



Ekonomicko-matematické metody 3

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

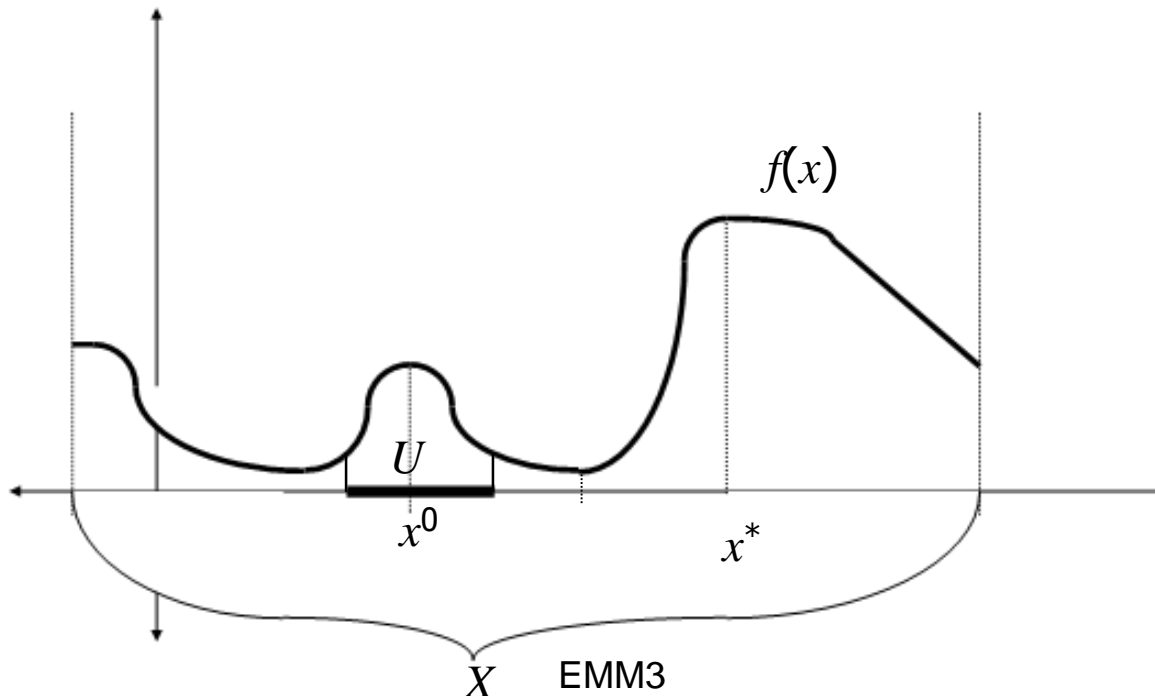
Lokální a globální extrémý

x^0 ... **lokální maximum** funkce $f(x)$... (lokální minimum funkce)

\exists okolí U bodu x^0 : $\forall x \in U \subset X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

x^* ... **globální maximum** $f(x)$... (globální minimum funkce)

$\forall x \in X$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$)



