Konvexní funkce

Nechť M .... je konvexní množina

$f: M \to \mathbb{R}$ ... funkce

Def.: Funkce f je konvexní $\iff$

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Def.: Funkce f je striktně konvexní $\iff$

$$\forall \underset{x_1 \neq x_2}{x_1, x_2 \in M} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

①: f ... striktně konvexní $\Rightarrow$ f ... konvexní

Tvrzení: (Jensenova nerovnost)

Nechť f ... konvexní

Potom $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_n \in M \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqq 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1:$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Věta: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ ... konvexní

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqq 0$

Potom $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ ... je také konvexní

Věta: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ ... konvexní

Potom $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ .... je také konvexní ... tj.

tj. $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$

Věta: Jestliže $f(x)$ ... konvexní,

potom $f(Ay+b)$ ...... je také konvexní

$Ay+b$ ← lineární

tj. $g(y) = f(Ay+b)$

Věta: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ .... otevřená a konvexní množina .... ve vektorovém prostoru konečné dimenze

$f: M \to \mathbb{R}$ .... konvexní funkce

Potom f je spojitá.

Důkaz: Na $\mathbb{R}^n$ uvažujme ℓ^∞, tj. max-normu .... $\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Zvolme bod $x_0 \in M$. Máme ukázat, že f je spojitá v bodě $\underline{x_0}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- zvol $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow$ hledáme $\delta > 0$
- protože $x_0 \in M$ ... otevřená $\implies \exists K > 0:$ K-okolí (uzavřené) bodu $x_0 \subseteq M$

K-okolí bodu je krychle ... polytop ... je konvexním obalem svých 2^n vrcholů

nechť $x_1, x_2, \dots, x_{2^n}$ ... vrcholy K-okolí bodu $\underline{x_0}$

tudíž

$\forall x \in$ K-okolí bodu $\underline{x_0}$ $\exists \lambda_1 \dots \lambda_{2^n} \geqq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{2^n} = 1$: $\ x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{2^n} x_{2^n}$

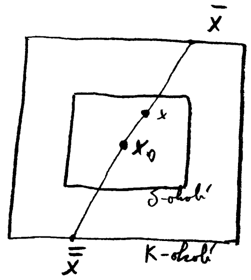
f ... konvexní, tudíž

$$f(x) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{2^n} f(x_{2^n}) \leqq \lambda_1 m + \dots + \lambda_{2^n} m = m, \quad \text{kde}$$

$$m = \max\{f(x_1), \dots, f(x_{2^n})\}$$

Zvolme bod $x \in M$, $x \neq x_0$ libovolně tak, aby

$0 < \|x - x_0\| < K$



Nechť / Položme

$$\bar{x} = x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)$$
$$\bar{\bar{x}} = x_0 - \lambda \cdot (x - x_0)$$

kde $\lambda > 0$ je voleno tak, aby $\|\bar{x} - x_0\| = \|\bar{\bar{x}} - x_0\| = K$

tedy $\lambda \cdot \|x - x_0\| = K$

Tedy $\quad \bar{x} = x_0 + K \cdot \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ $\qquad$ ①: bod $\underline{x}$ ... je konvexní kombinací $\underline{x_0}$ a $\underline{\bar{x}}$

$\bar{\bar{x}} = x_0 - K \cdot \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ $\qquad$ ②: bod $\underline{x_0}$ ... je konvexní kombinací $\underline{x}$ a $\underline{\bar{\bar{x}}}$

$$x = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 \bar{x} = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0 + \frac{\lambda_2 K}{\|x - x_0\|} x - \frac{\lambda_2 K}{\|x - x_0\|} x_0$$

$$\frac{\lambda_2 K}{\|x - x_0\|} = 1 \implies \lambda_2 = \frac{\|x - x_0\|}{K} \quad \text{a} \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_2$$

Tudíž:

Tudíž:
$$f(x) \leq \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f(\bar{x}) \leq \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 m = (1-\lambda_2) f(x_0) + \lambda_2 m$$

$$f(x) - f(x_0) \leq \frac{\|x - x_0\|}{K} \cdot (m - f(x_0))$$

Obdobně:

$$x_0 = \lambda_1 x + \lambda_2 \bar{\bar{x}} = \lambda_1 x + \lambda_2 x_0 - \frac{\lambda_2 K}{\|x - x_0\|} x + \frac{\lambda_2 K}{\|x - x_0\|} x_0$$

$$\lambda_2 \cdot \left(1 + \frac{K}{\|x - x_0\|}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\|x - x_0\|}{K + \|x - x_0\|} \quad \text{a} \quad \lambda_1 = \frac{K}{K + \|x - x_0\|}$$

Tudíž:
$$f(x_0) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(\bar{\bar{x}}) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 m = (1-\lambda_2) f(x) + \lambda_2 m$$

$$\lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f(x_0) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 m$$

$$\lambda_1 \cdot (f(x_0) - f(x)) \leq \lambda_2 \cdot (m - f(x_0))$$

$$f(x_0) - f(x) \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot (m - f(x_0)) = \frac{\|x - x_0\|}{K} \cdot (m - f(x_0))$$

