
0.2	0	3000	>=	3000	
	14000				