Lokální a globální extrémny



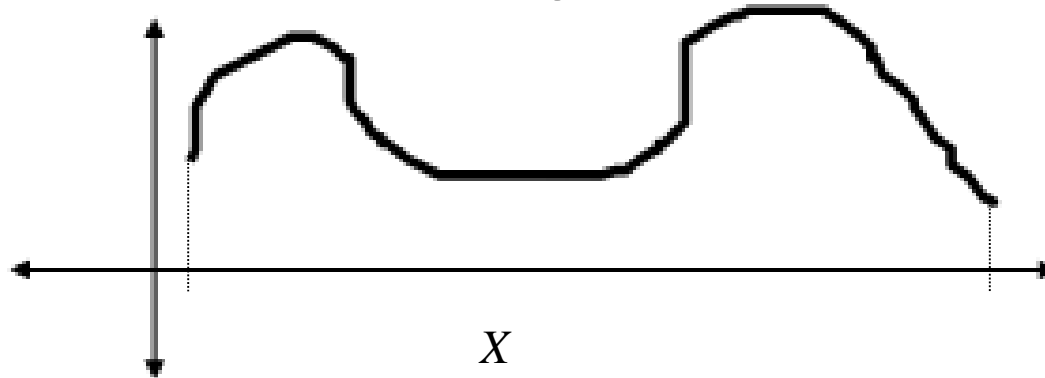
Existence řešení

Věta 1

Spojité funkce nabývá na uzavřené omezené množině X svého globálního maxima (globálního minima).

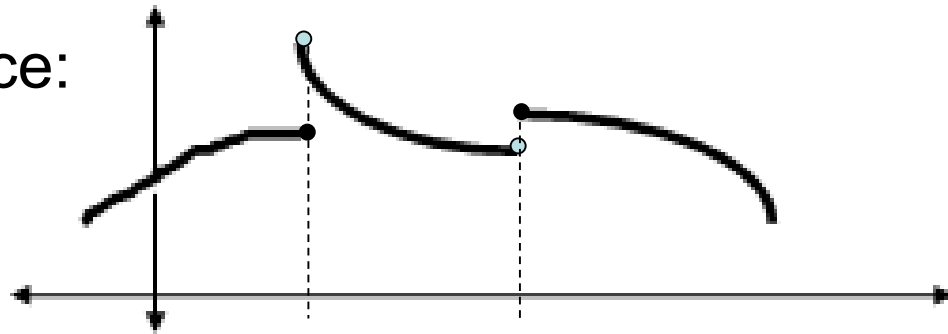
$$\forall x_0 \in X : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

... *spojitost funkce*...souvislost grafu:

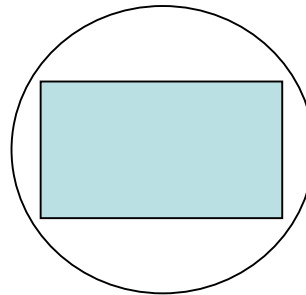


Existence řešení ...

...nespojité funkce:

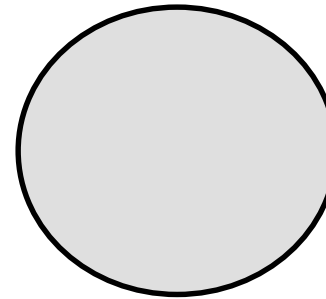


... omezená množina ...vejde se do nějaké „koule“



Existence řešení ...

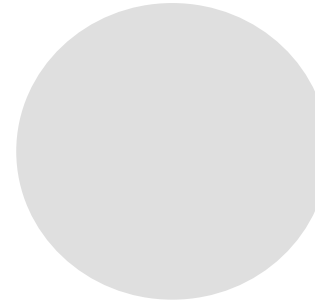
... uzavřená množina:
včetně „hranice“



uzavřený
interval



otevřená množina:
bez „hranice“



otevřený
interval



Existence řešení ...

...co stačí, aby existoval lokální extrém

Věta 2

x^0 je **lokální** maximum funkce $f(x)$,

existuje (parciální) derivace $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}$