Tedy dohromady:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\|x - x_0\|}{K} \cdot (m - f(x_0)) = \frac{m - f(x_0)}{K} \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{< \delta} \leq \frac{m - f(x_0)}{K} \cdot \delta < \varepsilon$$

je dokonce lipschitzovsky spojitá v každém bodě

budeme chtít

chceme

Tedy zvol $\delta > 0$ tak, aby

$$\delta < \frac{\varepsilon \cdot K}{m - f(x_0)}$$

.... ①: $f(x_0) \leq m$

②: jestliže $f(x_0) = m$,
potom $f(x_1) = \dots = f(x_{2^n}) = m$
a $f \equiv m$ na celém K-okolí bodu $\underline{x_0}$
$\Rightarrow$ je v bodě $\underline{x_0}$ spojitá (např. $\delta = K$)

$\Downarrow$

na celém K-okolí nabývá globálního minima na M.

c.b.d.

Věta: Jestliže M ... konvexní

$f: M \to \mathbb{R}$ – spojitá

$$\forall x_1, x_2 \in M: \ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Potom f je konvexní.

Důkaz: (sporem)

$$\exists x_1, x_2 \in M \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Uvažujme úsečku

$$P = \{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2;\ \mu_1+\mu_2 = 1,\ \mu_1, \mu_2 \geqq 0\}$$ ... určenou body x_1 a x_2

a funkci

$$g(\mu) = f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) + (1-\mu)\cdot(f(x_1)-f(x_2))$$

Pak $g(0) = g(1) = f(x_1)$

a $g(\lambda_1) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_2 \cdot (f(x_1)-f(x_2)) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_2 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2) = f(x_1)$

Dále: g ... spojitá $\Rightarrow$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá max. hodnoty m

$$\exists \xi \in \langle 0,1\rangle: g(\xi) = m \quad \text{a} \quad \forall \mu \in \langle 0,1\rangle: g(\mu) \leq m$$

ovšem $g(0) = g(1) = f(x_1) < g(\lambda_1) \leq m \implies \xi \in (0,1)$ ... $0 < \xi < 1$

Dále $$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{2} \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{2} = f(x_1) \implies \xi \neq \tfrac{1}{2}$$

Např. $\xi \in (\frac{1}{2}, 1) \longrightarrow$ $$\frac{g(0)+g(2\xi-1)}{2} < \frac{m+g(2\xi-1)}{2} \leqq \frac{m+m}{2} = m = g(\xi)$$

neboli $$\frac{f(x_1) + f((2\xi-1)\cdot x_1 + (2-2\xi)x_2) + (2-2\xi)\cdot(f(x_1)-f(x_2))}{2} < f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) + (1-\xi)(f(x_1)-f(x_2))$$

neboli $$f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) > \frac{f(x_1) + f((2\xi-1)x_1 + (2-2\xi)x_2)}{2}$$

$$f\left(\frac{x_1 + (2\xi-1)x_1 + (2-2\xi)x_2}{2}\right)$$

...... spor s předpokladem

c. b. d.

__Úvaha:__ Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ ... interval

$f: I \to \mathbb{R}$ ... konvexní funkce

Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in I$ ... tři body ... $x_1 < x_2 < x_3$

Potom

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot x_3$$

a tudíž

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3)$$

$$(x_3 - x_1) \cdot f(x_2) \leq (x_3 - x_2) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_3)$$

Následně

$$(x_3 - x_1) \cdot \left(f(x_2) - f(x_1)\right) \leq (x_2 - x_1) \cdot \left(f(x_3) - f(x_1)\right)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

neboli funkce $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ neklesá v intervalu $I \cap (x_1, +\infty)$

? má dolní mez pro $x \to x_1^+$?

Obdobně

$$(x_3 - x_2) \cdot \left(f(x_3) - f(x_1)\right) \leq (x_3 - x_1) \cdot \left(f(x_3) - f(x_2)\right)$$

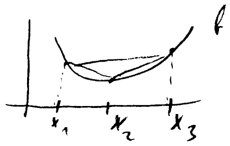
$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

neboli funkce $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3}$ neklesá v intervalu $(-\infty, x_3) \cap I$

? má horní mez pro $x \to x_3^-$?

Dohromady:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

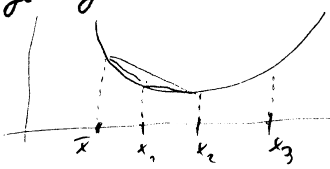


Zvolme ještě bod $\bar{x} \in I$, $\bar{x} < x_1 < x_2 < x_3$

Pak

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}}}_{\text{dolní mez, pokud } \exists \bar{x} \in I:\ \bar{x} < x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\bar{x})}{x_2 - \bar{x}} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

tudíž limita $f'_+(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ ... existuje a je $\overbrace{\text{konečná}}^{\text{pokud } \exists \bar{x} \in I:\ \bar{x} < x_1}$

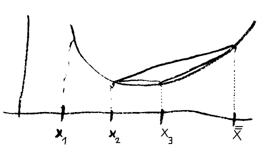


Zvolme bod $\bar{\bar{x}} \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 < \bar{\bar{x}}$

Pak

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(\bar{\bar{x}}) - f(x_2)}{\bar{\bar{x}} - x_2} \leq \underbrace{\frac{f(\bar{\bar{x}}) - f(x_3)}{\bar{\bar{x}} - x_3}}_{\text{horní mez, pokud } \exists \bar{\bar{x}} \in I:\ x_3 < \bar{\bar{x}}}$$

tudíž limita $f'_-(x_3) = \lim\limits_{x \to x_3^-} \dfrac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3}$ ..... existuje a je konečná, pokud



Odvodili jsme:

Věta: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ .... je otevřený interval (může být i nekonečný) (a,b), $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$

$f: I \to \mathbb{R}$ ... konvexní funkce

Potom $\forall x \in I$: f má v bodě x konečnou derivaci zleva $f'_-(x)$ i zprava $f'_+(x)$.

