Kvazikonvexní funkce

Nechť M .... konvexní množina

$f: M \to \mathbb{R}$ .... funkce

__Připomeňme:__

- f je konvexní $\Longleftrightarrow$

  $\forall x_1, x_2 \in M \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

- f je explicitně konvexní $\Longleftrightarrow$ je konvexní &

  $\forall x_1, x_2 \in M,\ f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

- f je striktně konvexní $\Longleftrightarrow$

  $\forall x_1, x_2 \in M,\ x_1 \neq x_2,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

__Pozorování:__

f je striktně konvexní $\Longrightarrow$ je explicitně konvexní $\Longrightarrow$ je konvexní.

Nyní zavedeme nové pojmy.

__Def.:__ f je kvazikonvexní $\Longleftrightarrow$

$\forall x_1, x_2 \in M \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

__Def.:__ f je explicitně kvazikonvexní $\Longleftrightarrow$ je kvazikonvexní &

$\forall x_1, x_2 \in M,\ f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

__Def.:__ f je striktně kvazikonvexní $\Longleftrightarrow$

$\forall x_1, x_2 \in M,\ x_1 \neq x_2,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

__Pozorování:__

f je striktně kvazikonvexní $\Longrightarrow$ je explicitně kvazikonvexní $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ je kvazikonvexní

Připomeňme:

- funkce f je konkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je konvexní
- funkce f je explicitně konkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je explicitně konvexní
- funkce f je striktně konkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je striktně konvexní

Poznámka/pozorování:

Funkce f je lineární (afinní) $\Longleftrightarrow$ je konvexní i konkávní zároveň.

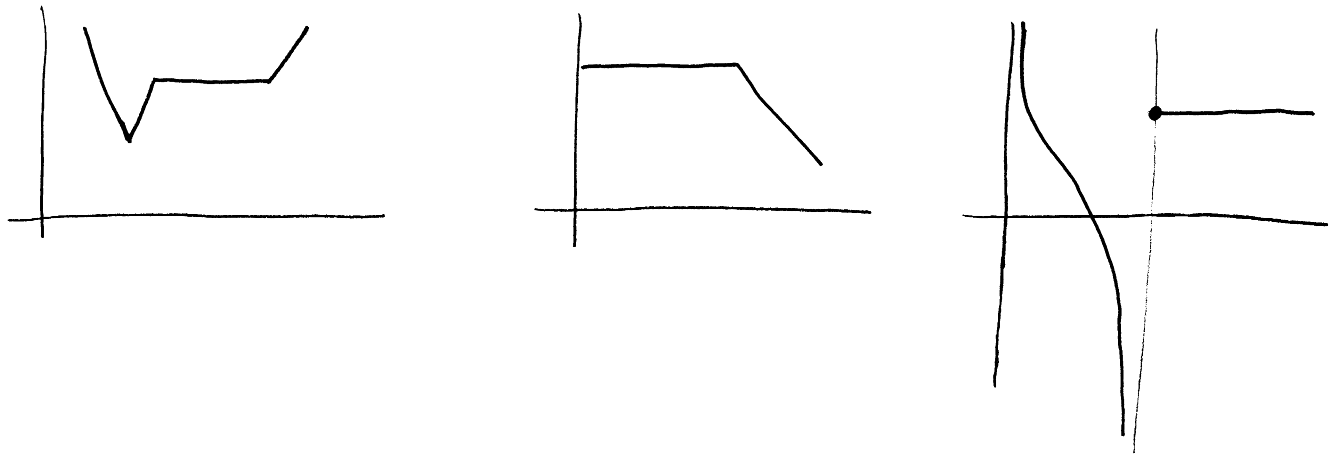
Definice:

- f je kvazikonkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je kvazikonvexní
- f je explicitně kvazikonkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je explicitně kvazikonvexní
- f je striktně kvazikonkávní $\Longleftrightarrow$ $-f$ je striktně kvazikonvexní

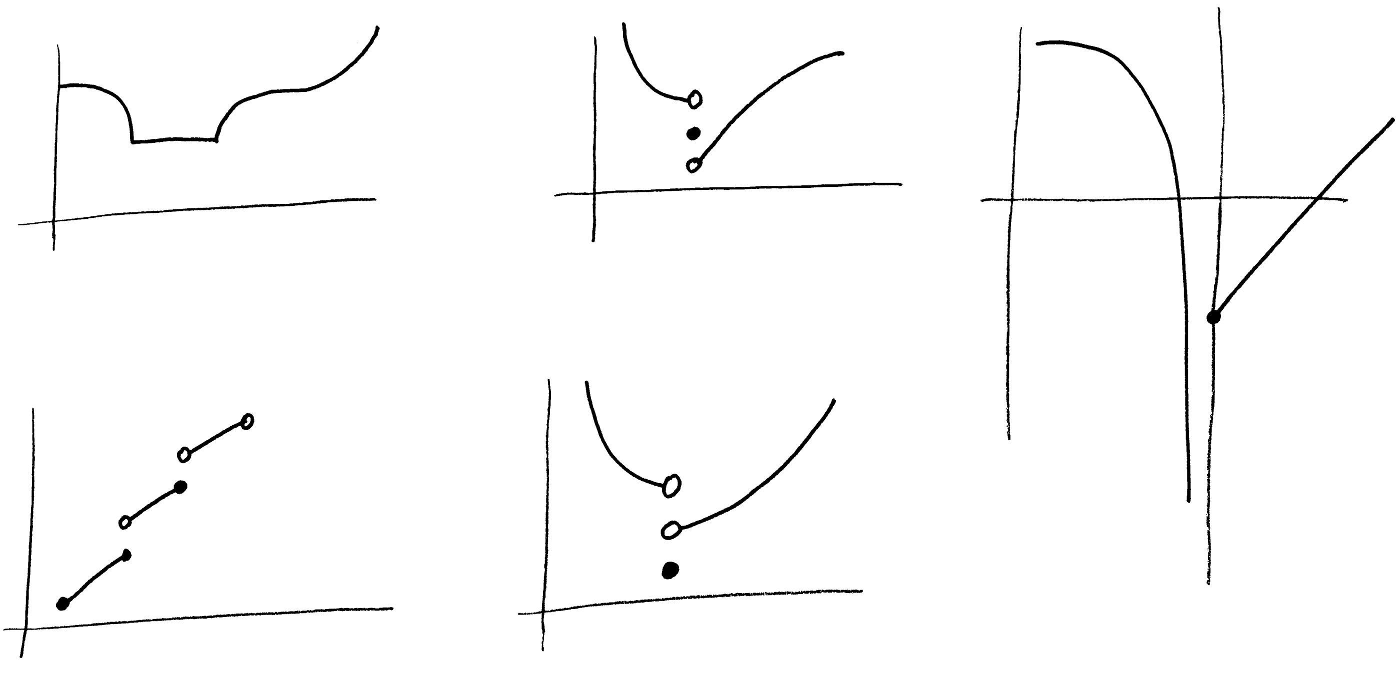
Definice:

Funkce f je kvazilineární $\Longleftrightarrow$ je kvazikonvexní i kvazikonkávní zároveň.