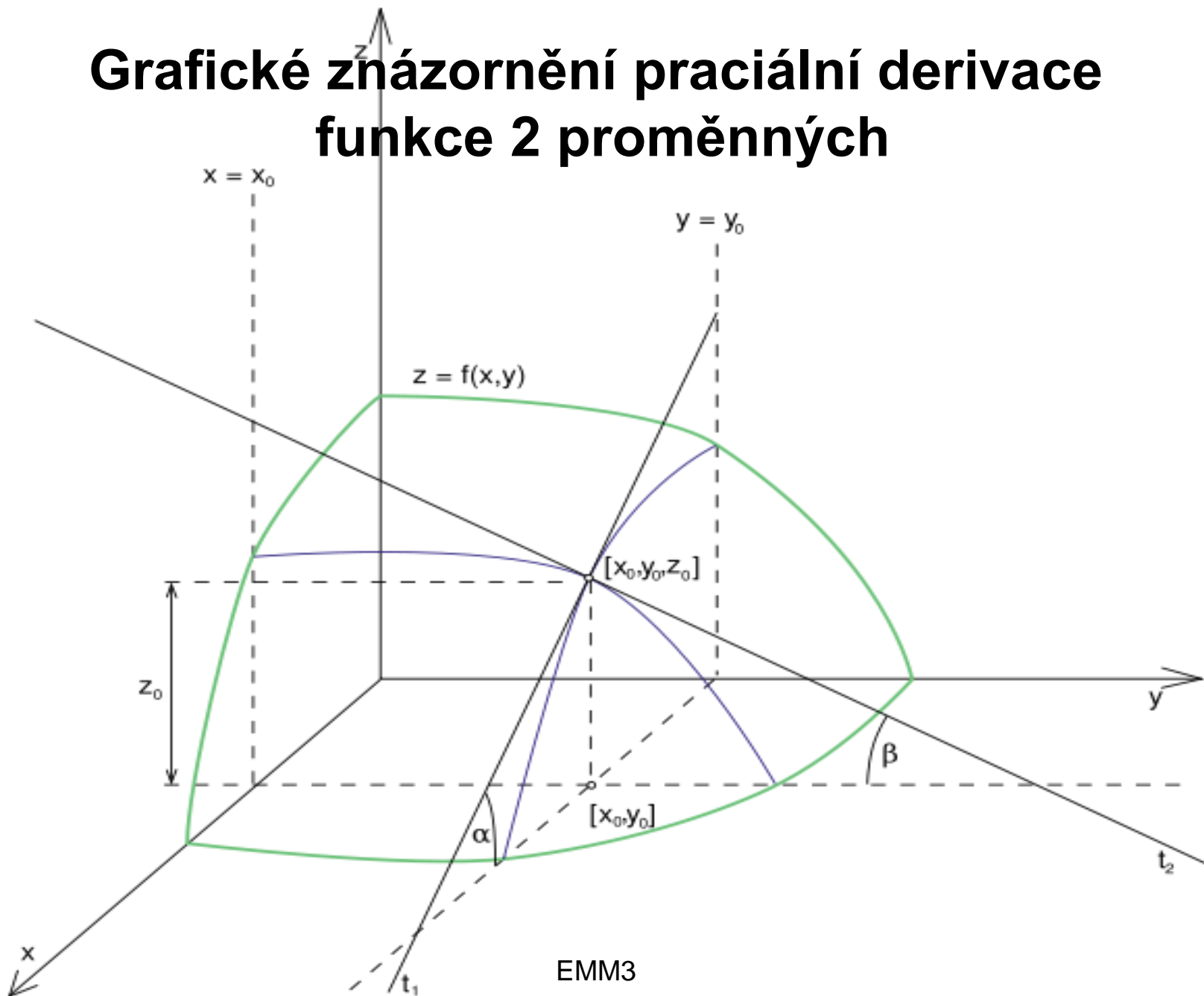
potom $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} = 0$

Je to **Nutná podmínka existence (lokálního!) extrému**
není podmínkou postačující !!!