Úvaha: Z předchozí úvahy víme, že

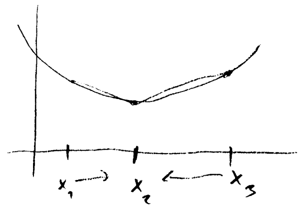
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

tudíž

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \quad \Bigg| \lim_{x_1 \to x_2^-} \quad \lim_{x_3 \to x_2^+}$$

tudíž

$$f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$



Odvodili jsme:

Věta: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval

$f: I \to \mathbb{R}$ ... konvexní

Potom: $\forall x \in I$: $f'_-(x) \leq f'_+(x)$

Věta: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval
a $f: I \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce

Potom a) derivace zleva f'_- je neklesající a zleva spojitá v I

b) derivace zprava f'_+ je neklesající a zprava spojitá v I

Důkaz: Z předpředchozí úvahy plyne, že pro $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, platí

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leqq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2} \leqq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$$

tudíž ($\lim\limits_{x_2 \to x_1^+}$ a $\lim\limits_{x_3 \to x_4^-}$)

$$f'_+(x_1) \leqq f'_-(x_4)$$

a tudíž (předch. věta)

$$f'_-(x_1) \leqq f'_+(x_1) \leqq f'_-(x_4) \leqq f'_+(x_4)$$

Tudíž f'_- i f'_+ jsou neklesající v I.

$\Longrightarrow$ v každém bodě $x_0 \in I$ mají limitu zleva i zprava

a platí:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) \leqq f'_-(x_0) \leqq f'_+(x_0) \leqq \lim_{x \to x_0^+} f'_+(x)$$

Podle předpředch. úvahy platí

- zvol $x_0 \in I$
- zvol $x_1, x_2, x_3 \in I$ tak, aby

tak, aby $x_1 < x_2 < x_3 < x_0$

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

a tudíž ($\lim\limits_{x_2 \to x_3^-}$)

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqq f'_-(x_3)$$

Pokud $x_3 < x_0$ ... pak $\lim\limits_{x_3 \to x_0^-}$ ... f ... spojitá

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x)$$

tudíž ($\lim\limits_{x_1 \to x_0^-}$)

$$f'_-(x_0) \leqq \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x)$$

Tudíž $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0)$ ... je zleva spojitá

tak, aby $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$

a

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

($\lim\limits_{x_2 \to x_1^+}$)

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

... Pokud $x_0 < x_1$ ... pak $\lim\limits_{x_1 \to x_0^+}$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq \frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}$$

($\lim\limits_{x_3 \to x_0^+}$)

$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)$$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0)$ ... je zprava spojitá

c.b.d.

Věta: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval

a $f : I \to \mathbb{R}$ je konvexní

Potom

$$\forall x, y \in I: \quad x < y \implies f(y) \geqq f(x) + f'_+(x) \cdot (y - x)$$

$$y < x \implies f(y) \geqq f(x) + f'_-(x) \cdot (y - x)$$

Důkaz:

a) zvolme $x, x', y \in I$, $x < x' < y$

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqq \frac{f(y) - f(x')}{y - x'} \quad \Big| \lim_{x' \to x^+} ()$$

$$f'_+(x) \leqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

b) ... obdobně ... zvol $y, x', x \in I$, $y < x' < x$,

ve formuli výše zaměň "y" a "x" a uvažuj $\lim_{x' \to x^-} ()$

c.b.d.

Definice: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval

a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce mající jednostranné derivace

$f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ v bodě $x \in I$.

$f'_+(x)$, $f'_-(x)$ ...... existují

Funkce f je lokálně konvexní v bodě $x \in I \iff$

$$\forall y \in I: \quad x < y \implies f(y) \geqq f(x) + f'_+(x) \cdot (y - x)$$

$$y < x \implies f(y) \geqq f(x) + f'_-(x) \cdot (y - x)$$

Lemma: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval

a $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce mající konečné jednostranné derivace $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ v každém bodě $x \in I$.