Příklady funkcí kvazikonvexních:



Příklady funkcí explicitně kvazikonvexních:



Tvrzení: Nechť f … kvazikonvexní

Potom $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x_1, \dots, x_m \in M$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \geqq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leqq \max \{ f(x_1), \dots, f(x_m) \}$$

Věta: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ …. kvazikonvexní

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqq 0$

Potom $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ …. je také kvazikonvexní

Věta: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ …. kvazikonvexní

Potom $\max \{ f_1, \dots, f_n \}$ …. je také kvazikonvexní

Věta: Jestliže $f(x)$ … kvazikonvexní,

potom $f(Ay + b)$ —— je také kvazikonvexní.

Věta: (charakterisace kvazikonvexních funkcí)

Nechť M …. konvexní množina

$f : M \to \mathbb{R}$ …. funkce

Funkce f je kvazikonvexní na $M \iff$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \text{ množina } \underbrace{\{ x \in M ;\ f(x) \leqq \alpha \}}_{\{f \leqq \alpha\} \text{ …. dolní } \alpha\text{-řez funkce } f} \text{ je konvexní.}$$

Analogicky: Funkce f je kvazikonkávní na $M \iff$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \underbrace{\{ x \in M ;\ f(x) \geqq \alpha \}}_{\{f \geqq \alpha\} \text{ …. horní } \alpha\text{-řez funkce } f} \text{ je konvexní}$$

Připomeňme: $f \dots$ kvazikonvexní $\iff$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \{x \in M;\ f(x) \leqq \alpha\} \dots$ konvexní

Důsledek: Uvažujme optimalizační úlohu

$$\min f(x)$$
$$\text{z.p.}\quad g_i(x) \leqq b_i \qquad \text{pro } i = 1, \dots, m,$$

kde funkce $g_1, \dots, g_m$ jsou kvazikonvexní.
Potom množina přípustných řešení

$$M = \{x \in \tilde{M};\ g_i(x) \leqq b_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, m\}$$

je konvexní.

Věta: Nechť M je konvexní množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce.
Potom f je explicitně kvazikonvexní.

Věta (ověření): Nechť M je konvexní množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

a) jestliže f je explicitně kvazikonvexní,
potom každé její lokální minimum je jejím globálním minimem.

b) jestliže f je kvazikonvexní, potom

$$M_{opt} = \arg\min_{x \in M} f(x) = \{x^* \in M;\ f(x^*) = \min_{x \in M} f(x)\}$$

je konvexní.

c) jestliže f je striktně kvazikonvexní,
potom M_{opt} je nejvýše jednobodová.

Věta: Platí:

<table>
<tr><td rowspan="2">jestliže f</td><td colspan="3">konvexní</td><td colspan="3">konkávní</td></tr>
<tr><td colspan="2">nezáporná</td><td colspan="2">nekladná</td><td colspan="2">nezáporná</td></tr>
<tr><td rowspan="2">g</td><td colspan="2">konkávní</td><td colspan="2">konvexní</td><td colspan="2">konkávní</td></tr>
<tr><td colspan="3">kladná</td><td colspan="3">záporná</td></tr>
<tr><td>potom $\frac{f}{g}$</td><td colspan="6">explicitně kvazikonvexní</td></tr>
</table>

Věta: Platí:

<table>
<tr><td rowspan="2">jestliže f</td><td>konvexní</td><td>konkávní</td><td>konvexní</td></tr>
<tr><td colspan="2">nekladná</td><td>nekladná</td></tr>
<tr><td rowspan="2">g</td><td>konvexní</td><td>konkávní</td><td>konkávní</td></tr>
<tr><td colspan="2">nekladná</td><td>nezáporná</td></tr>
<tr><td>potom $f \cdot g$</td><td colspan="2">explicitně kvazikonkávní</td><td>explicitně kvazikonvexní</td></tr>
</table>

Věta: Platí:

<table>
<tr><td>$g_1(x), \dots, g_m(x)$</td><td colspan="2">jsou konvexní</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\varphi(y_1, \dots, y_m)$</td><td>(explicitně) kvazikonvexní</td><td>(explicitně) kvazikonkávní</td></tr>
<tr><td>je neklesající v proměnné y_i, jestliže $g_i(x)$ není lineární</td><td>je nerostoucí v proměnné y_i, jestliže $g_i(x)$ není lineární</td></tr>
<tr><td>$\varphi(g_1(x), \dots, g_m(x))$</td><td>(explicitně) kvazikonvexní</td><td>(explicitně) kvazikonkávní</td></tr>
</table>

Věta: Platí:

$g_1(x), \dots, g_m(x)$	jsou konkávní	
$\varphi(y_1, \dots, y_m)$	(explicitně) kvazikonkávní	(explicitně) kvazikonkávní
	je neklesající v proměnné y_i, jestliže g_i není lineární	je nerostoucí v proměnné y_i, jestliže g_i není lineární
$\varphi(g_1(x), \dots, g_m(x))$	(explicitně) kvazikonkávní	(explicitně) kvazikonkávní

Věta: Platí:

jestliže $\gamma(x)$	kvazikonvexní		kvazikonkávní	
$\varphi(\gamma)$	neklesající	nerostoucí	neklesající	nerostoucí
potom $\varphi(\gamma(x))$	kvazikonvexní	kvazikonkávní	kvazikonkávní	kvazikonvexní