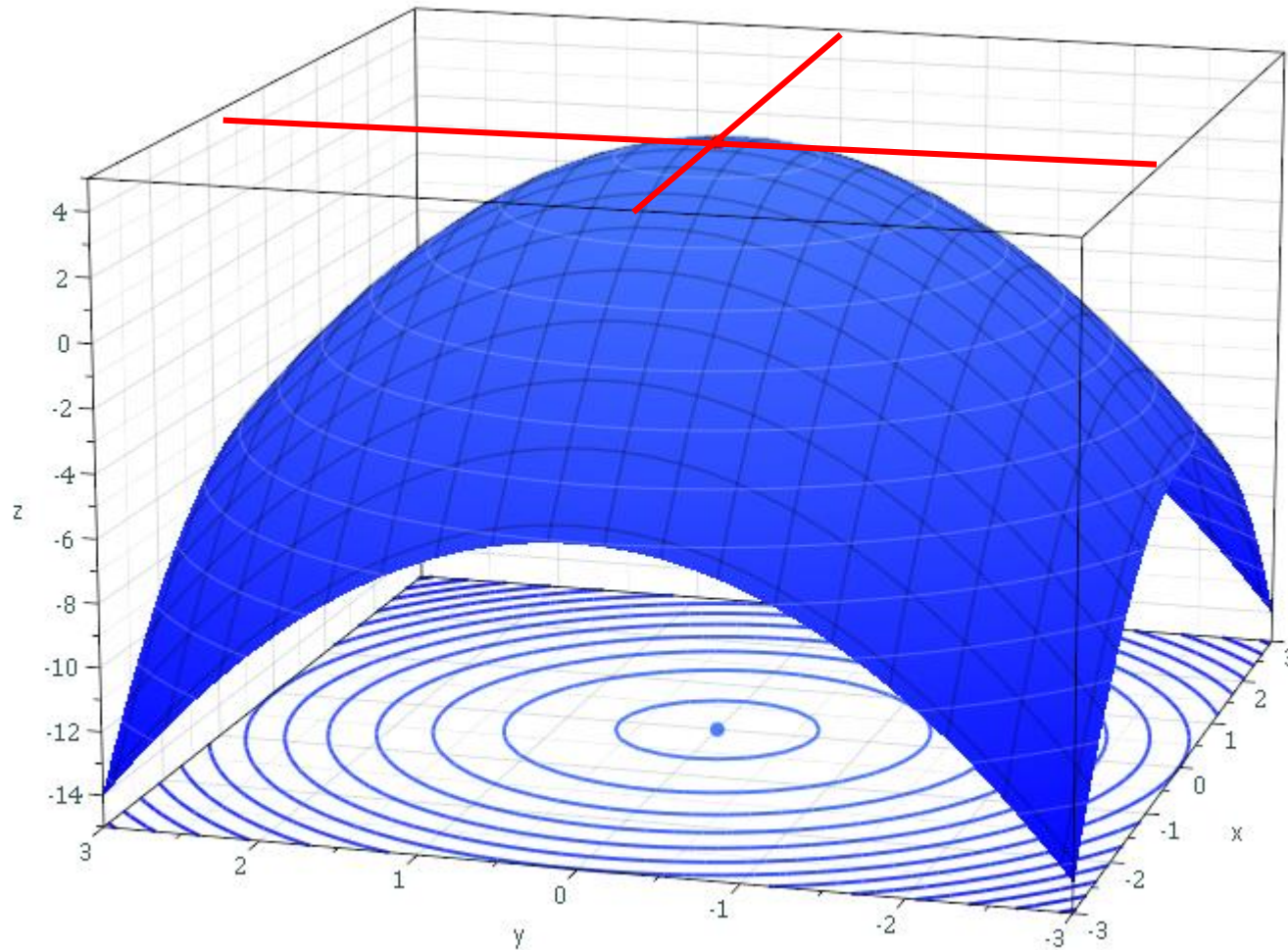
Postačující podmínka existence (lokálního!) extrému: -

- Existence spojitých parciálních derivací v okolí bodu x^0 --
- Pozitivní/negativní definitnost Hessiánu...

