



Ekonomicko-matematické metody 1

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Předmět Ekonomicko-matematické metody

Kód studijního předmětu: INM/NPEMM

Garant: prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

Vyučující: doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Rozsah studijního předmětu: 2+1

Počet kreditů: 5 ECTS

Způsob zakončení: zkouška (písemná + ústní)

Forma výuky: přednáška, seminář v PC učebně

Předmět Ekonomicko-matematické metody

Podmínky absolvování předmětu:

- **Aktivní účast na seminářích alespoň 70%**
–3 body za každou neomluvenou neúčast pod 70%;
+3 body za každou účast nad 70%
- **Seminární práce max. 30 b. (seminární práce musí být odevzdána nejpozději 3 dny před absolvováním zkouškového testu)**
- **Zkouškový test max. 70 b.**
- **Celkem max. 100 b.**

Klasifikace:

- 0 až 59 b. F
- 60 až 64 b. E
- 65 až 69 b. D
- 70 až 79 b. C
- 80 až 89 b. B
- 90 až 100 b. A

Předmět Ekonomicko-matematické metody v eLearningu

Kurs a interaktivní osnova v IS SU

<https://is.slu.cz/auth/el/opf/zima2022/INMNPEMM/>

Adresář „public“ na disku L:

L:\bartl\public\N_EMM

Obsahuje všechny materiály: distanční studijní oporu (texty), excelovské soubory s příklady ze seminářů, doplňkové soubory, studijní literaturu, SW, odkazy na jiné weby apod.

Pozor: musíte mít v pořádku přístup do fakultní počítačové sítě !!!

Trocha historie o matematickém modelování v ekonomii

- Matematika se do ekonomie začala prosazovat ve 30. letech minulého století
- Ke skutečnému boomu došlo až s nástupem počítačů
- **Rhind-Ahmesův papyrus** ze 17. stol. **př. n. l.** obsahuje některé hospodářské úlohy, které lze při troše tolerance považovat za matematické aplikace v ekonomii
- V novověké historii se lze setkat s matematickým modelováním již v klasických pracích o politické ekonomii, např. v díle **Political arithmetics** od anglického filosofa **W. Pettyho** (1623 – 1687)
- Švýcarský ekonom **León Walras** (1834 – 1910) jako první používal matematický aparát jako nedílnou součást svých ekonomických úvah o marginální teorii užitku a v teorii ekonomické rovnováhy
- **Vilfredo Pareto** (1848 – 1923) - žák L. Walrase - dovedl používání matematiky v ekonomii k dnešním standardům

Rhind-Ahmesuv papyrus 1



Rhind-Ahmesův papyrus 2

- Asi 1600 let před naším letopočtem byl na dvoře faraóna Amenemhata III. jako královský písař a matematik zaměstnán Ahmes. V roce 1853 objevil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách jeden Ahmesův papyrus. Papyrus má tvar pásku širokého 33 cm a dlouhého více než 5 m. Obsahuje mimo jiné i následující úlohu:
- **Sto měr zrní je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. První dva dělníci mají dohromady dostat sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři dohromady. Kolik měr zrní dostal každý dělník?**