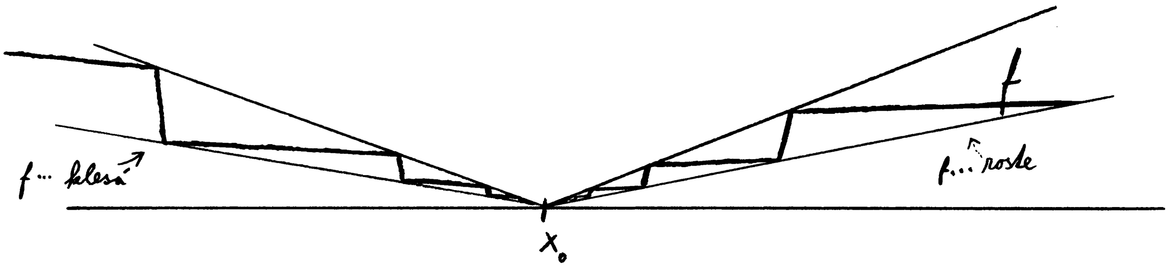
Věta: Platí:

jestliže $\gamma(x)$	explicitně kvazikonvexní		explicitně kvazikonkávní	
$\varphi(\gamma)$	rostoucí	klesající	rostoucí	klesající
potom $\varphi(\gamma(x))$	explicitně kvazikonvexní	explicitně kvazikonkávní	explicitně kvazikonkávní	explicitně kvazikonvexní

Nechť M je otevřená (a konvexní) množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

Již víme: jestliže funkce f je konvexní, potom jednostranná směrová derivace $\delta^+_{\vec{v}} f(x)$ existuje v každém bodě $x \in M$ a pro každý směr $\vec{v}$.

Poznámka: jestliže však funkce f je kvazikonvexní, potom jednostranná směrová derivace $\delta^+_{\vec{v}} f(x)$ existovat nemusí:



Proto budeme pracovat s dolními Diniho jednostrannými směrovými derivacemi.

[To v případě funkcí kvazikonvexních.
V případě kvazikonkávních funkcí přejdeme k horním Diniho jednostranným směrovým derivacím.]

Def.: Dolní Diniho jednostranná směrová derivace funkce f v bodě $\underline{x}$:

$$\underline{D}^+_{\vec{v}} f(x) = D_{+(\vec{v})} f(x) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x + t v) - f(x)}{t}$$

Def.: Horní Diniho —"— derivace:

$$\overline{D}^+_{\vec{v}} f(x) = D^+_{(\vec{v})} f(x) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(x + t v) - f(x)}{t}$$

Poznámka: Výhodou Diniho směrových derivací je, že existují vždy

Pozorování: Jednostranná směrová derivace $\delta^+_v f(x)$ existuje $\iff$

$$\iff \quad \underline{D}^+_v f(x) = \delta^+_v f(x) = \overline{D}^+_v f(x)$$

……… horní i dolní Diniho jednostranné směrové derivace se rovnají

Věta: Nechť M je otevřená a konvexní.

Jestliže $f: M \to \mathbb{R}$ je kvazikonvexní, potom

$$\forall x, y \in M: \quad f(x) \geqq f(y) \quad \Rightarrow \quad \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) \leqq 0$$

Důkaz:

- zvolme $x, y \in M$
- předpokládejme, že $f(x) \geqq f(y)$
- protože f je kvazikonvexní

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leqq \max\{f(x), f(y)\} \qquad \text{pro } \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

neboli $$f(x + t\cdot(y-x)) \leqq f(x) \qquad \text{pro } t \in \langle 0, 1\rangle$$

- tudíž

$$\underline{D}^{+}_{y-x} f(x) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leqq 0$$

c.b.d.

Poznámka: Jestliže f je kvazikonvexní a v bodě $\underline{x}$ má Gâteauxovu derivaci, tvrzení věty má tvar:

$$\forall x, y \in M: \quad f(x) \geqq f(y) \quad \Rightarrow \quad D_{y-x} f(x) \leqq 0$$

Definice: Nechť M je otevřená.

Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je <u>lokálně kvazikonvexní</u> v bodě $x \in M$ $\Leftrightarrow$

$$\forall y \in M: \quad f(y) \leqq f(x) \quad \Rightarrow \quad D_{y-x} f(x) \leqq 0$$

Připomeňme: Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in M \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

neboli $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Ekvivalentně:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Platí: Na kompaktní množině M nabývá spojitá funkce f svého globálního maxima i globálního minima.

Def.: Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je v bodě $x_0 \in M$ polospojitá zdola $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ \|x - x_0\| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x)$$

Ekvivalentně:

$$f(x_0) \leqq \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

Platí: Jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je polospojitá zdola na kompaktní množině M, potom nabývá svého globálního minima.

Def.: Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je v bodě $x_0 \in M$ polospojitá shora $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Ekvivalentně:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqq f(x_0)$$

Platí: Jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je polospojitá shora na kompaktní množině M, potom nabývá svého globálního maxima.

O: Funkce f je spojitá $\iff$ je polospojitá shora i zdola.

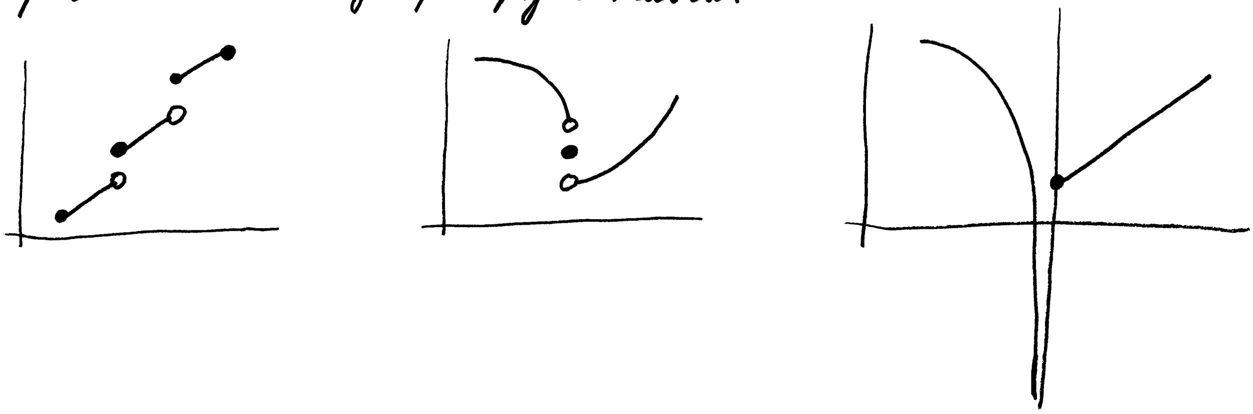
Poznámka: Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je

- spojitá $\iff$ je spojitá v každém bodě $x_0 \in M$,
- polospojitá zdola $\iff$ je polospojitá zdola v každém bodě $x_0 \in M$,
- polospojitá shora $\iff$ je polospojitá shora v každém bodě $x_0 \in M$.