$f'_+(x), f'_-(x)$ — existují a jsou konečné v každém bodě $x \in I$

jestliže funkce f je lokálně konvexní v každém bodě $x \in I$

$$\forall x, y \in I: \quad x < y \Rightarrow f(y) \geqq f(x) + f'_+(x) \cdot (y-x)$$
$$\qquad\qquad y < x \Rightarrow f(y) \geqq f(x) + f'_-(x) \cdot (y-x)$$

potom

$$\forall x \in I: \quad f'_-(x) \leqq f'_+(x)$$

Důkaz: (sporem)

Předpokládejme pro spor, že $\exists \hat{x} \in I: \; f'_-(\hat{x}) > f'_+(\hat{x})$

Uvažujme funkci

$$g(y) = f(\hat{x}+y) - \frac{f'_+(\hat{x}) + f'_-(\hat{x})}{2} \cdot y$$

pro $y \in J = \{x - \hat{x} \,;\, x \in I\}$

Vidíme, že J je otevřený interval

a $$g'_+(0) = f'_+(\hat{x}) - \frac{f'_+(\hat{x}) + f'_-(\hat{x})}{2} = \frac{f'_+(\hat{x}) - f'_-(\hat{x})}{2} < 0$$

$$g'_-(0) = f'_-(\hat{x}) - \frac{f'_+(\hat{x}) + f'_-(\hat{x})}{2} = \frac{f'_-(\hat{x}) - f'_+(\hat{x})}{2} > 0$$

tedy funkce g má v bodě $y = 0$ ostré lokální maximum:

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall y \in J: \; |y| < \delta \wedge y \neq 0 \Rightarrow g(y) < g(0)$$

Protože jednostranné derivace $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ existují, v každém bodě $x \in I$,
(a jsou konečné)

funkce f je spojitá v každém bodě $x \in I$ zleva i zprava. Tedy je spojitá.
Proto i funkce g je spojitá v intervalu J.

Zřejmě platí $g(0) > g(\frac{\delta}{2})$ .... protože funkce g v bodě 0 má ostré lokální maximum

Protože funkce g má v bodě 0 ostré lokální maximum a funkce g je spojitá,

$$\exists y_0 \in (-\delta, 0): \quad g(\tfrac{\delta}{2}) < g(y_0) < g(0)$$

Nechť

$$y^* = \sup \{ \bar{y} \in \langle y_0, 0) ; \quad \forall y \in (y_0, \bar{y}): \ g(y_0) > g(y) \}$$

Jestliže $y^* = 0$, potom $g(y) < g(y_0) < g(0)$ pro všechna $y \in (y_0, 0)$.
Potom $g'_-(0) = +\infty$, což je spor, protože derivace $g'_-(0)$ má být konečná.
Je tedy $y_0 \leqq y^* < 0$

Tedy

$$\forall \bar{y} \in (y^*, 0) \ \exists y \in \langle y^*, \bar{y}): \quad g(y_0) \leq g(y)$$

Protože funkce g je v bodě y^* spojitá zprava, dostáváme $g(y_0) \leqq g(y^*)$

Dále platí

$$\forall y \in (y_0, y^*): \quad g(y_0) > g(y)$$

Protože funkce g je v bodě y^* spojitá zleva, dostáváme $g(y_0) \geqq g(y^*)$.

Dohromady: $g(y_0) = g(y^*)$.

$\longrightarrow$

Protože funkce f je lokálně konvexní (v každém bodě $x \in I$), funkce g je rovněž lokálně konvexní v každém bodě $y \in J$.

Je tedy $y_0 \leqq y^* < 0 < \frac{\delta}{2}$

tudíž $g(\frac{\delta}{2}) \geqq g(y^*) + g'_+(y^*) \cdot (\frac{\delta}{2} - y^*)$

Protože $g(\frac{\delta}{2}) < g(y_0) = g(y^*) < g(0)$,

musí být $g'_+(y^*) < 0$.

Tudíž $\exists \bar{y} \in (y^*, 0) \ \forall y \in (y^*, \bar{y}) : \ g(y^*) > g(y)$, což je spor,

protože $\forall \bar{y} \in (y^*, 0) \ \exists y \in (y^*, \bar{y}) : \ g(y_0) \leqq g(y)$ a $g(y_0) = g(y^*)$.

Je tedy $f'_-(x) \leqq f'_+(x)$ pro každé $x \in I$,

c. b. d.

Nyní zpátky do $\mathbb{R}^n$

Definice: Nechť M je otevřená (a konvexní) množina a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce mající jednostrannou směrovou derivaci $\delta^+_{\vec{v}} f(x)$ v bodě $x \in M$ v každém směru $\vec{v}$

$$\delta^+_{\vec{v}} f(x) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda\vec{v}) - f(x)}{\lambda}$$ ...... existuje pro každý směr $\vec{v}$

Funkce f je lokálně konvexní v bodě $x \in M \iff$

$$\forall y \in M: \ f(y) \geqq f(x) + \delta^+_{y-x} f(x)$$

Věta: Nechť M je otevřená a konvexní množina a $f: M \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce.

Potom

funkce f je konvexní $\iff$ jednostranná směrová derivace $\delta^+_{\vec{v}} f(x)$ ... existuje a je konečná v každém bodě $x \in M$ a pro každý směr $\vec{v}$

&

funkce f je lokálně konvexní v každém bodě $x \in M$.

