Ekonomicko-matematické metody 1

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Předmět Ekonomicko-matematické metody

Kód studijního předmětu: INM/NPEMM

Garant: prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

Vyučující: doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Rozsah studijního předmětu: 2+1

Počet kreditů: 5 ECTS

Způsob zakončení: zkouška (písemná + ústní)

Forma výuky: přednáška, seminář v PC učebně

Předmět Ekonomicko-matematické metody

Podmínky absolvování předmětu:

- **Aktivní účast na seminářích alespoň 70%**
  −3 body za každou neomluvenou neúčast pod 70%;
  +3 body za každou účast nad 70%
- **Seminární práce max. 30 b. (seminární práce musí být odevzdána nejpozději 3 dny před absolvováním zkouškového testu)**
- **Zkouškový test max. 70 b.**
- **Celkem max. 100 b.**

Klasifikace:

- **0 až 59 b. F**
- **60 až 64 b E**
- **65 až 69 b. D**
- **70 až 79 b. C**
- **80 až 89 b. B**
- **90 až 100 b. A**

Předmět Ekonomicko-matematické metody v eLearningu

Kurs a interaktivní osnova v IS SU

https://is.slu.cz/auth/el/opf/zima2022/INMNPEMM/

Adresář „public“ na disku L:

L:\bartl\public\N_EMM

Obsahuje všechny materiály: distanční studijní oporu (texty), excelovské soubory s příklady ze seminářů, doplňkové soubory, studijní literaturu, SW, odkazy na jiné weby apod.

Pozor: musíte mít v pořádku přístup do fakultní počítačové sítě !!!

Trocha historie o matematickém modelování v ekonomii

- Matematika se do ekonomie začala prosazovat ve 30. letech minulého století
- Ke skutečnému boomu došlo až s nástupem počítačů
- **Rhind-Ahmesův papyrus** ze 17. stol. **př. n. l.** obsahuje některé hospodářské úlohy, které lze při troše tolerance považovat za matematické aplikace v ekonomii
- V novověké historii se lze setkat s matematickým modelováním již v klasických pracích o politické ekonomii, např. v díle **Political arithmetics** od anglického filosofa **W. Pettyho** (1623 – 1687)
- Švýcarský ekonom **León Walras** (1834 – 1910) jako první používal matematický aparát jako nedílnou součást svých ekonomických úvah o marginální teorii užitku a v teorii ekonomické rovnováhy
- **Vilfredo Pareto** (1848 – 1923) - žák L. Walrase - dovedl používání matematiky v ekonomii k dnešním standardům

Rhind-Ahmesův papyrus 1

Rhind-Ahmesův papyrus 2

- Asi 1600 let před naším letopočtem byl na dvoře faraóna Amenemhata III. jako královský písař a matematik zaměstnán Ahmes. V roce 1853 objevil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách jeden Ahmesův papyrus. Papyrus má tvar pásku širokého 33 cm a dlouhého více než 5 m. Obsahuje mimo jiné i následující úlohu:
- **Sto měr zrní je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. První dva dělníci mají dohromady dostat sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři dohromady. Kolik měr zrní dostal každý dělník?**

Matematické metody v ekonomii

zahrnují tyto oblasti:

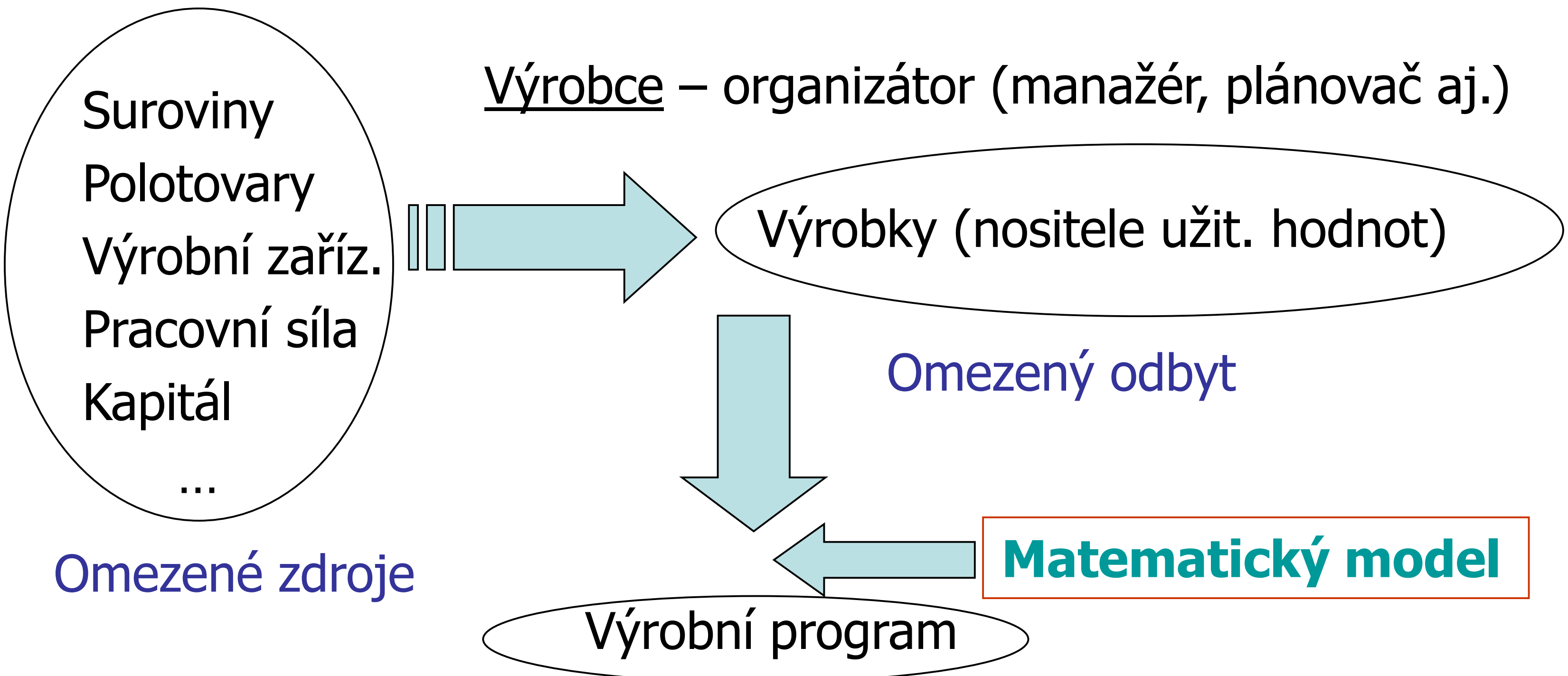
- Matematické programování a jeho aplikace v ekonomických disciplínách
- Lineární programování
- Vícekriteriální optimalizace
- Cílové programování
- Modely analýzy obalu dat
- Modely optimalizace portfolia
- Optimalizační úlohy na grafech
- Řízení projektů: Časová analýza: CPM, PERT
- Software k řešení optimalizačních úloh na PC
- Operační výzkum (operační analýza)
- Operační management

Příklad tvorby matematického modelu:

Maximalizace zisku podnikatele při omezených výrobních zdrojích a omezeném odbytu

Název disciplíny: **Operační management**

Teoretické schéma:



Výrobní program

- Výrobkový seznam (n výrobků: $1, 2, \ldots, n$)
- Objem výroby jednotlivých výrobků množství, kusy ($x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$) předem neznámý rozsah výroby

Jednotlivé zisky a celkový zisk

- c_j – zisk z výroby jednotky výrobku j

  $(j = 1, 2, \ldots, n)$
- $c_j x_j$ – zisk z výroby množství x_j výrobku j
- $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ – celkový zisk výrobního programu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Omezené zdroje

- Seznam omezených zdrojů (m zdrojů: $1, 2,\dots,m$)
- Disponibilní množství zdrojů
  ($b_1, b_2, \dots , b_m \geq 0$)
- Volný nákup zdrojů z celkové omezené částky

Technologické (strukturní) koeficienty

- a_{ij} - technologický koeficient zdroje i na výrobek j (množství zdroje " i " potřebného k výrobě jednotky výrobku " j ")

- $a_{ij}\, x_j$ - množství zdroje " i " potřebného k výrobě x_j jednotek výrobku " j "

- $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n$ - množství zdroje "i" potřebného k výrobě výrobního programu $X = (x_1 , x_2, \ldots, x_n)$

Omezení odbytu

- h_i - horní omezení odbytu výrobku "i"
- $0 \leq x_j \leq h_j$ - objem výroby výrobku "j" nesmí překročit odbytové možnosti