Grafické znázornění praciální derivace funkce 2 proměnných

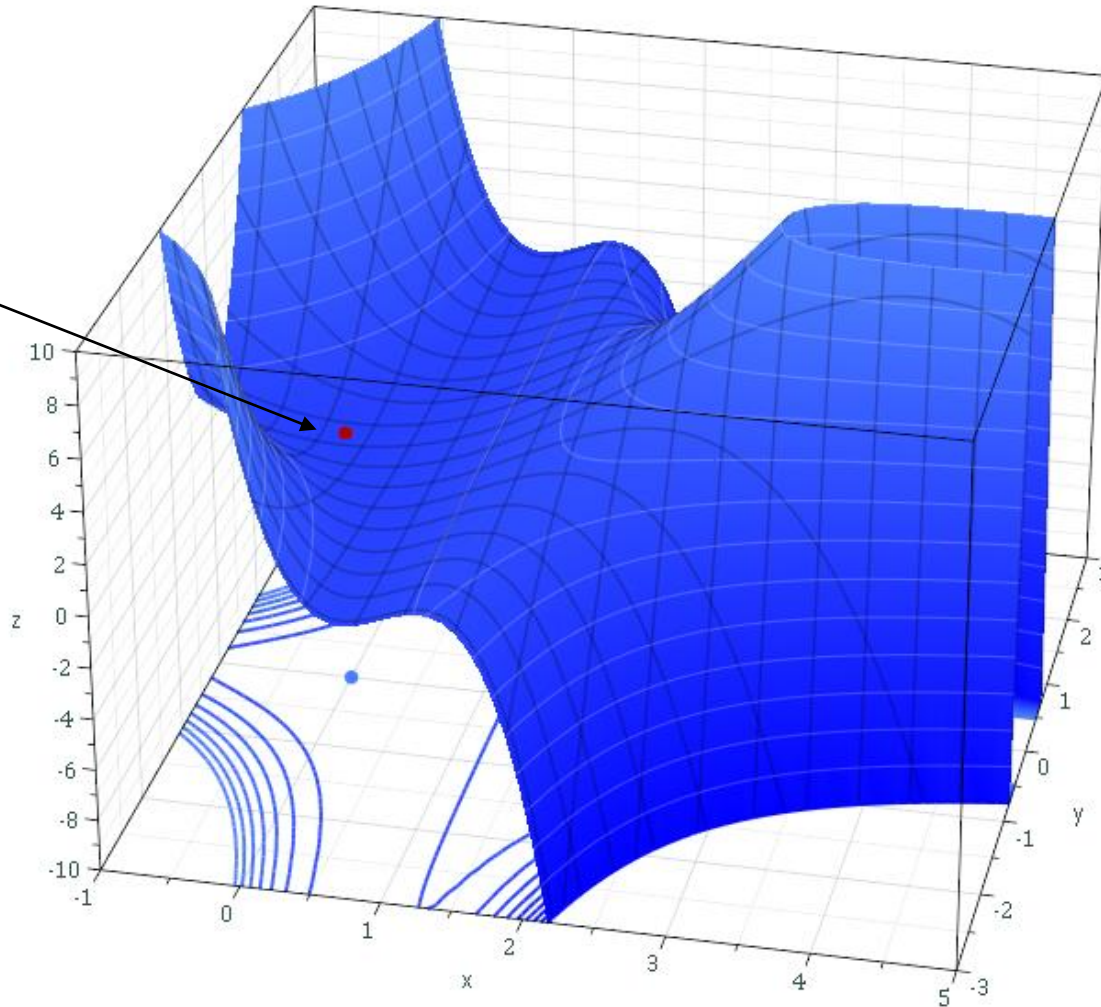


Grafické znázornění globálního maxima funkce 2 proměnných



Grafické znázornění „obecné“ funkce 2 proměnných

lokální
minimum



Existence řešení ...

