Ekonomicko-matematické metody 3

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

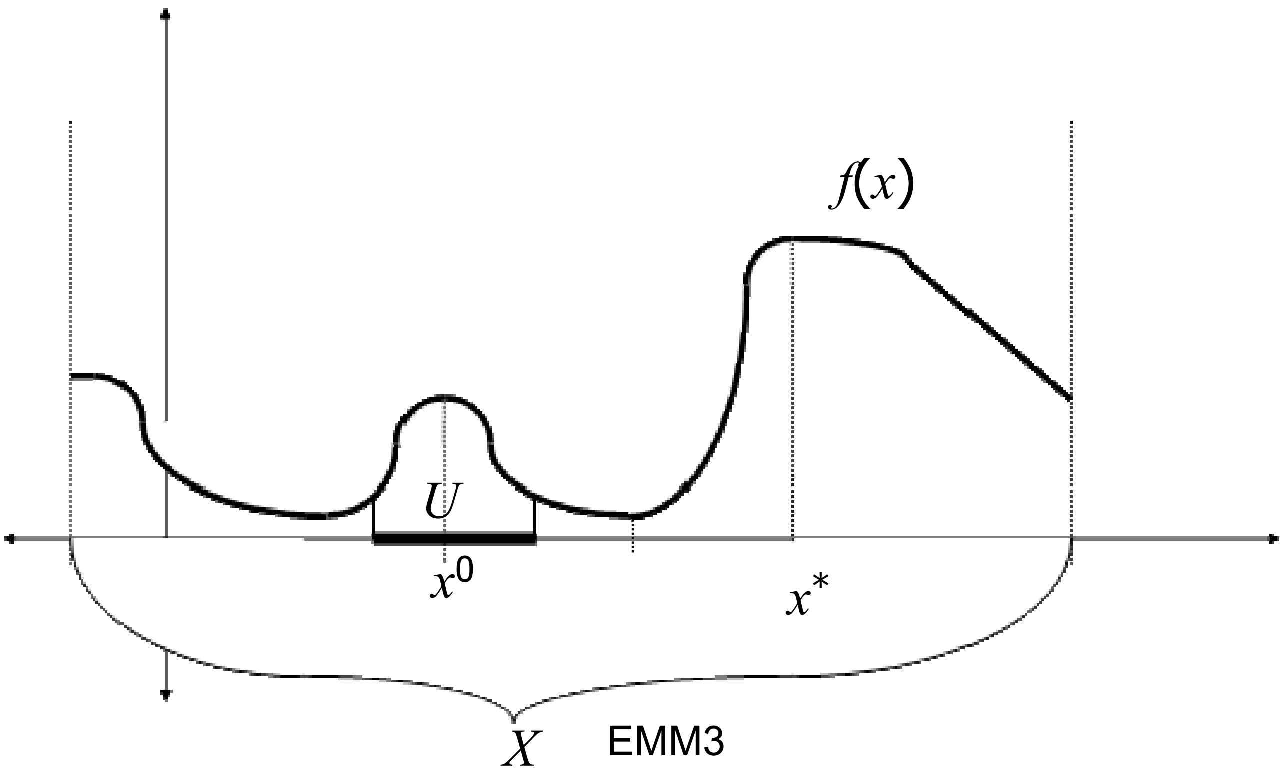
přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Lokální a globální extrémy

x^0 ... **lokální maximum** funkce $f(x)$ ...(lokální minimum funkce)
$\exists$ okolí U bodu x^0 : $\forall\ x \in\ U \subset X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

x^* ... **globální maximum** $f(x)$ ... (globální minimum funkce)
$\forall x \in\ X$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$)