Přípustné výrobní programy

PVP $X = (x_1 , x_2, \ldots, x_n)$ splňuje:

- podmínky disponibilních zdrojů:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad i = 1,2,\ldots, m$$

- podmínky odbytových možností:

$$0 \leq x_j \leq h_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Optimální výrobní program

Takový přípustný výrobní program $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ který maximalizuje celkový zisk:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Pro nalezení OVP musíme shromáždit :

- výrobkový seznam
- jednotkové zisky
- disponibilní množství zdrojů
- technologické koeficienty
- omezení odbytu

Optimální výrobní program …

Data

sestavení modelu

matematický model

řešení (počítač)

optimální výrobní program $X^* = (x^*_1 , x^*_2,\ldots, x^*_n)$

Optimalizace výrobního programu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad i = 1,2,\ldots, m$$

$$0 \leq x_j \leq h_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Příklad:

- Výrobce tzv. „racio“ pokrmů plánuje výrobu dvou typů směsí. Na jejich výrobu má na jedno plánovací období k dispozici rýži o kapacitě 270 tun, pšenici o kapacitě 100 tun a ovesné vločky o kapacitě 60 tun. Při výrobě dvou typů směsí je třeba dodržovat složení daných směsí podle následující tabulky.

Surovina	Racio směs		Kapacita surovin
	Směs I	Směs II	
Rýže	90%	30%	270
Pšenice		50%	100
Vločky	10%	20%	60

- Na základě všech nákladů souvisejících s výrobou a dle předpokládané prodejní ceny obou směsí byl vykalkulován zisk 2000 Kč za 1 tunu směsi typu I a 3000 Kč/t směsi typu II. Jak má firma naplánovat výrobu, aby byl celkový zisk maximální?

Transformace ekonomického modelu na model matematický

	Racio směs		Kapacita surovin [t]
Surovina	typ I	typ II	
Rýže	90%	30%	270
Pšenice		50%	100
Vločky	10%	20%	60

2 procesy:

1. výroba směsi typu I v množství $\boldsymbol{x_1 \geq 0}$
2. výroba směsi typu II v množství $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$

3 činitelé (zdroje): Rýže, pšenice, ovesné vločky

Efektivnost procesů:

- 1 tuna směsi typu I přináší zisk 2000 Kč
- 1 tuna směsi typu II přináší zisk 3000 Kč

Cenové koeficienty

- $z = 2000x_1 + 3000x_2$ - zisk z produkce

  - x_1 tun směsi typu I

  - x_2 tun směsi typu II

Účelová funkce

Omezující podmínky:

Vlastní omezení:

$$\boxed{\begin{aligned} 0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \\ 0{,}5\,x_2 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \end{aligned}} \begin{aligned} &\le \\ &\le \\ &\le \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} 270 \\ 100 \\ 60 \end{aligned}} \quad \left.\begin{aligned} &\text{rýže} \\ &\text{pšenice} \\ &\text{vločky} \end{aligned}\right\} \text{3 zdroje}$$

Strukturní koeficienty

Kapacitní koeficienty (pravé strany)

Podmínky nezápornosti: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Matematický model LP:

2 procesy, 3 zdroje (činitele)

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow \text{max(imalizovat)}$$

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \;\le\; 270$$

$$0{,}5\,x_2 \le 100$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \;\le\; 60$$