Nechť M je konvexní množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce

<u>již víme:</u> Jestliže f je konvexní a množina M má konečnou dimenzi, potom f je spojitá.

<u>Poznámka:</u> Viděli jsme však už, že když funkce f je (explicitně) kvazikonvexní, potom nemusí být polospojitá zdola:



Klasický výsledek je následující:

<u>Věta:</u> Nechť M je otevřená a konvexní množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je libovolná spojitá a (Gâteauxovsky) diferencovatelná funkce.

Potom
funkce f je kvazikonvexní $\Leftrightarrow$ je lokálně kvazikonvexní v každém bodě $x \in M$

$$\forall x \in M \ \ \forall y \in M: f(y) \leq f(x) \ \Rightarrow \ D_{y-x} f(x) \leq 0 .$$

Dokážeme obecnější výsledek.

ěta: Nechť M je otevřená a konvexní množina

a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce polospojitá zdola
$\underbrace{\text{je}}_{\text{libovolná}}$

Potom

funkce f je kvazikonvexní $\iff$ funkce f je lokálně kvazikonvexní v každém bodě $x \in M$

$$\forall x \in M \ \forall y \in M: \ f(y) \leqq f(x) \implies \underline{D}^+_{y-x} f(x) \leqq 0$$

Důkaz:

$\implies$ .... už máme dokázáno

$\impliedby$ (sporem)

- předpokládejme, že f není kvazikonvexní
- tedy $\exists x_1, x_2 \in M \ \exists \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geqq 0, \ \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = 1: \quad f(\hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$
- polož pro stručnost:

$$\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\} \qquad \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1$$

$$\hat{x} = \hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2 \qquad \varphi(\lambda) = f((1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) = f(x_1 + \lambda\cdot(x_2 - x_1))$$

- povšimněme si:

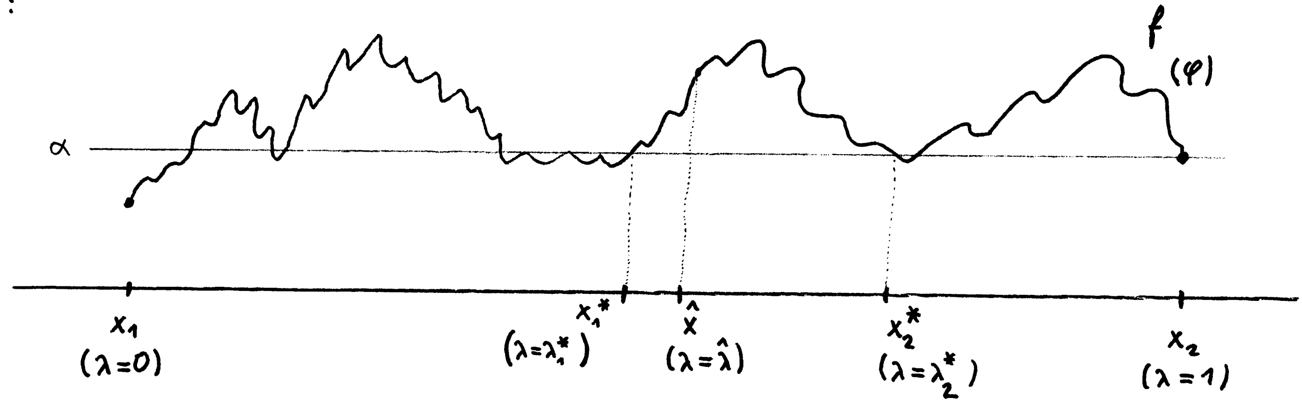
$$\underbrace{\varphi(0) = f(x_1)}_{\leqq \alpha} \qquad \underbrace{\varphi(\hat{\lambda}) = f(\hat{x})}_{> \alpha} \qquad \underbrace{\varphi(1) = f(x_2)}_{\leqq \alpha}, \text{ tudíž } 0 < \hat{\lambda} < 1$$

- zřejmě: φ ... je (rovněž) polospojitá zdola v intervalu $\langle 0, 1\rangle$
- a derivace je:

$$\underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda) = \liminf_{s \to 0^+} \frac{\varphi(\lambda + s) - \varphi(\lambda)}{s} = \liminf_{s \to 0^+} \frac{f(x_1 + (\lambda + s)(x_2 - x_1)) - f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))}{s}$$

$$= \underline{D}^+_{x_2 - x_1} f(x_1 + \lambda\cdot(x_2 - x_1))$$

Máme:



Nechť

$$\lambda_1^* = \inf \{ \lambda' \in (0, \hat\lambda\rangle ; \quad \forall \lambda \in \langle \lambda', \hat\lambda \rangle : \quad \varphi(\lambda) > \alpha \}$$

$$\lambda_2^* = \sup \{ \lambda' \in \langle \lambda', 1) ; \quad \forall \lambda \in \langle \hat\lambda, \lambda' \rangle : \quad \varphi(\lambda) > \alpha \}$$

Položme

$$x_1^* = \lambda_1^* x_1 + (1-\lambda_1^*) x_2$$

$$x_2^* = \lambda_2^* x_1 + (1-\lambda_2^*) x_2$$

Nyní:

- jestliže $\lambda_1^* = 0$, pak $\varphi(0) = f(x_1) \leqq \alpha$
- jinak, díky polospojitosti zdola

$$\varphi(\lambda_1^*) = f(x_1^*) \leqq \liminf_{x \to x_1^*} f(x) \leqq \liminf_{\lambda \to \lambda_1^{*-}} \varphi(\lambda) \leqq \alpha$$

Obdobně

- jestliže $\lambda_2^* = 1$, pak $\varphi(1) = f(x_2) \leqq \alpha$
- jinak, protože f je polospojitá zdola

$$\varphi(\lambda_2^*) = f(x_2^*) \leqq \liminf_{x \to x_2^*} f(x) \leqq \liminf_{\lambda \to \lambda_2^{*+}} \varphi(\lambda) \leqq \alpha$$

Dohromady máme:

$$\varphi(\lambda_1^*),\ \varphi(\lambda_2^*) \leqq \alpha < \varphi(\hat\lambda) \quad , \quad \text{tudíž} \quad \lambda_1^* < \hat\lambda < \lambda_2^*$$

Dále zřejmě platí

$$\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*) : \quad \varphi(\lambda) > \alpha$$