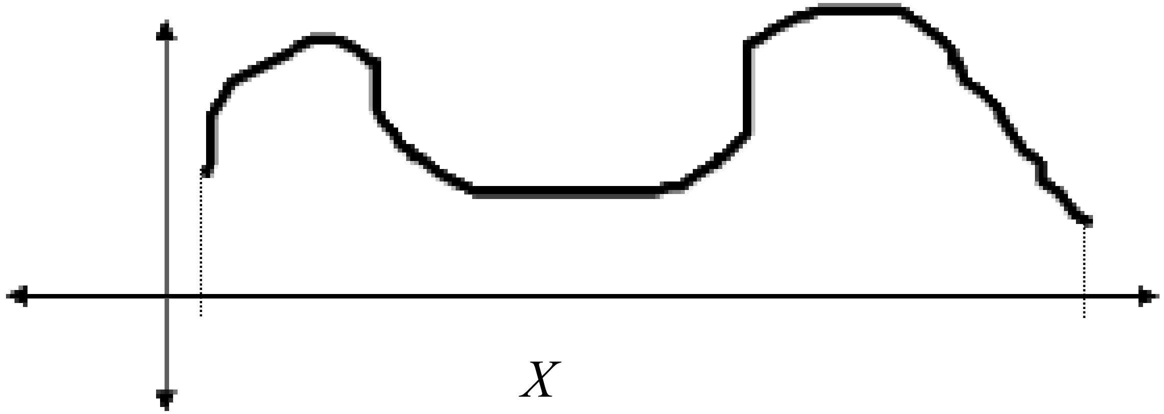
Lokální a globální extrémy

Existence řešení

Věta 1 Spojitá funkce nabývá na uzavřené omezené množině X svého globálního maxima (globálního minima).

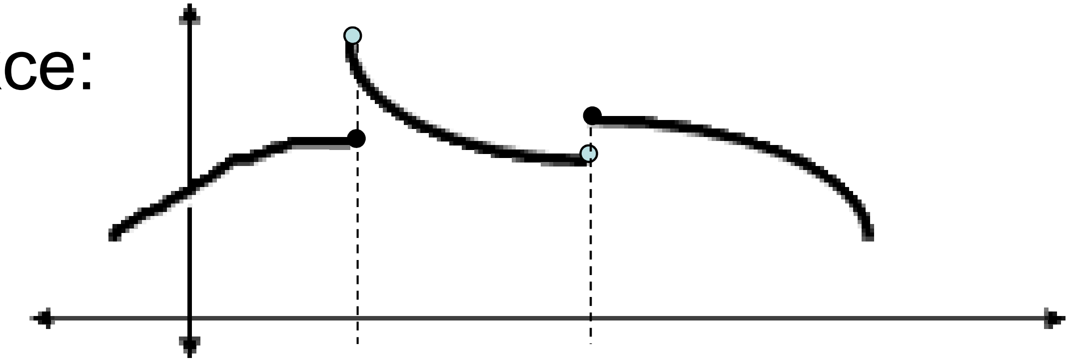
$$\forall x_0 \in X : \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

... *spojitost funkce*...souvislost grafu:

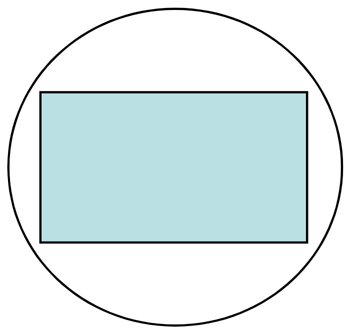


Existence řešení …

…nespojitá funkce:



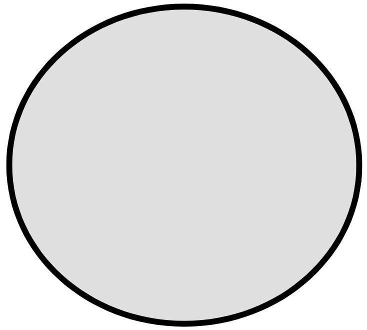
... omezená množina ...vejde se do nějaké „koule“