Matematické metody v ekonomii

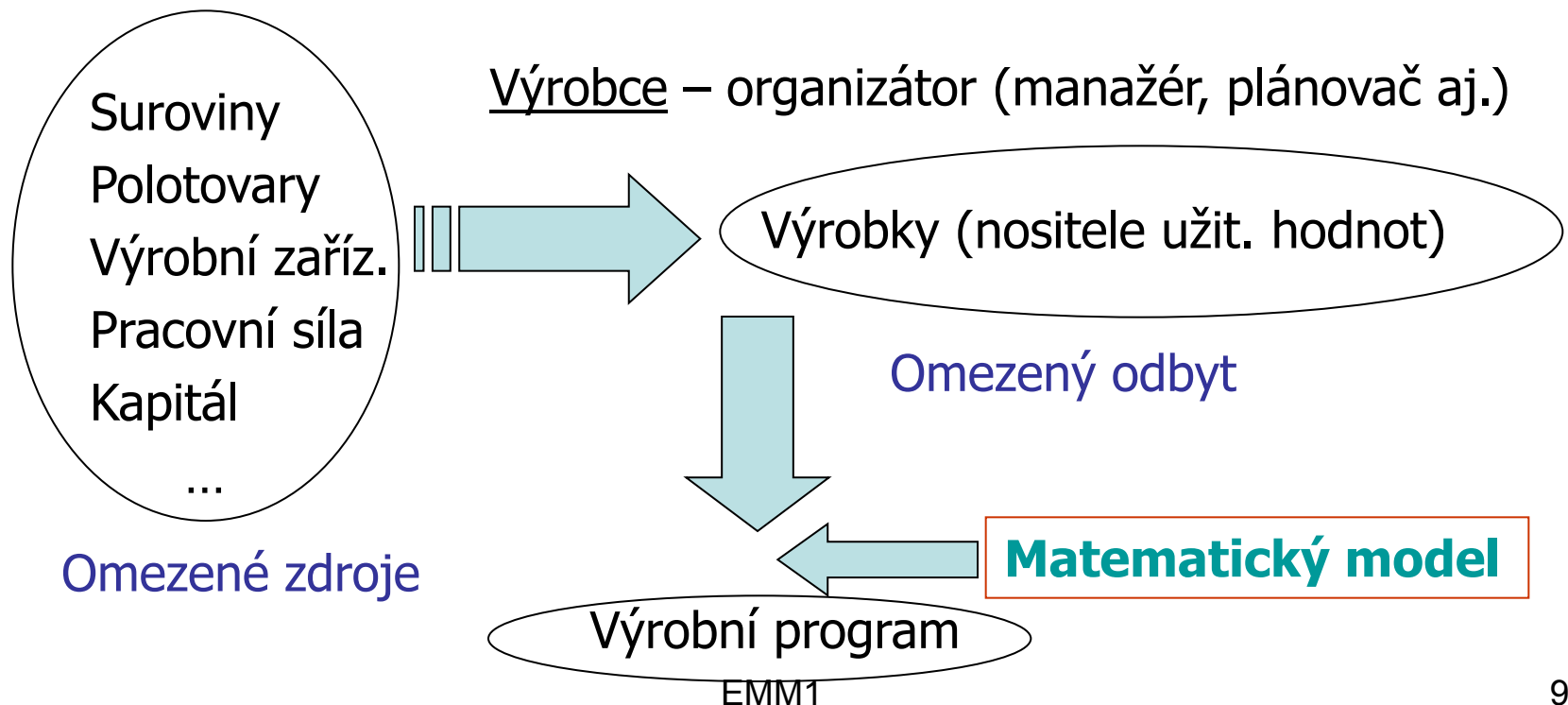
zahrnují tyto oblasti:

- Matematické programování a jeho aplikace v ekonomických disciplínách
- Lineární programování
- Vícekriteriální optimalizace
- Cílové programování
- Modely analýzy obalu dat
- Modely optimalizace portfolia
- Optimalizační úlohy na grafech
- Řízení projektů: Časová analýza: CPM, PERT
- Software k řešení optimalizačních úloh na PC
- Operační výzkum (operační analýza)
- Operační management

Příklad tvorby matematického modelu: Maximalizace zisku podnikatele při omezených výrobních zdrojích a omezeném odbyt

Název disciplíny: Operační management

Teoretické schéma:



Výrobní program

- Výrobní seznam (n výrobků: $1, 2, \dots, n$)
- Objem výroby jednotlivých výrobků množství, kusy ($x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$)
předem neznámý rozsah výroby

Jednotlivé zisky a celkový zisk

- c_j – zisk z výroby jednotky výrobku j
($j = 1, 2, \dots, n$)
- $c_j x_j$ – zisk z výroby množství x_j výrobku j
- $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ – celkový zisk výrobního programu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Omezené zdroje

- Seznam omezených zdrojů (m zdrojů: $1, 2, \dots, m$)
- Disponibilní množství zdrojů
($b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$)
- Volný nákup zdrojů z celkové omezené částky

Technologické (strukturní) koeficienty

- a_{ij} - technologický koeficient zdroje i na výrobek j
(množství zdroje " i " potřebného k výrobě jednotky výrobku " j ")
- $a_{ij} x_j$ - množství zdroje " i " potřebného k výrobě x_j jednotek výrobku " j "
- $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$ - množství zdroje " i " potřebného k výrobě výrobního programu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Omezení odbytu