Důkaz:

$\Longrightarrow$ ... plyne z předchozích výsledků

$\Longleftarrow$ ... zvol dva body $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, a dvě čísla $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Polož $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

Z předchozího $\Rightarrow$ směrová derivace $\delta^+_{\vec{v}} f(x)$ existuje & je konečná

&

$$\delta^+_{\vec{v}} f(x) \geqq -\delta^+_{-\vec{v}} f(x)$$

$$x_1 - x = x_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda_2 x_1 - \lambda_2 x_2$$

$$x_2 - x = x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_2 - \lambda_1 x_1$$

Protože f je lokálně konvexní

$$f(x_1) \geqq f(x) + \delta^+_{x_1 - x} f(x) = f(x) + \lambda_2 \delta^+_{x_1 - x_2} f(x) \quad | \cdot \lambda_1$$

$$f(x_2) \geqq f(x) + \delta^+_{x_2 - x} f(x) = f(x) + \lambda_1 \delta^+_{x_2 - x_1} f(x) \quad | \cdot \lambda_2$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geqq f(x) + \lambda_1\lambda_2 \left(\delta^+_{x_1 - x_2} f(x) + \delta^+_{x_2 - x_1} f(x)\right) \geqq f(x)$$, c.b.d.

Cvičení: Nechť M je otevřená množina

a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce mající jednostrannou směrovou derivaci $\delta^+_{\vec{v}} f(x^*)$ v bodě $x^* \in M$ v každém směru $\vec{v}$.

a) jestliže f má v bodě $\underline{x}^*$ lokální minimum,

potom $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n: \ \delta^+_{\vec{v}} f(x^*) \geqq 0$

b) jestliže $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n: \ \delta^+_{\vec{v}} f(x^*) > 0$,

potom f má v bodě $\underline{x}^*$ ostré lokální minimum. ...... NEPLATÍ!

Věta (cvičení):

Nechť M je konvexní množina

a $f: M \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce.

Potom

a) každé lokální minimum funkce f je jejím globálním minimem,

b) množina

$$M_{opt} = \arg\min_{x \in M} f(x) = \left\{ x^* \in M \ ; \ f(x^*) = \min_{x \in M} f(x) \right\}$$

je konvexní,

c) jestliže f je striktně konvexní,

potom M_{opt} je nejvýše jednobodová.

Důsledek: Nechť M je otevřená a konvexní a $f: M \to \mathbb{R}$ je konvexní.

[Pozn.: M … otevřená $\Downarrow$ úloha na volný extrém]

Potom
$$x \in M_{opt} \iff \forall \vec{v}: \ \delta^+_{\vec{v}} f(x) \geqq 0$$

tj. $$M_{opt} = \{ x \in M ; \ \forall \vec{v}: \ \delta^+_{\vec{v}} f(x) \geqq 0 \}$$

Poznámka: Jestliže navíc f je gâteauxovsky diferencovatelná, potom
$$x \in M_{opt} \iff Df(x) = 0$$ …… tj. $\underline{x}$ je stacionární bod

Definice: Funkcionál $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární $\iff$

a) p je positivně homogenní
$$p(\lambda x) = \lambda p(x)$$ …… pro každé $\underline{x}$, pro každé $\lambda > 0$ } positivní homogenita

b) p je subaditivní
$$p(x+y) \leqq p(x) + p(y)$$ …… pro každé x, y } subaditivita (trojúhelníková nerovnost)

Pozorování: $p(0) = 0$

Důkaz: $$p(0) = p(2 \cdot 0) = 2 \cdot p(0) = p(0) + p(0)$$
$$0 = p(0)$$
c.b.d.

Tudíž: $$p(\lambda x) = \lambda p(x)$$ …… pro všechna $\lambda \geqq 0$

Pozorování / Tvrzení: Jestliže p je sublineární, potom je konvexní.

Důkaz: $$p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq p(\lambda_1 x_1) + p(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 p(x_1) + \lambda_2 p(x_2)$$
c.b.d.

Směrová derivace $\partial^+_{\vec{v}} f(x_0)$ a sublineární funkcionál:

__Tvrzení:__ Nechť M je otevřená a konvexní

$f : M \to \mathbb{R}$ je konvexní

$x_0 \in M$ je libovolný bod

Potom funkcionál

$$p : \vec{v} \mapsto \partial^+_{\vec{v}} f(x_0) \quad \text{je sublineární.}$$

(důkaz - cvičení)

Sublineární funkcionál a Minkowského funkcionál:

__Definice:__ Množina M je pohlcující $\iff$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists \lambda > 0 : \quad \lambda x \in M$$

ekvivalentně: $\exists \lambda > 0 : \quad x \in \lambda M$

$\odot$: $0 \in M$ ..... uvažuj $x = 0$

__Definice:__ Nechť M je pohlcující množina.
Minkowského funkcionálem množiny M rozumíme funkcionál

$$p_M(x) = \inf \{ \lambda > 0 \; ; \; x \in \lambda M \}$$

__Věta:__ Nechť M je libovolná konvexní pohlcující množina.
Potom Minkowského funkcionál p_M je sublineární.

__Věta:__ Nechť p je jakýkoliv nezáporný sublineární funkcionál. ..... jen pro $p \geqq 0$
Položme $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; p(x) \leqq 1 \}$

Potom $p = p_M$ a množina M je konvexní a pohlcující a platí $p = p_M$.
Jestliže sublineární funkcionál p je spojitý [což v $\mathbb{R}^n$ je vždy],
potom množina M je navíc uzavřená.