Existence řešení …

... uzavřená množina:

včetně „hranice“



uzavřený interval

otevřená množina:

bez „hranice“

otevřený interval

Existence řešení …

…co stačí, aby existoval lokální extrém

Věta 2 x^0 je **lokální** maximum funkce $f(x)$,

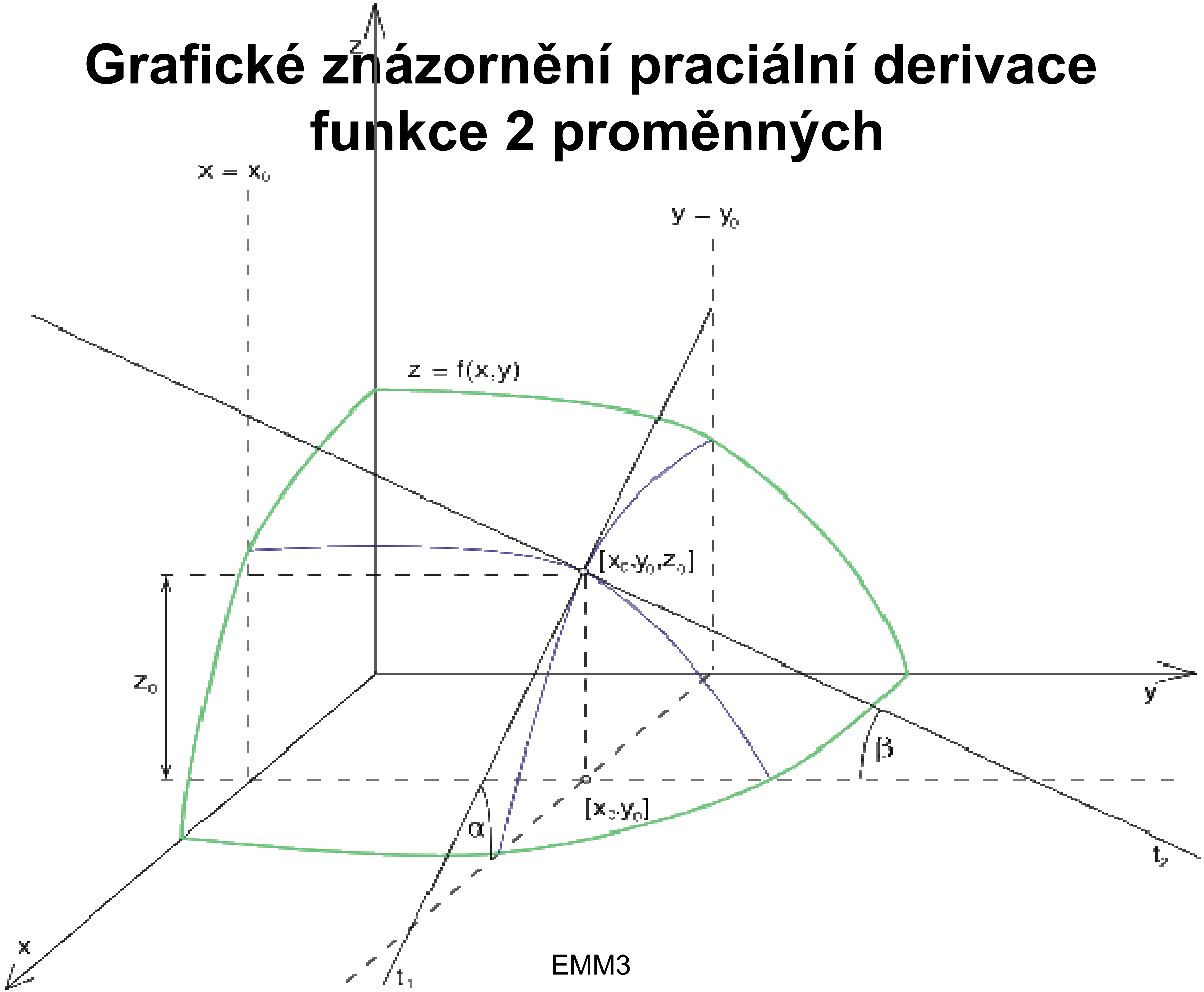
existuje (parciální) derivace $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}$