- h_i - horní omezení odbytu výrobku "i"
- $0 \leq x_j \leq h_j$ - objem výroby výrobku "j" nesmí překročit odbytové možnosti

Přípustné výrobní programy

PVP $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ splňuje:

- podmínky disponibilních zdrojů:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- podmínky odbytových možností:

$$0 \leq x_j \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Optimální výrobní program

Takový přípustný výrobní program $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ který maximalizuje celkový zisk:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Pro nalezení OVP musíme shromáždit :

- výrobní seznam
- jednotkové zisky
- disponibilní množství zdrojů
- technologické koeficienty
- omezení odbytu

Optimální výrobní program ...

Data

sestavení modelu

matematický model

řešení (počítač)

optimální výrobní program $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$

Optimalizace výrobního programu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq x_j \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Příklad:

- Výrobce tzv. „racio“ pokrmů plánuje výrobu dvou typů směsí. Na jejich výrobu má na jedno plánovací období k dispozici rýži o kapacitě 270 tun, pšenici o kapacitě 100 tun a ovesné vločky o kapacitě 60 tun. Při výrobě dvou typů směsí je třeba dodržovat složení daných směsí podle následující tabulky.

Surovina	Racio směs		Kapacita surovin
	Směs I	Směs II	
Rýže	90%	30%	270
Pšenice		50%	100
Vločky	10%	20%	60

- Na základě všech nákladů souvisejících s výrobou a dle předpokládané prodejní ceny obou směsí byl vykalkulován zisk 2000 Kč za 1 tunu směsi typu I a 3000 Kč/t směsi typu II. Jak má firma naplánovat výrobu, aby byl celkový zisk maximální?

Transformace ekonomického modelu na model matematický

Surovina	Podíl směsi		Kapacita suroviny [t]
	typ I	typ II	
Rýže	90%	30%	270
Pšenice		50%	100
Vločky	10%	20%	60

2 procesy:

1. výroba směsi typu I v množství $x_1 \geq 0$

2. výroba směsi typu II v množství $x_2 \geq 0$

3 činitelé (zdroje): Rýže, pšenice, ovesné vločky

Efektivnost procesů:

- 1 tuna směsi typu I přináší zisk 2000 Kč
- 1 tuna směsi typu II přináší zisk 3000 Kč

Cenové koeficienty

- $z = 2000x_1 + 3000x_2$ - zisk z produkce

- x_1 tun směsi typu I

- x_2 tun směsi typu II

Účelová funkce

Omezující podmínky:

Vlastní omezení:

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

rýže

pšenice

vločky

} 3 zdroje

↓
Strukturní koeficienty

↓
Kapacitní koeficienty (pravé strany)

Podmínky nezápornosti: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Matematický model LP:

2 procesy, 3 zdroje (činitele)

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow \max(\text{imalizovat})$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