Prostor \mathbf{R}^n : **pozor!!!** parciální derivace:

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \right)$$

Gradient funkce (vektor parciálních derivací) v bodě $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$

$$H = \left\{ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = \{ \nabla^2 f(\mathbf{x}^0) \}$$

Hessova matice (Hessián) v bodě \mathbf{x}^0

v \mathbf{R}^1 (matematika 1. ročník) : $H = f''(\mathbf{x}^0)$ – „matice“ (1×1)

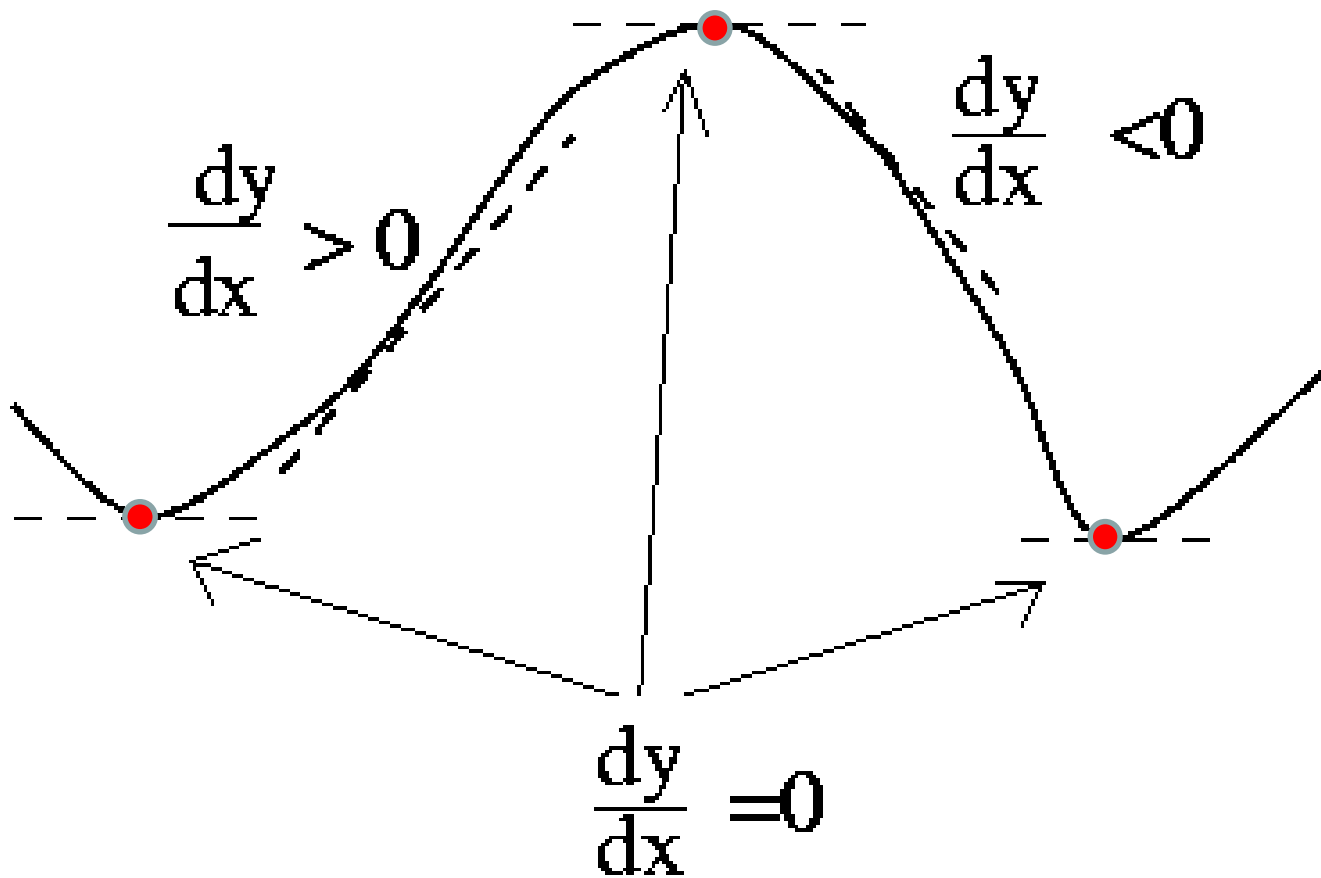
Příklad 1

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 4x_2^2 x_3^2 + 2x_3^4$$

Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1^3 \\ 8x_2 x_3^2 \\ 8x_2^2 x_3 + 8x_3^3 \end{bmatrix}$$

Extrémy a znaménko derivace (schéma)



Existence řešení ...