potom $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} = 0$

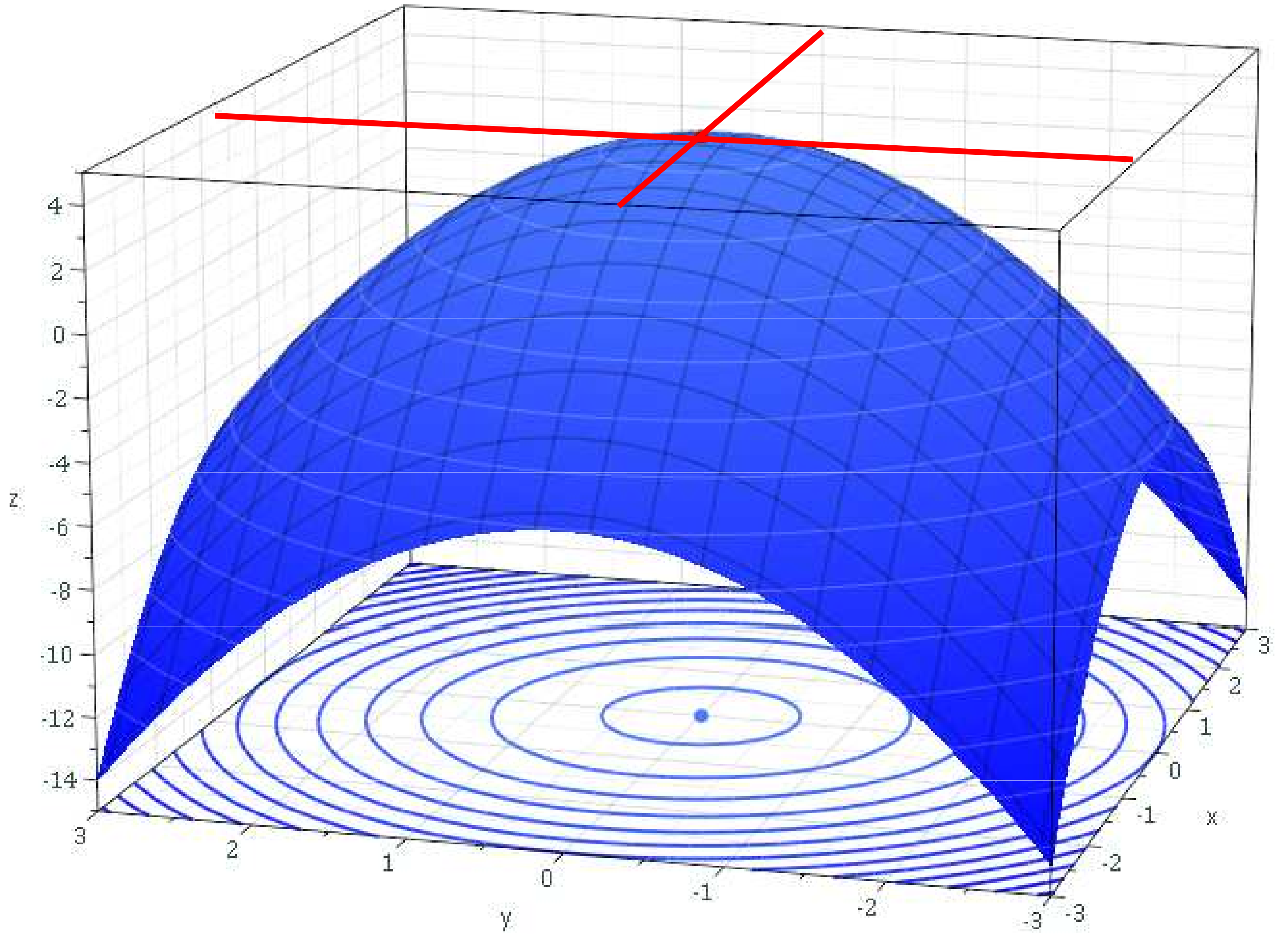
Je to **Nutná podmínka existence (lokálního!) extrému** není podmínkou postačující !!!