$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0$$

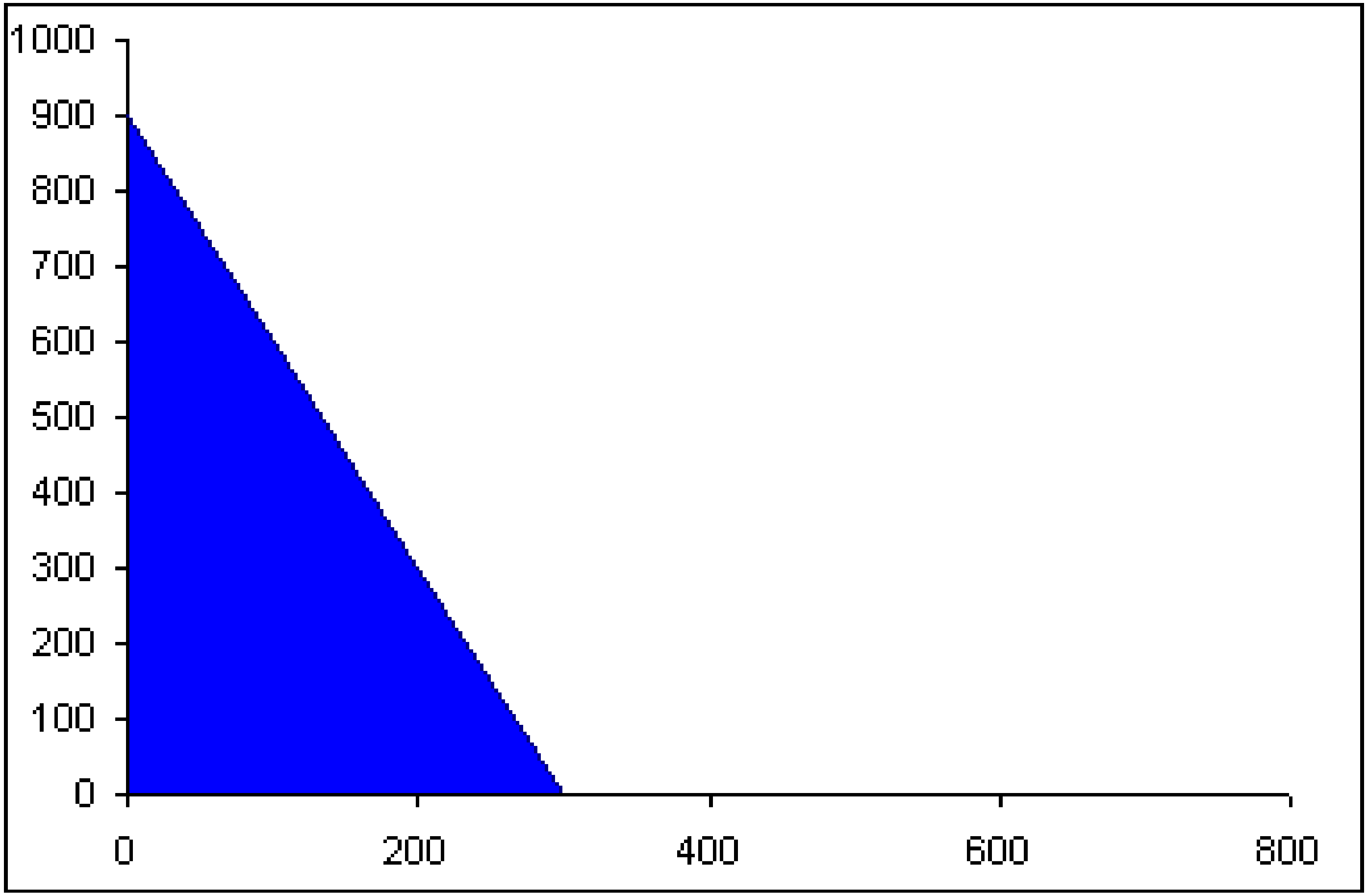
Některá přípustná a nepřípustná řešení úlohy LP:

Řešení	**Proměnné**		**Zbytek (+), nedostatek (-) surovin**			**Hodnota účelové funkce**
	x_1	x_2	**Rýže**	**Pšenice**	**Vločky**	
x^1	**0**	**0**	**270**	**100**	**60**	**0**
x^2	**100**	**100**	**150**	**50**	**30**	**500000**
x^3	**300**	**0**	**0**	**100**	**30**	**600000**
x^4	**0**	**300**	**180**	**-50**	**0**	**900000**
x^5	**200**	**200**	**30**	**0**	**0**	**1000000**

Jaké je optimální řešení úlohy, tj. takové x_1 a x_2, které dávají max zisk?