Máme $\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$: $\quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \varphi(\lambda) > \alpha \geqq f(x_1), f(x_1^*), f(x_2^*), f(x_2)$

- tudíž podle předpokladu
  - kde pro stručnost klademe $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

  pro každé $\lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ platí:

$$\underline{D}^+_{x_1 - x} f(x) \leqq 0 \quad \text{i} \quad \underline{D}^+_{x_1^* - x} f(x) \leqq 0 \longrightarrow \text{tudíž} \longrightarrow \underline{D}^+_{-1} \varphi(\lambda) \leqq 0$$

a

$$\underline{D}^+_{x_2 - x} f(x) \leqq 0 \quad \text{i} \quad \underline{D}^+_{x_2^* - x} f(x) \leqq 0 \longrightarrow \text{tudíž} \longrightarrow \underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda) \leqq 0$$

Tedy, podle předpokladu, platí $\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$: $\underline{D}^+_{-1} \varphi(\lambda) \leqq 0$ & $\underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda) \leqq 0$

Ukážeme – pomocí věty Rolleovy a Lagrangeovy věty o střední hodnotě – že funkce φ je v intervalu $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ nerostoucí i neklesající, tedy stacionární (konstantní)

- Ukazujeme, že φ je v $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ stacionární (konstantní):
  - zvol $\lambda_1, \lambda_2 \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $\lambda_1 < \lambda_2$
  - uvažuj funkci

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_1) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1) \right)$$

  - rozlišíme dvě možnosti:

a) $\forall \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$: $\psi(\lambda) \geqq 0$

vidíme: $\psi(\lambda_1) = 0$, $\psi(\lambda_2) = 0$

  - pak v bodě $\lambda = \lambda_1$ a v bodě $\lambda = \lambda_2$ je globální minimum
  - tudíž

$$\underline{D}^+_{+1} \psi(\lambda_1) \geqq 0 \qquad \text{a} \qquad \underline{D}^+_{-1} \psi(\lambda_2) \geqq 0$$

tedy

$$\underline{D}^+_{+1}\psi(\lambda_1) \geqq 0 \qquad \text{a} \qquad \underline{D}^+_{-1}\psi(\lambda_2) \geqq 0$$

$$\underbrace{\underline{D}^+_{+1}\varphi(\lambda_1)}_{\leqq 0} + \frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0 \qquad \text{a} \qquad \underbrace{\underline{D}^+_{-1}\varphi(\lambda_2)}_{\leqq 0} - \frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0$$

tudíž $\quad \dfrac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0 \quad$ a $\quad \dfrac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \leqq 0$

$\Rightarrow \varphi(\lambda_2)=\varphi(\lambda_1)$

Tudíž $\varphi(\lambda_1)=\varphi(\lambda_2)$, protože $\lambda_1<\lambda_2$.

b) $\exists \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle : \ \psi(\lambda) < 0$

- funkce ψ je také polospojitá zdola
- tudíž na kompaktním intervalu $\langle \lambda_1, \lambda_2\rangle$ nabývá svého globálního minima
- minimum nechť se nabývá v bodě $\lambda_0 \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$
- zřejmě je $\psi(\lambda_0)<0$ a $\psi(\lambda_1)=0=\psi(\lambda_2)$, tudíž $\lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$

Pak

$$\underline{D}^+_{+1}\psi(\lambda_0) \geqq 0 \qquad \text{i} \qquad \underline{D}^+_{-1}\psi(\lambda_0) \geqq 0$$

$$\underbrace{\underline{D}^+_{+1}\varphi(\lambda_0)}_{\leqq 0} + \frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0 \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\underline{D}^+_{-1}\varphi(\lambda_0)}_{\leqq 0} - \frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0$$

tudíž $\quad \dfrac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \geqq 0 \quad$ i $\quad \dfrac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} \leqq 0$

$\Rightarrow \varphi(\lambda_2)=\varphi(\lambda_1)$

Tudíž $\varphi(\lambda_1)=\varphi(\lambda_2)$.

Tedy máme: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*): \ \varphi(\lambda_1)=\varphi(\lambda_2)$

tudíž $\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*): \ \varphi(\lambda) = \varphi(\hat{\lambda}) > \alpha$

Ovšem $\varphi(\lambda_1^*) \leqq \alpha$ a $\varphi(\lambda_2^*) \leqq \alpha$

Tedy $\underline{D}^+_{+1}\varphi(\lambda_1^*) = +\infty$ a $\underline{D}^+_{-1}\varphi(\lambda_2^*) = +\infty$

Máme : $\underline{D}^+_{+1}\varphi(\lambda_1^*) = +\infty$ a $\underline{D}^+_{-1}\varphi(\lambda_2^*) = +\infty$

neboli
$$\underline{D}^+_{x_2^* - x_1^*} f(x_1^*) = +\infty \qquad \text{a} \qquad \underline{D}^+_{x_1^* - x_2^*} f(x_2^*) = +\infty$$

- jestliže $f(x_2^*) \leqq f(x_1^*)$, potom podle předpokladu má být $\underline{D}^+_{x_2^* - x_1^*} f(x_1^*) \leqq 0$ - spor
- jestliže $f(x_1^*) \leqq f(x_2^*)$, -//- $\underline{D}^+_{x_1^* - x_2^*} f(x_2^*) \leqq 0$ - spor

Tedy f je kvazikonkávní.

c. b. d.

Funkce pseudokonvexní

Nechť M je otevřená množina
a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

<u>Připomeňme:</u> Funkce f je lokálně kvazikonvexní v bodě $x \in M \iff$

$$\forall y \in M: \quad f(y) \leqq f(x) \implies \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) \leqq 0$$

<u>Definice:</u> Funkce f je (lokálně) pseudokonvexní v bodě $x \in M \iff$

$$\forall y \in M: \quad f(y) < f(x) \implies \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) < 0$$

ekvivalentně: $$\underline{D}^{+}_{y-x} f(x) \geqq 0 \implies f(y) \geqq f(x)$$

<u>Definice:</u> Funkce f je (lokálně) striktně pseudokonvexní v bodě $x \in M \iff$

$$\forall \underbrace{y \in M}_{y \neq x}: \quad f(y) \leqq f(x) \implies \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) < 0$$

ekvivalentně:
$$y \neq x \ \& \ \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) \geqq 0 \implies f(y) > f(x)$$

<u>Definice:</u> Funkce f je pseudokonvexní (na M) $\iff$ je pseudokonvexní v každém bodě $x \in M$