Postačující podmínka existence (lokálního!) extrému: -
- Existence spojitých parciálních derivací v okolí bodu x^0 --
- Pozitivní/negativní definitnost Hessiánu…

Grafické znázornění praciální derivace funkce 2 proměnných

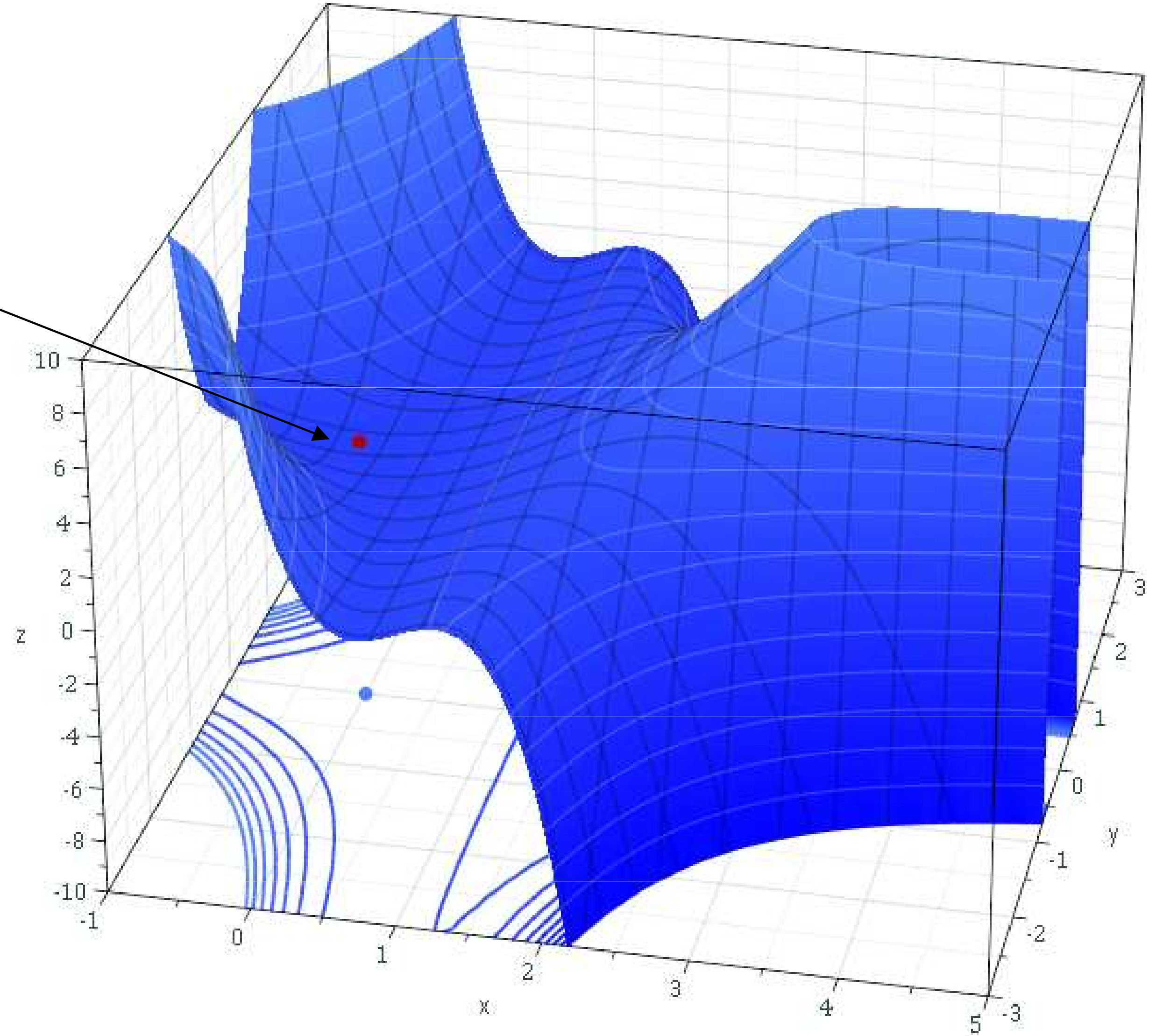


Grafické znázornění globálního maxima funkce 2 proměnných



Grafické znázornění „obecné“ funkce 2 proměnných

lokální minimum



Existence řešení …

Prostor $\mathbf{R}^{n}$: pozor!!! parciální derivace:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right)$$

Gradient funkce (vektor parciálních derivací) v bodě $\boldsymbol{x}^0=(x_1{}^0,\dots, x_n{}^0)\in \mathbf{R}^n$

$$H = \left\{\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}\right\} = \{\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\}$$

Hessova matice (**Hessián**) v bodě $\boldsymbol{x}^0$

v $\mathbf{R}^1$ (matematika 1. ročník) : $H = f''(\boldsymbol{x}^0)$ – „matice“ (1×1)