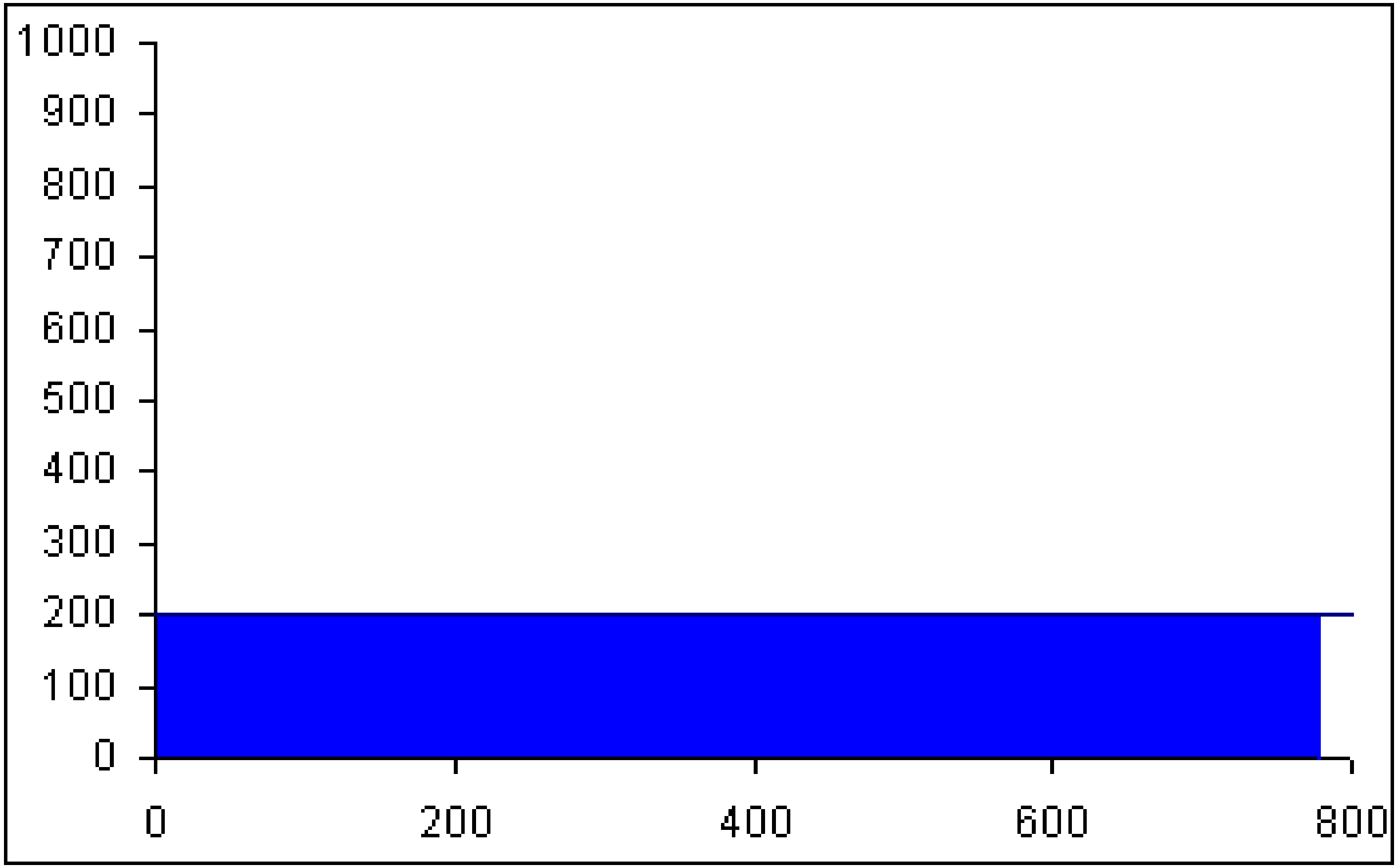
Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}9x_1 + 0{,}3\,x_2 \leq 270,\ (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$$