$\rightarrow$

Věta: Nechť M je konvexní pohlcující množina. Minkowského funkcionál p_M je spojitý $\iff$

$\iff$ množina M je okolím nuly (počátku),

tj. obsahuje okolí (resp. ε-okolí) nuly.

Věta: Nechť M, N jsou (konvexní) pohlcující množiny.

Potom $$p_M \leqq p_N \iff M \supseteq N$$

ještě ke spojitosti:

Věta: Sublineární funkcionál je spojitý (v každém bodě $\underline{x}$) $\iff$ je spojitý v bodě $x = 0$.

Subdiferenciál konvexní funkce a sublineární funkcionál:

Nechť X je normovaný lineární prostor (NLP), tj.
vektorový prostor s normou, např. $X = \mathbb{R}^n$ s nějakou normou.

Nechť X^* je jeho topologický duál, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na X

$$X^* = \{ \varphi : X \to \mathbb{R} \; ; \; \varphi \text{ ... je lineární \& spojité} \}$$

norma na X^*: $\quad \|\varphi\| = \sup\limits_{\|x\| \leqq 1} |\varphi(x)|$

Pozn.: Klíčová nerovnost:
$$|\varphi(x)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|x\|$$

Definice: Množina $\partial \subseteq X^*$ je omezená $\iff$

$$\exists K > 0 \quad \forall \varphi \in \partial : \quad \|\varphi\| \leqq K$$

Věta: Nechť $\partial \subseteq X^*$ je libovolná neprázdná omezená množina.
Potom funkcionál $p : X \to \mathbb{R}$ zavedený vztahem

$$p(x) = \sup_{\varphi \in \partial} \varphi(x)$$

je sublineární a je i spojitý.

Definice: Nechť M je otevřená a konvexní množina
a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá konvexní funkce.

Subdiferenciálem funkce f v bodě $\underline{x_0} \in M$ rozumíme množinu

$$\partial f(x_0) = \{ \underset{\varphi : X \to \mathbb{R} \text{ ... lineární \& spojité}}{\varphi \in X^*} \; ; \quad \forall \vec{h} \in X : \quad f(x_0 + \vec{h}) - f(x_0) \geqq \varphi(\vec{h}) \}$$

Poznámka: jestliže konvexní funkce f má v bodě $\underline{x_0}$ Gâteauxovu derivaci $Df(x_0)$,

potom $\partial f(x_0) = \{ Df(x_0) \}$ — subdiferenciál obsahuje jediný prvek, totiž tu derivaci

Poznámka: Už víme, že (spojitá) konvexní funkce f je v bodě $x_0 \in M$ lokálně konvexní:

$$\forall \vec{h} \in X : \quad f(x_0+\vec{h}) \geqq f(x_0) + \delta^+_{\vec{h}} f(x_0)$$

To znamená, že

$$\partial f(x_0) = \{ \varphi \in X^* ; \quad \forall \vec{h} \in X : \quad \varphi(\vec{h}) \leqq \delta^+_{\vec{h}} f(x_0) \}$$

Motivace: Již víme, že funkcionál

$$p(\vec{h}) = \delta^+_{\vec{h}} f(x_0)$$

je sublineární. Jaká je jeho souvislost se subdiferenciálem?

Poznámka: Nechť M ... otevřená a konvexní

$f : M \to \mathbb{R}$ ... (spojitá a) konvexní
netřeba

Už víme, že

$$M_{opt} = \{ x \in M ; \quad \forall \vec{h} \in X : \quad \delta^+_{\vec{h}} f(x) \geqq 0 \}$$

Ekvivalentně

$$0 \in \partial f(x)$$

$$M_{opt} = \{ x \in M ; \quad 0 \in \partial f(x) \}$$

Dodatek ke spojitosti: Víme, že když $\partial \subseteq X^*$ je omezená, potom

$$p(x) = \sup_{\varphi \in \partial} \varphi(x) \quad \text{je sublineární a spojitý.}$$

Věta: Nechť sublineární funkcionál $p : X \to \mathbb{R}$ je spojitý. Potom subdiferenciál $\partial = \partial p(0)$ je omezená množina.

Poznámka: Množina $\partial = \partial p(0)$ je také uzavřená (w^*- uzavřená).

$\Rightarrow$ w^*- kompaktní

Mějme $p : X \to \mathbb{R}$ .... spojitý sublineární funkcionál.

Uvažujme $\qquad \forall \vec{h} \in X: \quad \varphi(\vec{h}) \leq p(\vec{h})$

$$\partial = \partial p(0) = \{ \varphi \in X^* ; \quad \varphi \leqq p \}$$ .... jeho subdiferenciál v nule

<u>Věta:</u> $p(x) = \max \{ \varphi(x) ; \varphi \in \partial p(0) \}$ .... <u>Poznámka:</u> maximum se skutečně nabývá v nějakém $\varphi \in \partial p(0)$

<u>Důkaz:</u> - zvol $x \in X$

$\geqq$ .... jasné

$\leqq$ ..... pomocí Hahn-Banachovy věty

<u>Věta:</u> Nechť $p, q : X \to \mathbb{R}$ jsou spojité sublineární funkcionály.