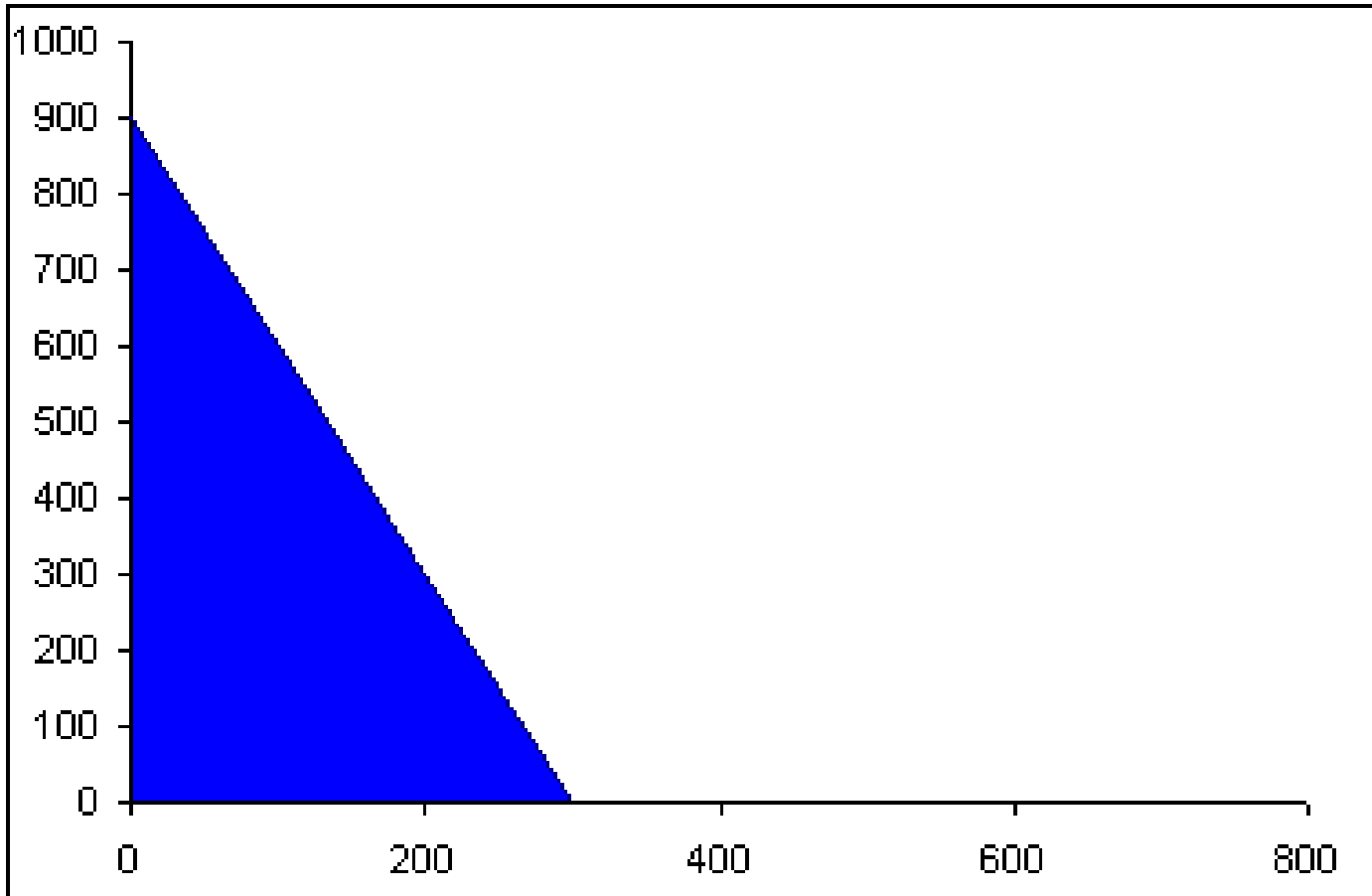
Některá přípustná a nepřípustná řešení úlohy LP:

Řešení	Proměnné		Zbytek(+), nedostatek(-) surovin			Hodnota úcelové funkce
	x_1	x_2	Rýže	Pšenice	Močky	
x^1	0	0	270	100	60	0
x^2	100	100	150	50	30	50000
x^3	300	0	0	100	30	60000
x^4	0	300	180	-50	0	90000
x^5	200	200	30	0	0	100000

Jaké je optimální řešení úlohy, tj. takové x_1 a x_2 , které dávají max zisk?