Postačující podmínka existence lokálního minima funkce v \mathbb{R}

Věta 3 „1“. Jestliže funkce $f(x)$ má *spojitou prvou a druhou derivaci v okolí bodu* $x^0 \in \mathbb{R}^1$,
první derivace je nulová, tj. $f'(x^0) = 0$
a zároveň *druhá derivace je kladná*, tj. $f''(x^0) > 0$,
pak

$x^0 \in \mathbb{R}$ je bodem lokálního *minima* funkce $f(x)$.

Poznámka: pro *maximum* je $f''(x^0) < 0$.

Existence řešení ...

Postačující podmínka existence lokálního minima funkce v \mathbf{R}^n

Věta 3 „n“: (Sylvestrovo kritérium)

Jestliže funkce $f(x)$ má **spojité všechny parciální derivace v okolí bodu** $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$,
gradient $\nabla f(x^0) = \mathbf{0}$

a **všechny hlavní subdeterminanty Hessiánu** $\{\nabla^2 f(x^0)\}$
jsou kladné (tj. > 0)

pak

$x^0 \in \mathbf{R}$ je bodem lokálního **minima** funkce $f(x)$.

Poznámka: pro **maximum** jsou všechny hlavní subdeterminanty Hessiánu funkce **$-f(x)$ kladné!**

Příklad 1 pokrač.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 4x_2^2x_3^2 + 2x_3^4$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 4x_1^3 \\ 8x_2x_3^2 \\ 8x_2^2x_3 + 8x_3^3 \end{bmatrix}$$

Hessián H :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8x_3^2 & 16x_2x_3 \\ 0 & 16x_2x_3 & 8x_2^2 + 24x_3^2 \end{bmatrix}$$

Hlavní subdeterminant = determinant matice, která vznikne z původní matice Vypuštěním postupně n -tého, $n-1$ -ho, ..., 2-ho řádků a zároveň stejných sloupců

Příklad 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 10$$

Gradient $\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_1 - 4, 8x_2 - 8, 4x_3 + 8) \dots = (0, 0, 0)$

právě když platí: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -2$

Hessián H :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \dots = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Příklad 2 pokrač.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det H_1 = 2, \det H_2 = 2 \cdot 8 = 16, \det H_3 = \det H = 2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$$

Výpočet determinantu matice 3x3 – **Sarrusovo pravidlo**

Hlavní subdeterminanty jsou **kladné**: postačující podmínka minima je splněna v bodě $x^0 = (2, 1, -2) \Rightarrow f$ nabývá v tomto bodě **lokální minimum** (je to zároveň globální minimum na \mathbf{R}^3)

$$\min_{x \in \mathbf{R}^3} f(x) = 0$$

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbf{R}^3} f(x) = \{(2, 1, -2)\}$$