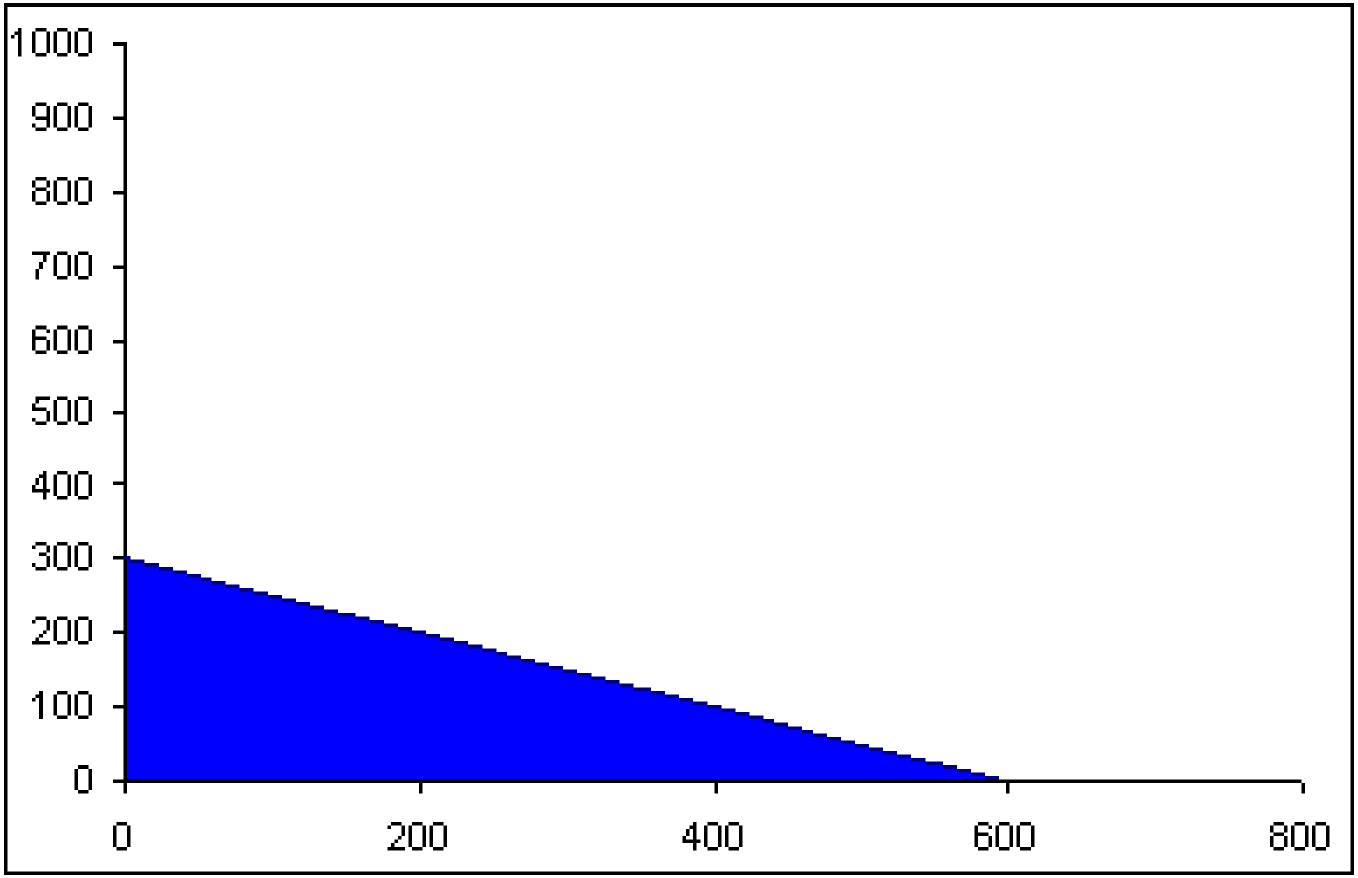
Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}5\,x_2 \le 100,\ (x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$