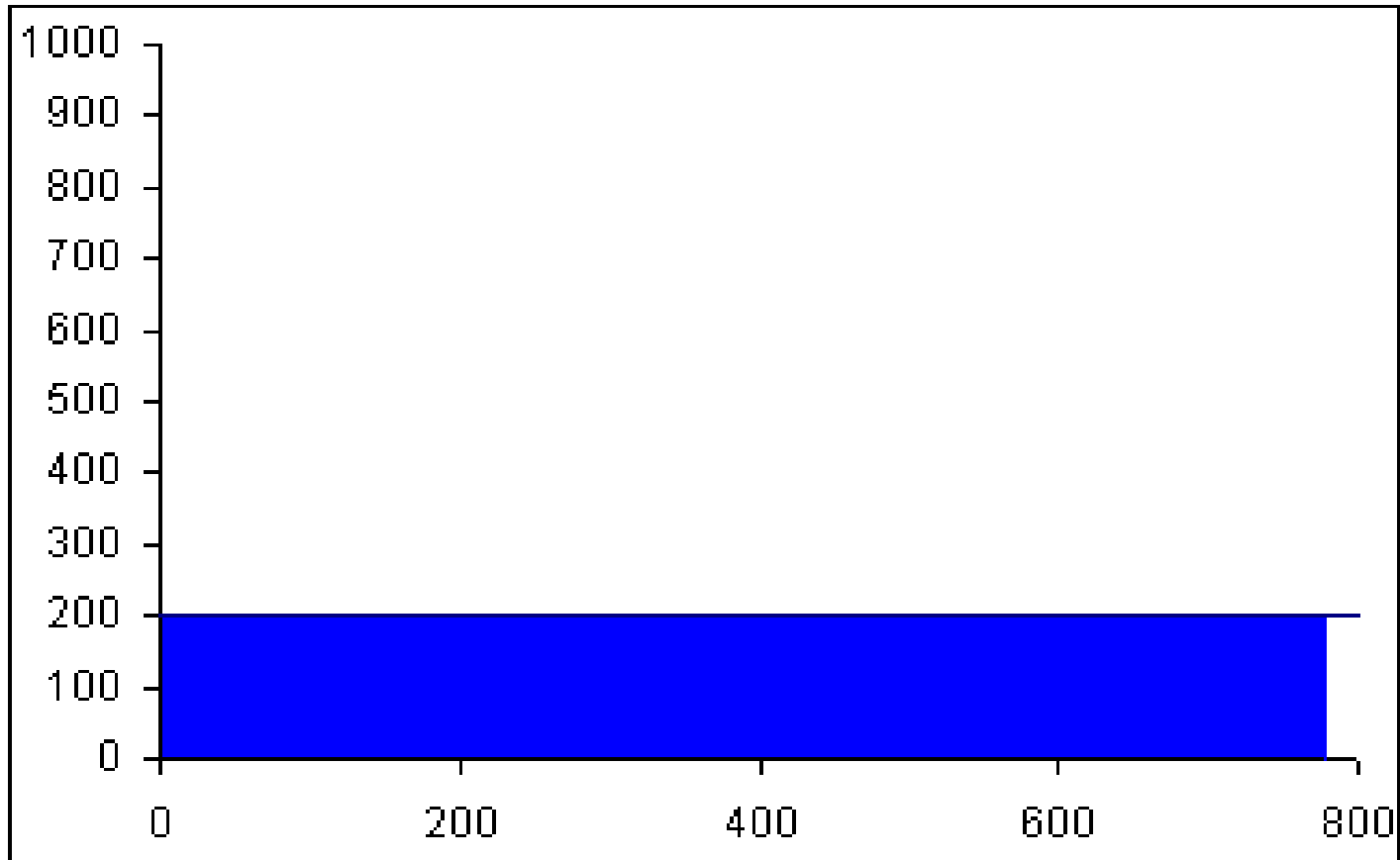
Grafické znázornění podmínky:

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270, (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$