Potom $\quad p \leqq q \quad \Longleftrightarrow \quad \partial p(0) \subseteq \partial q(0)$

<u>Důkaz:</u>

$\Rightarrow$ — snadné — zvol $\varphi \in \partial p(0)$

- pak $\forall x \in X: \quad \varphi(x) \leqq p(x) \leqq q(x)$

- tudíž $\varphi \in \partial q(0)$

$\Leftarrow$ víme, že $\quad p(x) = \max \{ \varphi(x) ; \varphi \in \partial p(0) \}$

$\qquad q(x) = \max \{ \varphi(x) ; \varphi \in \partial q(0) \}$

jestliže $\partial p(0) \subseteq \partial q(0)$, potom

$\forall x \in X:$

$p(x) = \max \{ \varphi(x) ; \varphi \in \partial p(0) \} \leqq \max \{ \varphi(x) ; \varphi \in \partial q(0) \} = q(x)$ <u>c.b.d.</u>

<u>Důsledek:</u> jestliže funkcionály $p, q : X \to \mathbb{R}$ jsou sublineární a spojité, potom $\quad p = q \quad \Longleftrightarrow \quad \partial p(0) = \partial q(0)$

Máme:

$p : X \to \mathbb{R}$ .... spojitý sublineární funkcionál

$x \in X$ .... bod

? jak vypadá subdiferenciál funkcionálu p v bodě x ?

<u>Věta:</u> Označme

$$\partial_0 = \partial p(0) = \{\varphi \in X^* \; ; \; \varphi \leqq p\}$$

$$\partial_x = \{\varphi \in \partial_0 \; ; \; \varphi(x) = p(x)\}$$ .... funkcionály aktivní v bodě x

Potom

$$\partial p(x) = \{\psi \in X^* \; ; \; \forall \vec{v} \in X : \quad p(x+\vec{v}) \geqq p(x) + \psi(\vec{v})\}$$

$$= \{\psi \in X^* \; ; \; \forall \vec{v} \in X : \max_{\varphi \in \partial_0} \varphi(x+\vec{v}) \geqq p(x) + \psi(\vec{v})\}$$

$$= \{\psi \in X^* \; ; \; \forall \vec{v} \in X : \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(\vec{v}) \geqq \psi(\vec{v})\}$$

<u>Důkaz:</u>

$\supseteq$ — zvol $\psi \in X^*$ takové, že $\psi(\vec{v}) \leqq \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(\vec{v})$ .... pro všechna $\vec{v} \in X$

— potom, pro libovolné $\vec{v} \in X$,

$$p(x) + \psi(\vec{v}) \leqq \underbrace{p(x)}_{=\varphi(x) \text{ pro } \varphi \in \partial_x} + \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(\vec{v}) = \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(x+\vec{v}) \leqq \max_{\varphi \in \partial_0} \varphi(x+\vec{v}) = p(x+\vec{v})$$

— tudíž $\psi \in \partial p(x)$

$\subseteq$ — zvol $\psi \in \partial p(x)$

— ukážeme nejprve, že $\psi(x) = p(x)$

— uvažuj $\vec{v} = \lambda x$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$

— pak $\quad p(x) + \psi(\lambda x) \leqq p(x + \lambda x) = p(x) + \lambda p(x)$ .... pro vš. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \psi(x) \leqq \lambda p(x)$$ .... pro $\lambda > 0$; pro $\lambda < 0$

— tudíž $\psi(x) = p(x)$

$\longrightarrow$ pokr. f. 16

Ukázali jsme, že $\psi(x) = p(x)$.

Dále ukážeme, že $\psi \leqq p$.

Z toho vyplyne, že $\psi \in \partial_0 = \partial p(0)$. Protože také $\psi(x) = p(x)$, bude $\psi \in \partial_x$

Potom obdržíme

$$\psi(v) \leq \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(v) \quad \cdots \text{ pro libovolné } v \in X$$

Pro spor předpokládejme, že $\psi \not\leqq p$, tedy

$$\exists \vec{v} \in X : \quad \psi(v) > p(v)$$

Potom (protože $\psi \in \partial p(x)$)

$$\psi(x) + \psi(\vec{v}) = p(x) + \psi(\vec{v}) \leqq p(x+v) \leqq p(x) + p(v) = \psi(x) + p(\vec{v}) <$$
$$< \psi(x) + \psi(\vec{v})$$

spor.

Je tedy $\psi \leqq p$, a tedy $\psi(v) \leq \max_{\varphi \in \partial_x} \varphi(v)$ pro vš. $v \in X$

c. b. d.