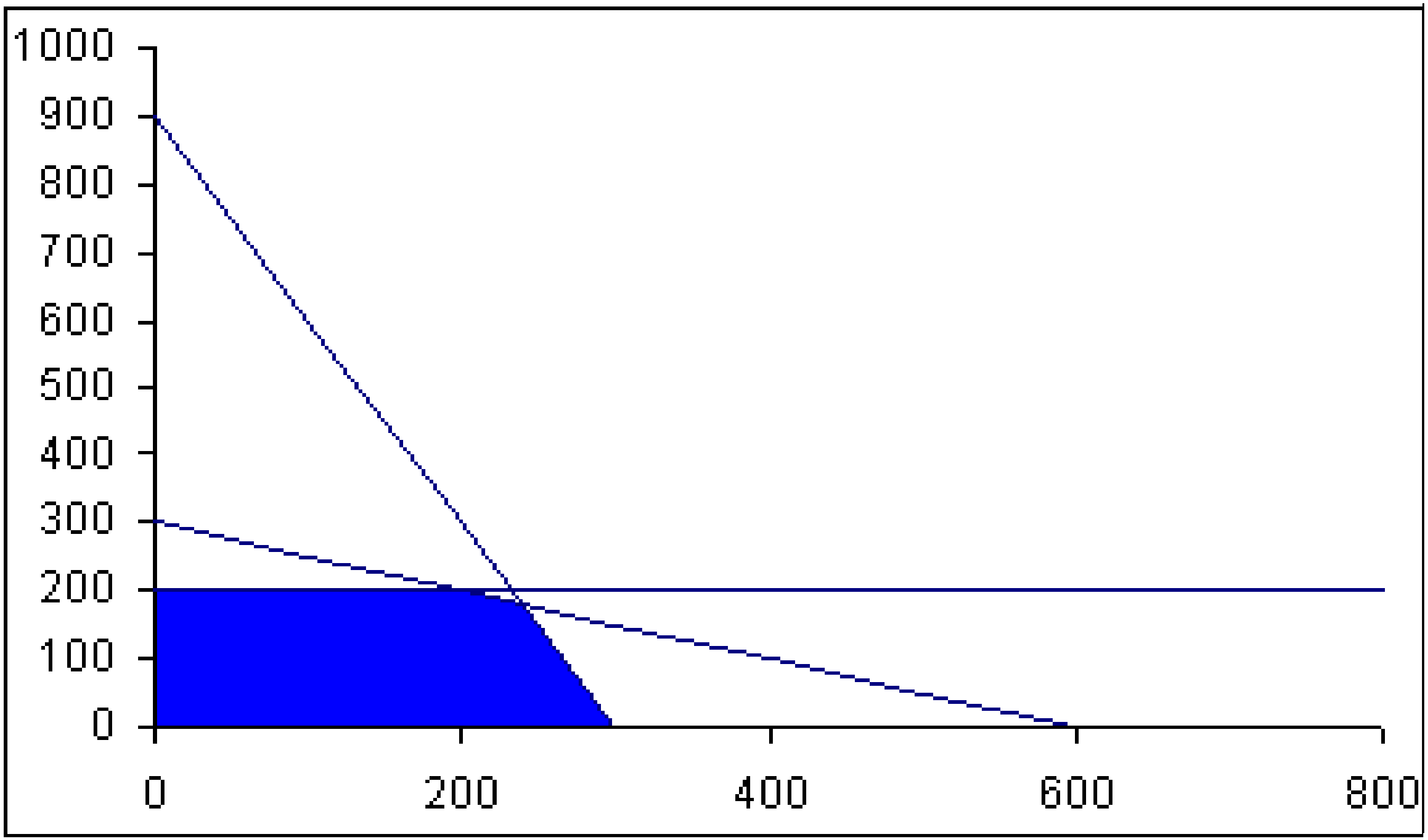


Grafické znázornění podmínky:

$$0{,}1x_1 + 0{,}2\,x_2 \;\leq\; 60,\ (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$$