<u>Definice:</u> Funkce f je striktně pseudokonvexní (na M) $\iff$ je striktně pseudokonvexní v každém bodě $x \in M$

<u>Def.:</u> funkce f je pseudokonkávní v bodě $x \in M \iff -f$ je pseudokonvexní v bodě $x \in M$
funkce f je pseudokonkávní $\iff -f$ je pseudokonvexní
funkce f je pseudolineární $\iff$ je pseudokonvexní i pseudokonkávní zároveň

funkce f je striktně pseudokonkávní v bodě $x \in M \iff -f$ je striktně pseudokonvexní v $x \in M$
funkce f je striktně pseudokonkávní $\iff -f$ je striktně pseudokonvexní

Už víme:

jestliže funkce f je kvazikonvexní, potom je lokálně kvazikonvexní v každém bodě $x \in M$:

$$\forall x \in M \ \ \forall y \in M: \quad f(y) \leqq f(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{D}^+_{y-x} f(x) \leqq 0$$

jestliže funkce f je polospojitá zdola a lokálně kvazikonvexní v každém bodě $x \in M$, potom je kvazikonvexní.

Nyní máme:

Věta: Množina M nechť je otevřená a konvexní.

jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je konvexní, potom je pseudokonvexní.

Důkaz:

- zvolme dva body $x, y \in M$ takové, že $f(y) < f(x)$
- protože funkce f je konvexní, jednostrannou směrovou derivaci $\delta^+_v f(x)$ má v bodě $\underline{x}$ ve všech směrech $\underline{v}$ a v bodě $\underline{x}$ je lokálně konvexní:

$$f(y) \geqq f(x) + \delta^+_{y-x} f(x)$$

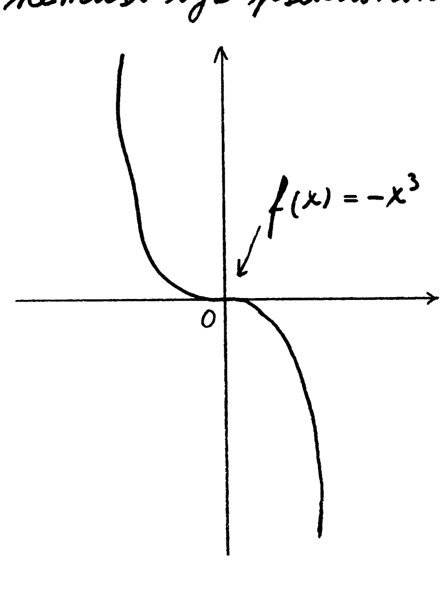
$$\underbrace{f(y) - f(x)}_{<0} \geqq \delta^+_{y-x} f(x) = \underline{D}^+_{y-x} f(x)$$

- tudíž $\underline{D}^+_{y-x} f(x) < 0$,

c.b.d.

Poznámka: jestliže funkce f je explicitně kvazikonvexní (a spojitá), potom nemusí být pseudokonvexní.

Např.:

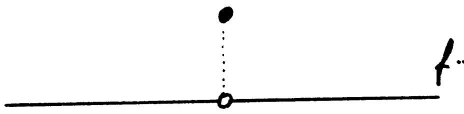


.... je explicitně kvazikonvexní a spojitá

.... není pseudokonvexní

Poznámka: Jestliže funkce f je pseudokonvexní (a polospojitá shora), potom nemusí být kvazikonvexní.

Např.:



f .... je pseudokonvexní, není kvazikonvexní

Lemma:

Množina M nechť je otevřená a konvexní.
Jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je pseudokonvexní a polospojitá zdola, potom je kvazikonvexní.

Důkaz:

V podstatě kopírujeme důkaz poslední velké věty.
Důkaz provedeme sporem:

- předpokládejme, že f je pseudokonvexní

$$\forall x \in M \ \forall y \in M: \ f(y) < f(x) \implies \underline{D}^{+}_{y-x} f(x) < 0$$

a že f je polospojitá zdola

- pro spor předpokládejme, že f není kvazikonkávní
- tedy $\exists x_1, x_2 \in M \ \exists \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geqq 0, \ \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = 1: \ f(\hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

- polož:

$$\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\} \qquad \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1$$

$$\hat{x} = \hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2 \qquad \varphi(\lambda) = f\big((1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda \cdot x_2\big) = f\big(x_1 + \lambda\cdot(x_2 - x_1)\big)$$

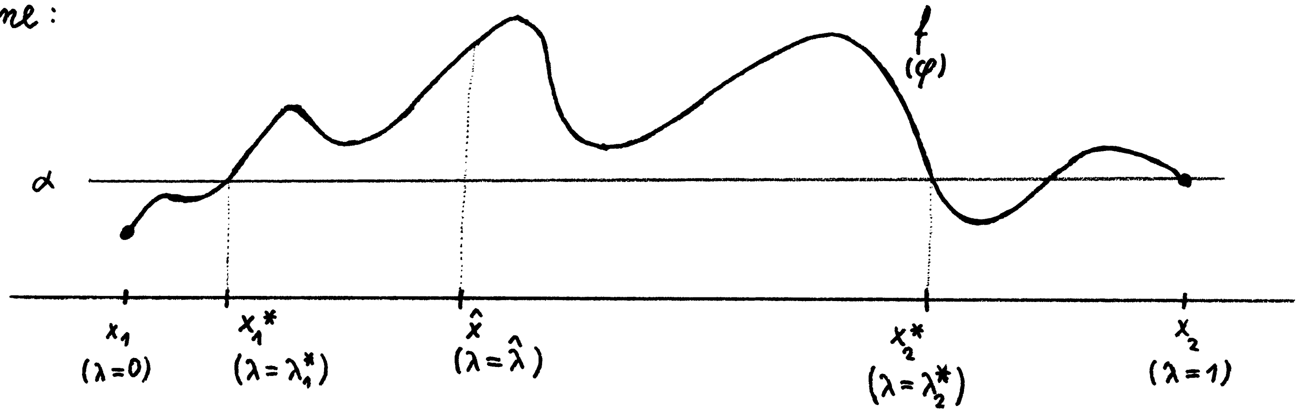
- vidíme: $\begin{array}{l} \varphi(0) = f(x_1) \leqq \alpha \\ \varphi(1) = f(x_2) \leqq \alpha \end{array}$ a $\varphi(\hat{\lambda}) = f(\hat{x}) > \alpha$, tudíž $0 < \hat{\lambda} < 1$