Poznámka: Co znamená předchozí věta v případě, že uvažujeme p jako Minkowského funkcionál množiny M ? ... jen pro $p \geq 0$

- Nechť je dána $M \subseteq X$ ... konvexní pohlcující množina [resp. uzavřené konvexní a pohlcující okolí nuly]

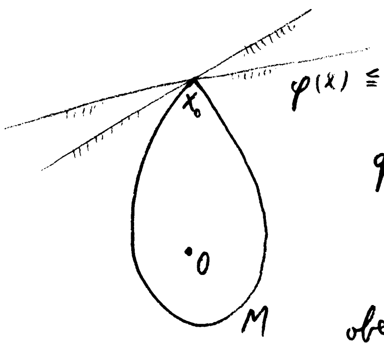
$$p(x) = \inf \{\lambda > 0 ;\ x \in \lambda M\}$$

- zvol bod $x_0 \in X$
- pak $q(v) = \delta_v^+ p(x_0)$ ...... je také sublineární funkcionál a odpovídá subdiferenciálu $\partial p(x_0)$

$$\partial p(x_0) = \{\varphi \in X^* ;\ \varphi \leq q\}$$

- Jak vypadá q ?

jestliže $p_M(x_0) = 1$:



$\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$

$$q(x) = \max \{\varphi(x) ;\ \forall m \in M : \varphi(m) \leq \varphi(x_0)\}$$

obecně

$$q(x) = \max \{\varphi(x) ;\ \forall m \in M : p(x)\varphi(m) \leq \varphi(x_0)\}$$

jestliže $p_M(x_0) = 0$:

- jestliže $x_0 = 0$: $q = p_M$
- jestliže $x_0 \neq 0$: $q = 0$

__Věta:__ Nechť $\tilde{M}$ je otevřená a konvexní

$$f : \tilde{M} \to \mathbb{R} \quad \text{je konvexní}$$

$$M \subseteq \tilde{M} \quad \text{je konvexní}$$

$$x^* \in M_{opt} = \arg\min_{x \in M} f(x)$$

Potom

$$M_{opt} = \Big\{ x \in M ;\ \delta^+_{x-x^*} f(x) = 0 \ \& \ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \delta^+_{\vec{v}} f(x) \geqq \delta^+_{\vec{v}} \left(\delta^+_{x-x^*} f(x^*) \right)(x\ ) \Big\}$$

$$\text{tj.} \quad \delta^+_{\vec{v}} f(x) \geqq \delta^+_{\vec{v}}\, p(x - x^*)$$

$$\text{kde} \quad p(\vec{u}) = \delta^+_{\vec{u}} f(x^*)$$

__Poznámka:__ Jestliže f má Gâteauxovu derivaci v každém bodě,

potom $M_{opt} = \{ x \in M ;\ D_{x-x^*} f(x^*) = 0 \ \& \ Df(x) = Df(x^*) \}$

__Důkaz:__

$\supseteq$ – zvol $x \in M$ takové, že $\delta^+_{x-x^*} f(x^*) = 0 \ \& \ \delta^+_v f(x) \geqq \delta^+_v p(x - x^*)$

– pak podle jedné z předchozích vět
(f … konvexní $\Rightarrow$ f … je lokálně konvexní v bodě $\underline{x^*}$ i $\underline{x}$) platí:

$$f(x) - f(x^*) \geq \delta^+_{x-x^*} f(x^*) = 0$$

$$f(x^*) - f(x) \geq \delta^+_{x^*-x} f(x) \geqq \delta^+_{x^*-x}\, p(x - x^*) =$$

$$= -\delta^+_{x-x^*}\, p(x - x^*) \quad \text{— ale } p(x-x^*) = \delta^+_{x-x^*} f(x^*) = 0$$

$$= 0$$

Dohromady: $f(x) = f(x^*)$, tudíž $x \in M_{opt}$

$\subseteq$ – zvol $x^{**} \in M_{opt}$, $x^{**} \neq x^*$

– protože f je konvexní, tak i množina M_{opt} je konvexní,

tudíž

$$f(x^* + \lambda \cdot (x^{**} - x^*)) = f(x^*) = f(x^{**})$$

pro všechna λ
$0 \leqq \lambda \leqq 1$

tudíž

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x^* + \lambda \cdot (x^{**} - x^*)) - f(x^*)}{\lambda} = \delta^+_{x^{**} - x^*} f(x^*) = 0$$

Nyní uvažujme funkci

$$\Phi(x) = f(x) - \delta^+_{x - x^*} f(x^*)$$
$$= f(x) - p(x - x^*)$$

kde $p(u) = \delta^+_u f(x^*)$

POZOR: Φ ... nemusí být konvexní, je to tzv. DC-funkce, rozdíl dvou konvexních fcí (difference of convex functions)

Zřejmě

$$\Phi(x^*) = f(x^*)$$

a

$$\Phi(x) = f(x) - \delta^+_{x - x^*} f(x^*) \geqq f(x^*)$$

...... protože f je lokálně konvexní v bodě $\underline{x}^*$.

Tudíž funkce Φ nabývá v bodě $\underline{x}^*$ globálního minima na $\tilde{M}$

Dále

$$\Phi(x^{**}) = f(x^{**}) - \delta^+_{x^{**} - x^*} f(x^*) = f(x^{**}) = f(x^*)$$

...... tudíž v bodě x^{**} je globální minimum také

Odtud

$$\delta^+_{\vec{v}} \Phi(x^{**}) \geqq 0$$

...... pro všechna $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

neboli

$$\delta^+_{\vec{v}} f(x^{**}) \geqq \delta^+_{\vec{v}} p(x^{**} - x^*)$$

<u>c.b.d.</u>