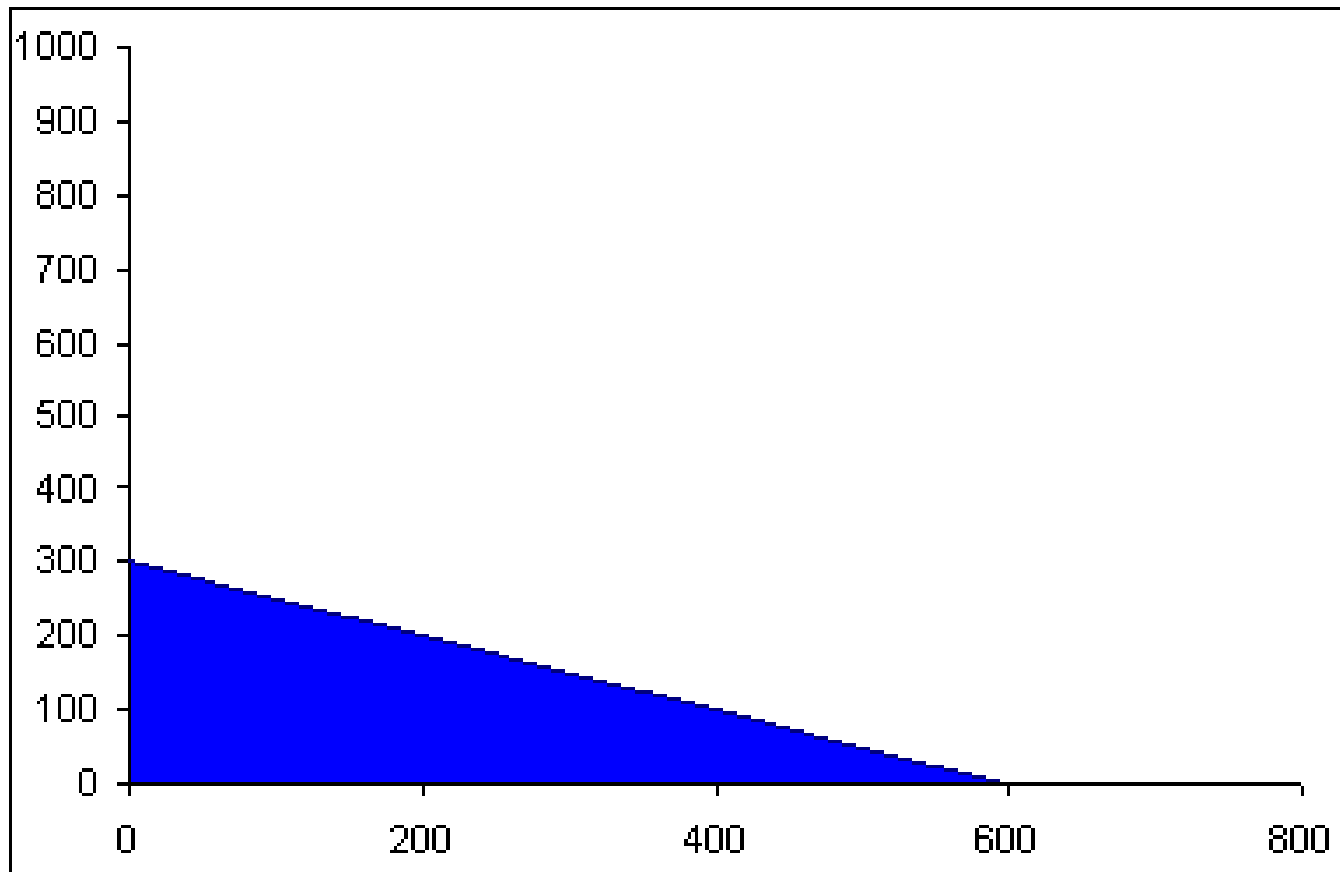
Grafické znázornění podmínky:

$$0,5 x_2 \leq 100, (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

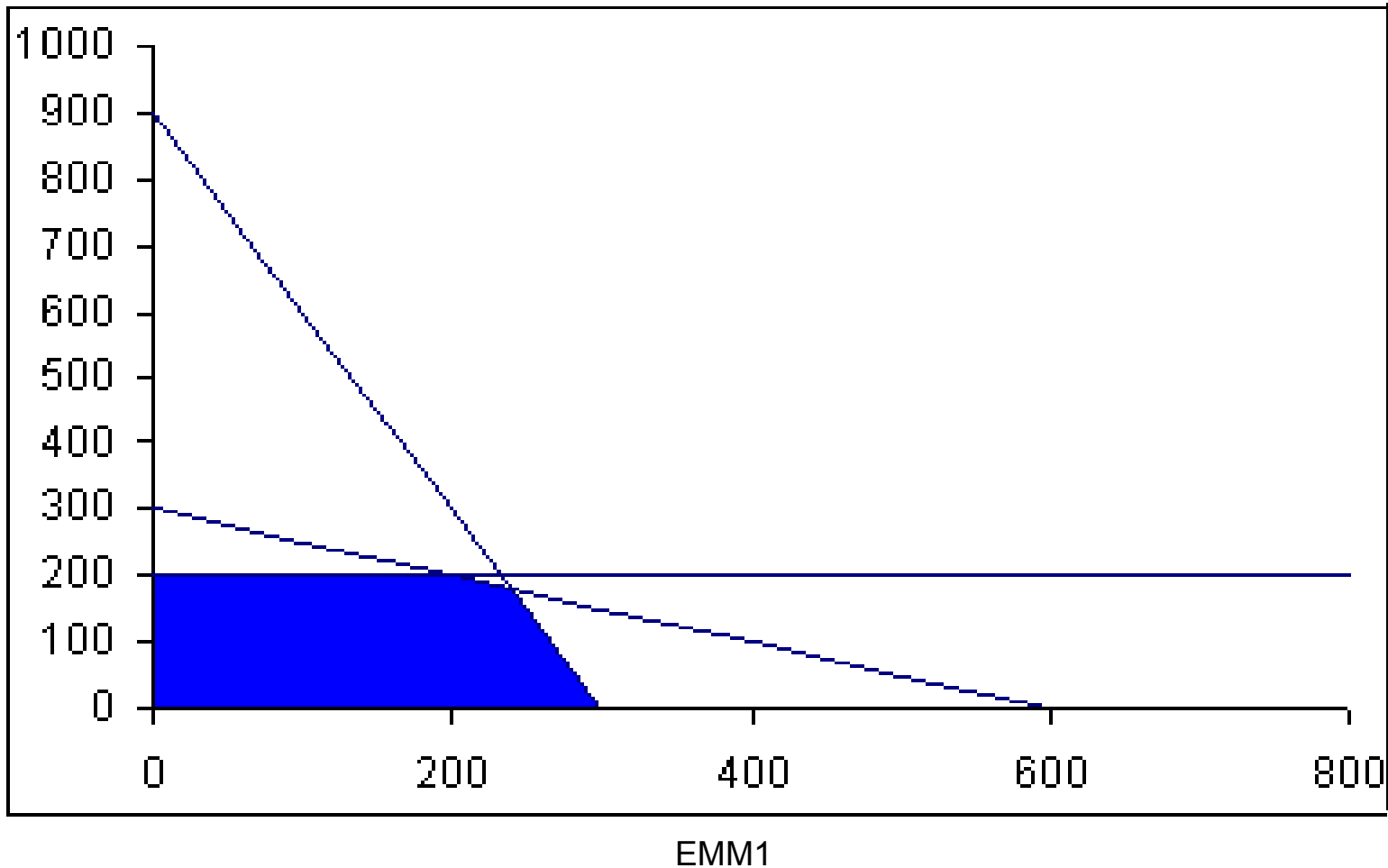


Grafické znázornění podmínky:

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60, (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