- zřejmě: funkce φ je rovněž polospojitá zdola v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

- její derivace ve směru "+1" je:

$$\underline{D}^{+}_{+1} \varphi(\lambda) = \underline{D}^{+}_{x_2 - x_1} f\big(x_1 + \lambda\cdot(x_2 - x_1)\big)$$

Máme:



Nechť

$$\lambda_1^* = \inf\{\lambda' \in (0,\hat{\lambda}\rangle;\ \ \forall \lambda \in \langle \lambda', \hat{\lambda}\rangle:\ \varphi(\lambda) > \alpha\} \qquad x_1^* = \lambda_1^* \cdot x_1 + (1-\lambda_1^*)\cdot x_2$$

$$\lambda_2^* = \sup\{\lambda' \in \langle\hat{\lambda}, 1);\ \ \forall \lambda \in \langle \hat{\lambda}, \lambda'\rangle:\ \varphi(\lambda) > \alpha\} \qquad x_2^* = \lambda_2^* \cdot x_1 + (1-\lambda_2^*)\cdot x_2$$

Nyní:

- jestliže $\lambda_1^* = 0$, potom $\varphi(0) = f(x_1) \leqq \alpha$
- jinak $\varphi(\lambda_1^*) = f(x_1^*) \leqq \liminf\limits_{x\to x_1^*} f(x) \leqq \liminf\limits_{\lambda \to \lambda_1^{*-}} \varphi(\lambda) \leqq \alpha$

Obdobně:

- jestliže $\lambda_2^* = 1$, potom $\varphi(1) = f(x_2) \leqq \alpha$
- jinak $\varphi(\lambda_2^*) = f(x_2^*) \leqq \liminf\limits_{x\to x_2^*} f(x) \leqq \liminf\limits_{\lambda \to \lambda_2^{*+}} \varphi(\lambda) \leqq \alpha$

Tudíž dohromady máme:

$$\varphi(\lambda_1^*) \leqq \alpha < \varphi(\hat{\lambda}) \qquad \text{odkud} \qquad \lambda_1^* < \hat{\lambda} < \lambda_2^*$$
$$\text{i} \quad \varphi(\lambda_2^*) \leqq \alpha < \varphi(\hat{\lambda})$$

Dále, s ohledem na způsob zavedení hodnot λ_1^* a λ_2^*, zřejmě platí:

$$\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*):\quad \varphi(\lambda) > \alpha$$

resp. $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2) > \alpha$ a současně $\alpha \geqq f(y)$ pro $y = x_1, x_1^*, x_2^*, x_2$

Tudíž dohromady

$f(y) < f(x)$, kde $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, ... pro všechna $\lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$

a pro všechna $y = x_1, x_1^*, x_2^*, x_2$

Tedy pro každé $\lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, platí

$$f(y) < f(x) \qquad \text{pro } y = x_1, x_1^*, x_2^*, x_2,$$

tudíž podle předpokladu platí

$$\underline{D}^+_{x_1 - x} f(x) < 0 \quad \text{i} \quad \underline{D}^+_{x_1^* - x} f(x) < 0 \qquad \text{odkud} \quad \underline{D}^+_{-1} \varphi(\lambda) < 0$$

a

$$\underline{D}^+_{x_2 - x} f(x) < 0 \quad \text{i} \quad \underline{D}^+_{x_2^* - x} f(x) < 0 \qquad \text{odkud} \quad \underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda) < 0$$

Tedy dohromady máme:

$$\forall \lambda \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*): \quad \underline{D}^+_{-1} \varphi(\lambda) < 0 \quad \& \quad \underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda) < 0$$

Ukážeme pomocí věty Rolleovy a pomocí Lagrangeovy věty o stř. hodnotě, že toto není možné:

- zvol $\lambda_1, \lambda_2 \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $\lambda_1 < \lambda_2$
- uvažuj funkci

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_1) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1) \right)$$

- rozlišíme dvě možnosti:

a) $\forall \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle: \quad \psi(\lambda) \geqq 0$

- zároveň vidíme, že $\psi(\lambda_1) = 0 = \psi(\lambda_2)$
- tudíž v bodě $\lambda = \lambda_1$ a v bodě $\lambda = \lambda_2$ je globální minimum
- tudíž

$$\underline{D}^+_{+1} \psi(\lambda_1) \geqq 0 \qquad \text{a} \qquad \underline{D}^+_{-1} \psi(\lambda_2) \geqq 0$$

$$\underbrace{\underline{D}^+_{+1} \varphi(\lambda_1)}_{<0} + \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \geqq 0 \qquad \text{a} \qquad \underbrace{\underline{D}^+_{-1} \varphi(\lambda_2)}_{<0} - \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \geqq 0$$

tudíž

$$\underbrace{\frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} < 0}_{\text{spor}}$$

b) $\exists\, \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle : \;\; \psi(\lambda) < 0$

- funkce ψ je také polospojitá zdola
- tudíž na kompaktním intervalu $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ nabývá svého globálního minima
- minimum nechť je v bodě $\lambda_0 \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$
- protože $\exists\, \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle : \psi(\lambda) < 0$, zřejmě je $\psi(\lambda_0) < 0$
- dále $\psi(\lambda_1) = 0 = \psi(\lambda_2)$
- tudíž dohromady $\lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$
- tudíž

$$\underline{D}^+_{+1}\, \psi(\lambda_0) \geqq 0 \qquad \text{i} \qquad \underline{D}^+_{-1}\, \psi(\lambda_0) \geqq 0$$

$$\underbrace{\underline{D}^+_{+1}\, \varphi(\lambda_0)}_{<0} + \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \geqq 0 \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\underline{D}^+_{-1}\, \varphi(\lambda_0)}_{<0} - \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \geqq 0$$

tudíž $$\underbrace{\frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} < 0}_{\text{spor}}$$

Tudíž funkce f je kvazikonvexní, c.b.d.

Poznámka: (cvičení)

Množina M nechť je otevřená.

Jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je pseudokonvexní,

potom je lokálně kvazikonvexní (v každém bodě).

Pozn.: To znamená, že právě dokázané lemma lze dokázat jednodušeji (kratším důkazem) pomocí poznámky a poslední velké věty.