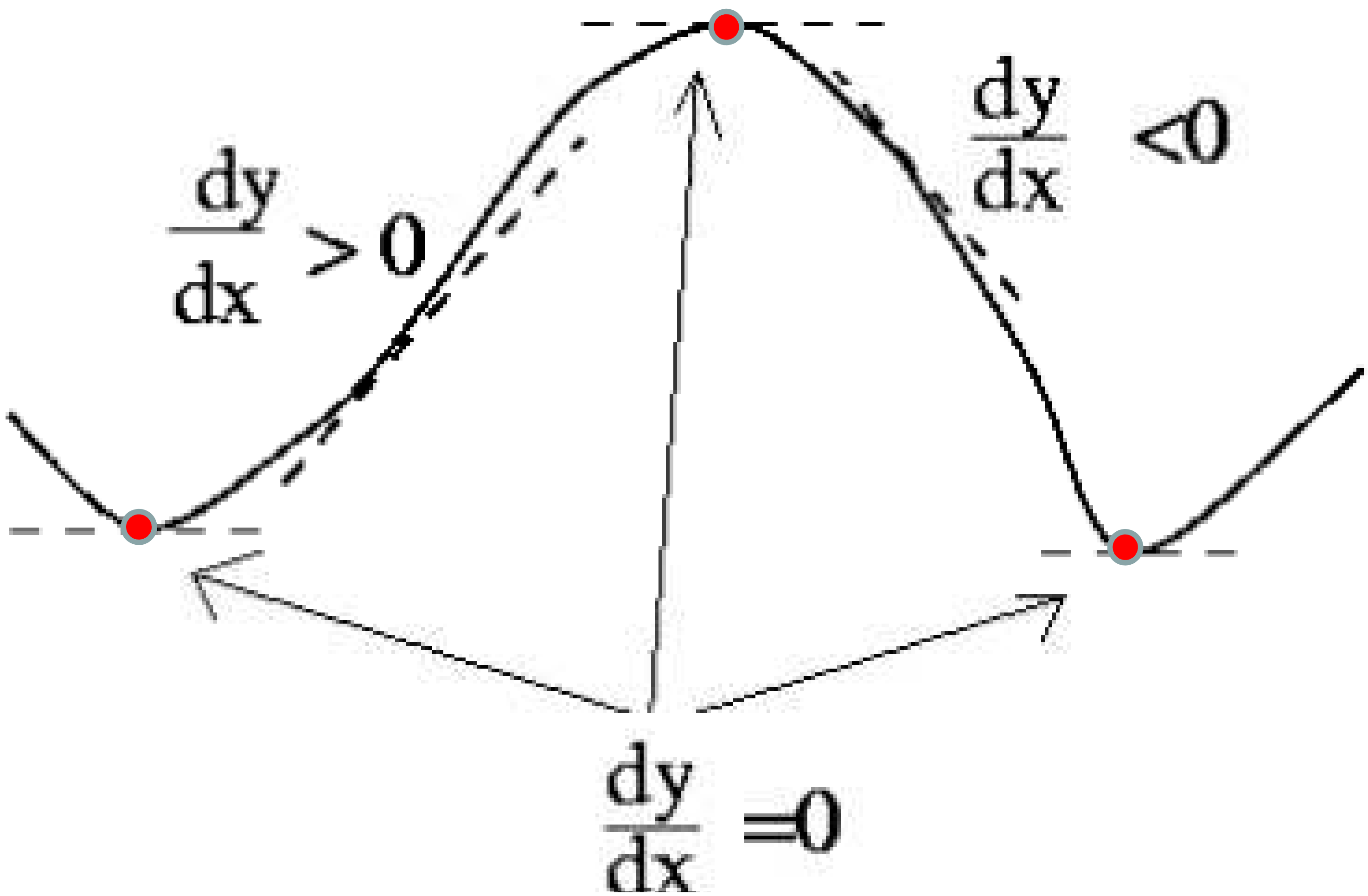
Příklad 1

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 4x_2^2 x_3^2 + 2x_3^4$$

Gradient $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1^3 \\ 8x_2 x_3^2 \\ 8x_2^2 x_3 + 8x_3^3 \end{bmatrix}$$

Extrémy a znaménko derivace
(schéma)



Existence řešení …

Postačující podmínka existence lokálního minima funkce v R

Věta 3 „1“. Jestliže funkce $f(x)$ má ***spojitou prvou a druhou derivaci v okolí bodu*** $x^0 \in \mathbf{R}^1$,

první derivace je nulová, tj. $f'(x^0) = 0$

a zároveň ***druhá derivace je kladná***, tj. $f''(x^0) > 0$,

pak

$x^0 \in \mathbf{R}$ **je bodem lokálního *minima* funkce** $f(x)$**.**

Poznámka: pro ***maximum*** je $f''(x^0) < 0$.

Existence řešení …

Postačující podmínka existence lokálního minima funkce v $\mathbf{R}^n$

Věta 3 „n“: (Sylvestrovo kritérium)

Jestliže funkce $f(x)$ má ***spojité všechny parciální derivace v okolí bodu*** $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in \mathbf{R}^n$, gradient $\nabla f(x^0) = \mathbf{0}$

a ***všechny hlavní subdeterminanty Hessiánu*** $\{\nabla^2 f(x^0)\}$ ***jsou kladné*** (tj. > 0)

pak

$x^0 \in \mathbf{R}$ je bodem lokálního *minima* funkce $f(x)$.

Poznámka: pro ***maximum*** jsou všechny hlavní subdeterminanty Hessiánu funkce $-f(x)$ ***kladné!***

Příklad 1 pokrač.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+4x_2^2x_3^2+2x_3^4$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}4x_1^3\\ 8x_2x_3^2\\ 8x_2^2x_3+8x_3^3\end{bmatrix}$$

Hessián H:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12x_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 8x_3^2 & 16x_2x_3\\ 0 & 16x_2x_3 & 8x_2^2+24x_3^2\end{bmatrix}$$

Hlavní subdeterminant = determinant matice, která vznikne z původní matice Vypuštěním postupně n-tého, n-1-ho,…,2-ho řádků a zároveň stejných sloupců

Příklad 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 10$$

Gradient $\nabla f(\boldsymbol{x}) = (2x_1 - 4,\ 8x_2 - 8,\ 4x_3 + 8) \ldots = (0,0,0)$

právě když platí: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$

Hessián H:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \ldots = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Příklad 2 pokrač.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det H_1 = 2$, $\det H_2 = 2.8 = 16$, $\det H_3 = \det H = 2.8.4 = 64$