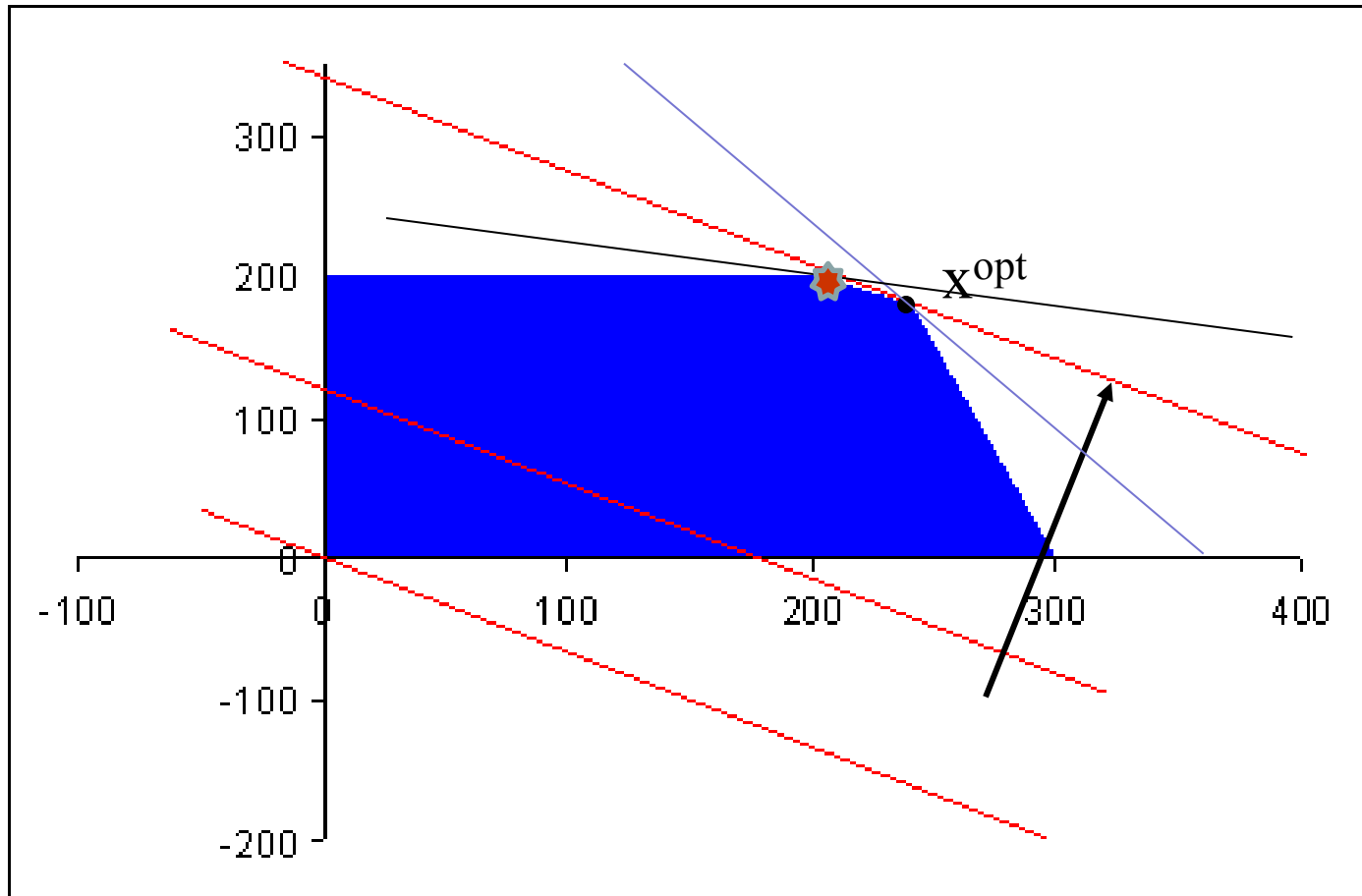


Grafické znázornění výsledné množiny všech přípustných řešení:



Grafické řešení úlohy LP:

$$x_1 = 240 \quad x_2 = 180 \quad z = 1\,020\,000$$



EMM1

Modifikace modelu:

rizikovost procesů

- 1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk **2000 Kč**
 - 1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk **3000 Kč**
 - $z = 2000x_1 + 3000x_2$ - očekávaný (průměrný) zisk z produkce
 - x_1 , resp. x_2 tun směsi typu I, resp. typu II
- Jednotkové zisky jsou náhodné veličiny s diskrétním nebo spojitým rozdělením pravděpodobnosti → celkový zisk z produkce je ROVNĚŽ náhodná veličina!

Příklad:

náhodný zisk (diskrétní rozdělení náh. vel.)

1 tuna směsi typu I přináší očekávaný (průměrný) zisk:

1500 Kč s pravděpodobností 0,2

2000 Kč s pravděpodobností 0,6

2500 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

$$E(\text{jednot. zisk2}) = 1500 \cdot 0,2 + 2000 \cdot 0,6 + 2500 \cdot 0,2 = 2000 \text{ Kč}$$

1 tuna směsi typu II přináší očekávaný (průměrný) zisk:

2000 Kč s pravděpodobností 0,2

3000 Kč s pravděpodobností 0,6

4000 Kč s pravděpodobností 0,2

Očekávaný (průměrný) zisk (střední hodnota):

$$E(\text{jednot. zisk1}) = 2000 \cdot 0,2 + 3000 \cdot 0,6 + 4000 \cdot 0,2 = 3000 \text{ Kč}$$

Omezující podmínky:

Vlastní omezení:

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

rýže

pšenice

vločky

} 3 zdroje

Strukturní koeficienty

Kapacitní koeficienty (pravé strany)

Strukturní, resp. kapacitní koeficienty mohou být rovněž rizikové (tj. náhodné veličiny)

Optimalizační úlohy s náhodnými koeficienty

se řeší pomocí metod **matematického programování**

Závěry

- Ekonomický model – reálná situace (pojmy, teorie, data...)
- Matematický model – přibližný (symbolický) model reality
- Řešení matemat. modelu – slouží pro podporu rozhodnutí – DSS
- Rozhodnutí pro reálnou akci – provádí vždy člověk!!!