Návod: Předpokládejme pro spor, že f je pseudokonvexní

$$\forall x \in M \;\; \forall y \in M : \;\; f(y) < f(x) \;\; \Rightarrow \;\; \underline{D}^+_{y-x} f(x) < 0$$

a že není lokálně kvazikonvexní, tudíž

$$\exists\, \hat{x} \in M \;\; \exists\, \hat{y} \in M : \;\; f(\hat{y}) = f(\hat{x}) \;\; \& \;\; \underline{D}^+_{\hat{y}-\hat{x}} f(\hat{x}) > 0$$

Věta: Množina M budiž otevřená a konvexní.

jestliže funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je pseudokonvexní a polospojitá zdola,

potom je explicitně kvazikonvexní.

Důkaz: (nepřímo)

- předpokládejme, že f není explicitně kvazikonvexní:

$$\exists x_1, x_2 \in M, \quad f(x_1) \neq f(x_2), \quad \exists \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 > 0, \quad \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = 1: \quad f(\hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2) \geqq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

bůno můžeme předpokládat, že $f(x_1) < f(x_2)$, tudíž $\max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_2)$

- už víme podle předchozího lemmatu, že f je kvazikonvexní
- tudíž je

$$f(\hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2) = \max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_2)$$

- položme

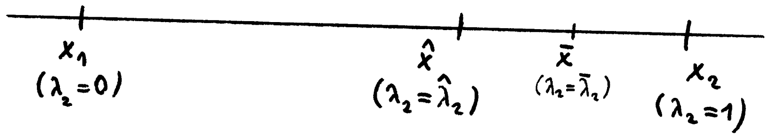
$$\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_2)$$

$$\hat{x} = \hat{\lambda}_1 x_1 + \hat{\lambda}_2 x_2 \qquad \text{víme: } f(x_1) < \alpha = f(\hat{x}) = f(x_1)$$

- uvažujme bod

$$\bar{x} = \bar{\lambda}_1 x_1 + \bar{\lambda}_2 x_2 \qquad \text{pro } \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 > 0, \quad \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 1$$

$$\bar{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_1, \quad \bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_2$$



- protože f je kvazikonvexní, pro body x_1 a $\bar{x}$ platí:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x}) \leqq \max\{f(x_1), f(\bar{x})\}$$

tedy i pro volbu

$$\lambda_1 = \frac{\hat{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \qquad \text{a} \qquad \lambda_2 = \frac{\hat{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_2}$$

pak
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x} = \frac{\hat{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \cdot x_1 + \frac{\hat{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_2} \cdot (\bar{\lambda}_1 \cdot x_1 + \bar{\lambda}_2 \cdot x_2) =$$

$$= \frac{\hat{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \cdot x_1 + \frac{\hat{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_2} \cdot x_2 =$$

$$= \frac{\hat{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1 + (1 - \hat{\lambda}_1) \cdot \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \cdot x_1 + \hat{\lambda}_2 \cdot x_2 =$$

$$= \frac{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_1 \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \cdot x_1 + \hat{\lambda}_2 \cdot x_2 = \hat{\lambda}_1 \cdot x_1 + \hat{\lambda}_2 \cdot x_2 = \hat{x}$$

tedy
$$\alpha = f(\hat{x}) \leqq \max \{ f(x_1), f(\bar{x}) \}$$

- protože $f(x_1) < \alpha$, dostáváme $\alpha \leqq f(\bar{x})$
- ovšem f je kvazikonvexní, platí $f(\bar{x}) \leqq \max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_2) = \alpha$
- tudíž dohromady

$$f(\bar{x}) = f(\bar{\lambda}_1 x_1 + \bar{\lambda}_2 x_2) = \alpha$$ ..... pro všechna $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 > 0$, $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 1$, $\hat{\lambda}_2 \leqq \bar{\lambda}_2 \leqq 1$

- potom ovšem

$$\underline{D}^+_{x_1 - \bar{x}} f(\bar{x}) = 0$$ .... kdykoliv $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 > 0$, $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 1$, $\hat{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_2 \leqq 1$

a
$$f(x_1) < \alpha = f(\bar{x}),$$

tudíž funkce f není pseudokonvexní, <u>c.b.d.</u>

Připomeňme: Nechť M je otevřená množina

a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce mající jednostrannou směrovou derivaci $\delta^+_{\vec{v}} f(x^*)$ v bodě $\underline{x}^* \in M$ v každém směru $\underline{\vec{v}}$.

Jestliže f má v bodě $\underline{x}^*$ lokální minimum,

potom $\forall \vec{v}: \quad \delta^+_{\vec{v}} f(x^*) \geqq 0$

Připomeňme: Nechť množina M je otevřená a konvexní.

Jestliže funkce f je konvexní [stačí: funkce f má v bodě $x^* \in M$ směrovou derivaci $\delta^+_{\vec{v}} f(x^*)$ ve všech směrech $\underline{\vec{v}}$ & & v bodě $\underline{x}^*$ je lokálně konvexní],

potom platí:

funkce f má v bodě $\underline{x}^*$ globální minimum $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{v}: \quad \delta^+_{\vec{v}} f(x^*) \geqq 0$.

Definice: Nechť M je otevřená množina a nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

Bod $x^* \in M$ se nazývá <u>účinným minimem</u> [effective minimum] funkce f $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{v}: \quad \underline{D}^+_{\vec{v}} f(x^*) \geqq 0$$

Věta: Nechť M je otevřená množina

a $f: M \to \mathbb{R}$ je pseudokonvexní funkce. [Stačí: funkce f je lokálně pseudokonvexní v bodě $x^* \in M$.]

Potom f má v bodě $\underline{x}^*$ globální minimum $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x}^*$ je účinným minimem funkce f.

Důkaz:

$\Rightarrow$ .... zřejmé ... platí vždy

$\Leftarrow$ .... zvol bod $x \in M$

- protože bod $\underline{x}^*$ je účinným minimem, platí $\underline{D}^+_{x-x^*} f(x^*) \geqq 0$
- protože f je pseudokonvexní v bodě x^*,

  platí $f(x) \geqq f(x^*)$

tudíž v bodě $\underline{x}^*$ je globální minimum, c.b.d.

Poznámka: Jestliže funkce je konvexní, potom je pseudokonvexní.

a má i směrovou derivaci.

jestliže funkce f má směrovou derivaci,

potom platí

$$\underline{D}^{+}_{\vec{v}} f(x^*) = \delta^{+}_{\vec{v}} f(x^*)$$

Poznámka: Jestliže funkce f má v bodě $\underline{x}^*$ Gâteauxovu derivaci, potom bod $\underline{x}^*$ je účinným minimem funkce f $\iff$

$$\iff \quad Df(x^*) = o^T$$

...... bod x^* je stacionární.