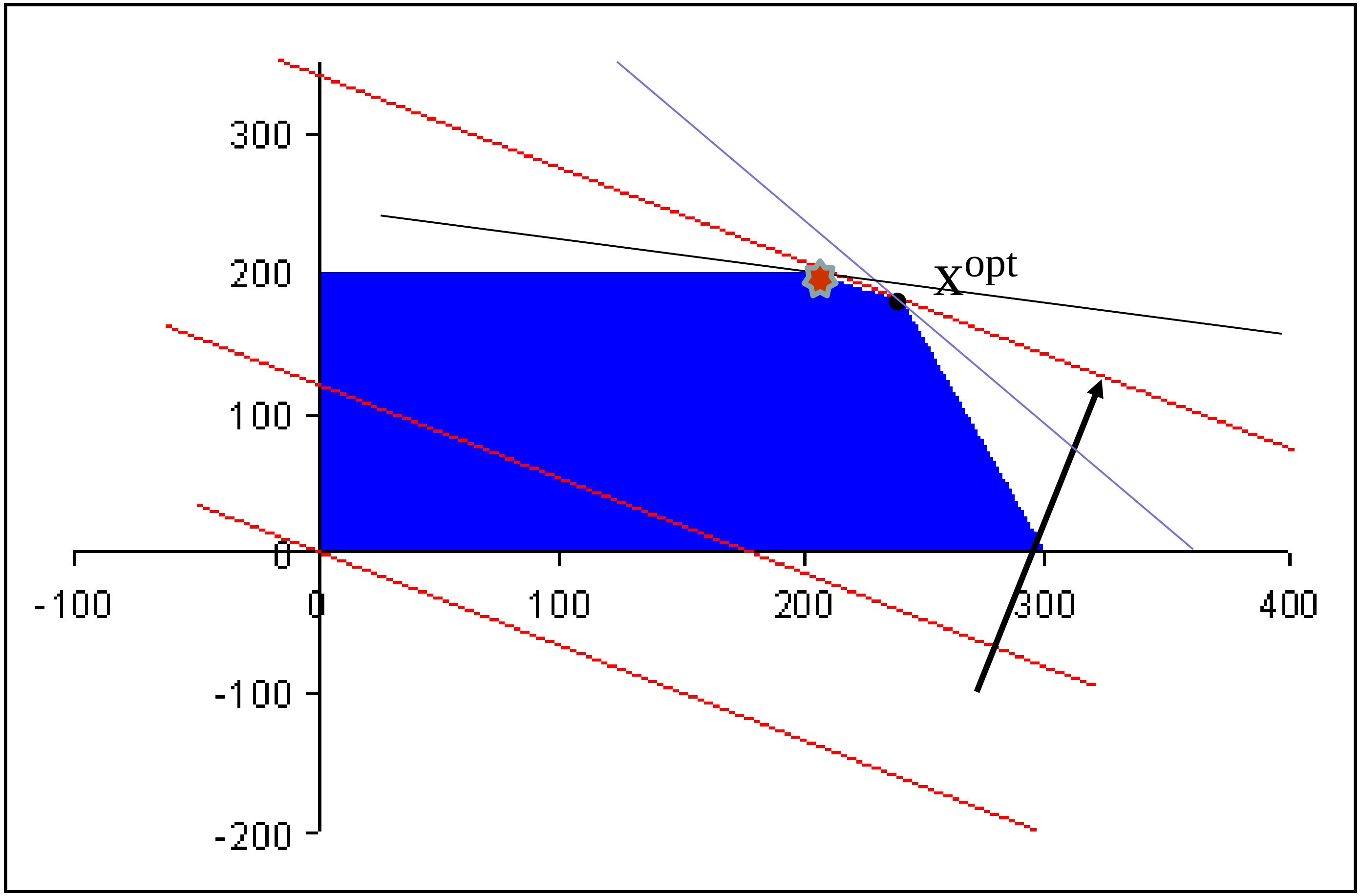


Grafické znázornění výsledné množiny všech přípustných řešení:



Grafické řešení úlohy LP:

$x_1 = 240$ $x_2 = 180$ $z = 1\,020\,000$



Modifikace modelu:
rizikovost procesů

- 1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk 2000 Kč
- 1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk 3000 Kč

- $\boxed{z = 2000x_1 + 3000x_2}$ - očekávaný (průměrný) zisk z produkce

  - x_1, resp., x_2 tun směsi typu I, resp. typu II

  Jednotkové zisky jsou náhodné veličiny s diskrétním nebo spojitým rozdělením pravděpodobnosti → celkový zisk z produkce je ROVNĚŽ náhodná veličina!

Příklad:
náhodný zisk (diskrétní rozdělení náh. vel.)

1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk:

1500 Kč s pravděpodobností 0,2

2000 Kč s pravděpodobností 0,6

2500 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

E(jednot. zisk2) = 1500*0,2 + 2000*0,6 + 2500*0,2 = 2000 Kč

1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk:

2000 Kč s pravděpodobností 0,2

3000 Kč s pravděpodobností 0,6

4000 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

E(jednot. zisk1) = 2000*0,2 + 3000*0,6 + 4000*0,2 = 3000 Kč

Omezující podmínky:

Vlastní omezení:

$$
\begin{aligned}
\boxed{0{,}9}\,x_1 + \boxed{0{,}3}\,x_2 &\le 270 \quad \text{rýže} \\
0{,}5\,x_2 &\le 100 \quad \text{pšenice} \\
\boxed{0{,}1}\,x_1 + \boxed{0{,}2}\,x_2 &\le 60 \quad \text{vločky}
\end{aligned}
$$

3 zdroje

Strukturní koeficienty

Kapacitní koeficienty (pravé strany)

Strukturní, resp. kapacitní koeficienty mohou být rovněž rizikové (tj. náhodné veličiny)

Optimalizační úlohy s náhodnými koeficienty

se řeší pomocí metod **matematického programování**

Závěry

- Ekonomický model – reálná situace (pojmy, teorie, data…)
- Matematický model – přibližný (symbolický) model reality
- Řešení matemat. modelu – slouží pro podporu rozhodnutí – DSS
- Rozhodnutí pro reálnou akci – provádí vždy člověk!!!