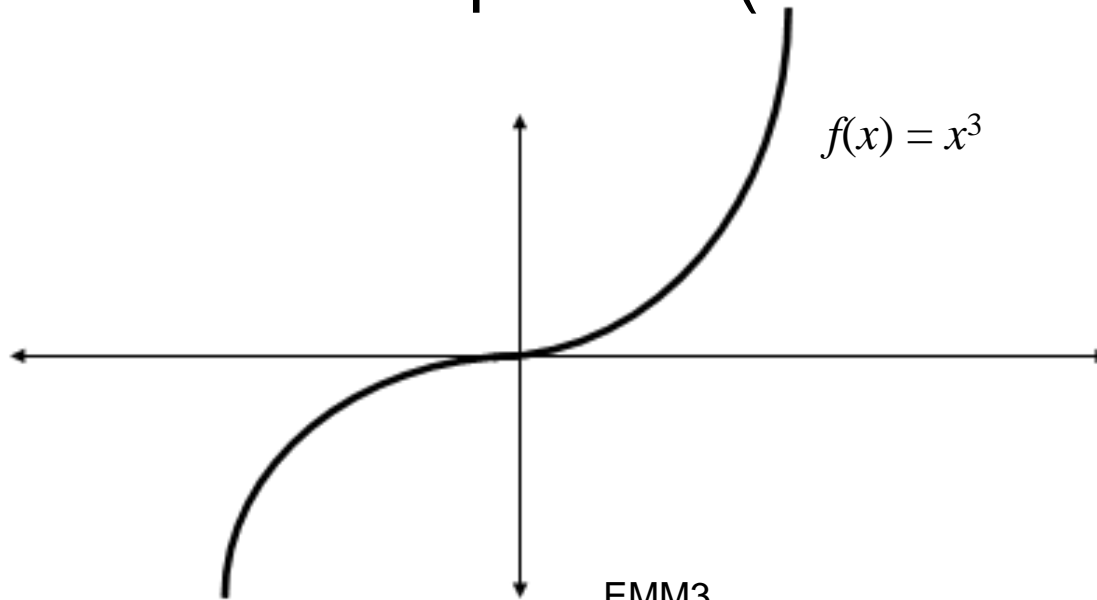
Příklad 3

$f(x) = x^3$ $x^0 = 0$... není bodem extrémů !!!

$$f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$$

$$f'(0) = 0$$

$H = f''(0) = 0$ **Pozor!** postačující podmínka pro extrém není splněna! (Hessián = 0 !!!)



Příklad 4

$$f(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi}{x_1 + x_2} \rightarrow \max;$$

za podmínek

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\} X$$

Existence optimálního řešení je zaručena spojitostí f na X .

Problém je jak ho nalézt!?? (nelineární funkce)

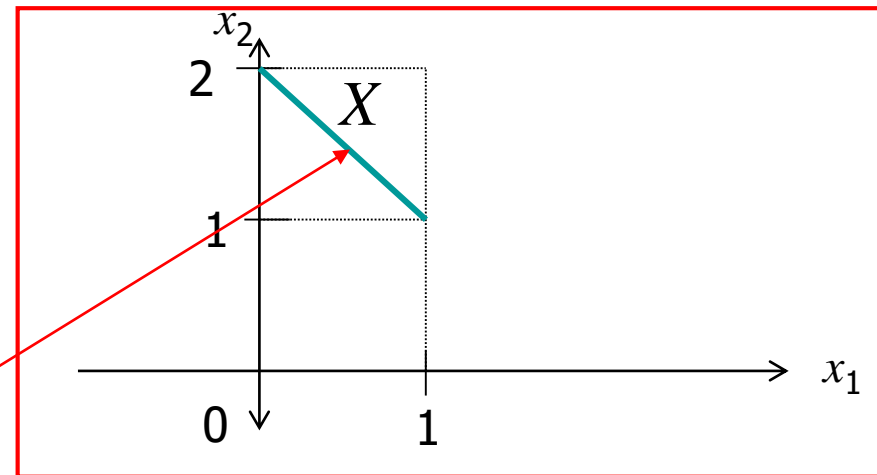
Příklad 4 pokrač. $f(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi}{x_1 + x_2}$

Řešení: Funkce $\sin z$ nabývá maximální hodnotu 1 pro $z = \frac{\pi}{2}$
tj.

$$\frac{\pi}{x_1 + x_2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$1 \leq x_2 \leq 2$$



Maximum funkce f se nabývá ve všech bodech (x_1, x_2) na úsečce spojující body $(0, 2)$ a $(1, 1)$!