Výpočet determinantu matice $3\mathrm{x}3$ – **Sarrusovo pravidlo**

Hlavní subdeterminanty jsou **kladné**: postačující podmínka minima je splněna v bodě $x^0 = (2,1,-2) \Rightarrow f$ nabývá v tomto bodě **lokální minimum** (je to zároveň globální minimum na $\mathbf{R}^3$)

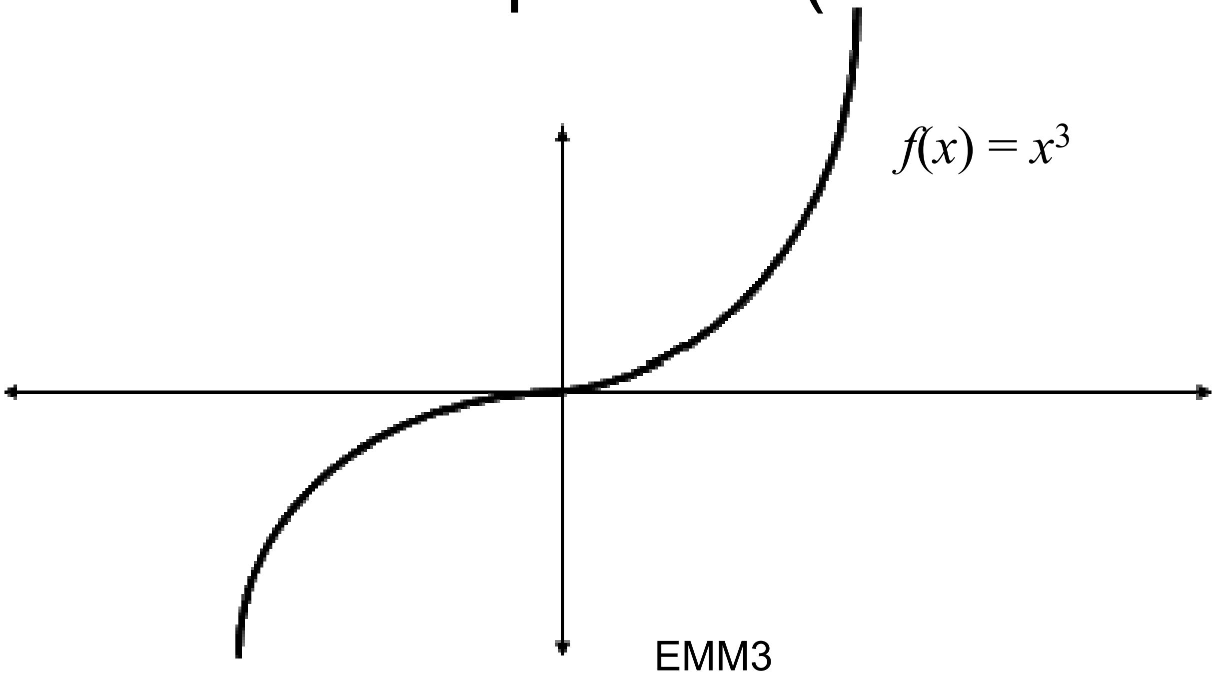
$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3} f(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3} f(\boldsymbol{x}) = \{(2,1,-2)\}$$

Příklad 3

$f(x) = x^3 \qquad x^0 = 0$ ... není bodem extrému !!!

$$f'(x) = 3x^2 \,, f''(x) = 6x$$
$$f'(0) = 0$$

$H = f''(0) = 0$ **Pozor!** postačující podmínka pro extrém není splněna! (Hessián = 0 !!!)



Příklad 4

$$f(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi}{x_1 + x_2} \quad \to \quad \max;$$

za podmínek

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 1 \\ 1 \le x_2 \le 2 \end{array}\right\} X$$

Existence optimálního řešení je zaručena spojitostí f na X.

Problém je jak ho nalézt!?? (nelineární funkce)

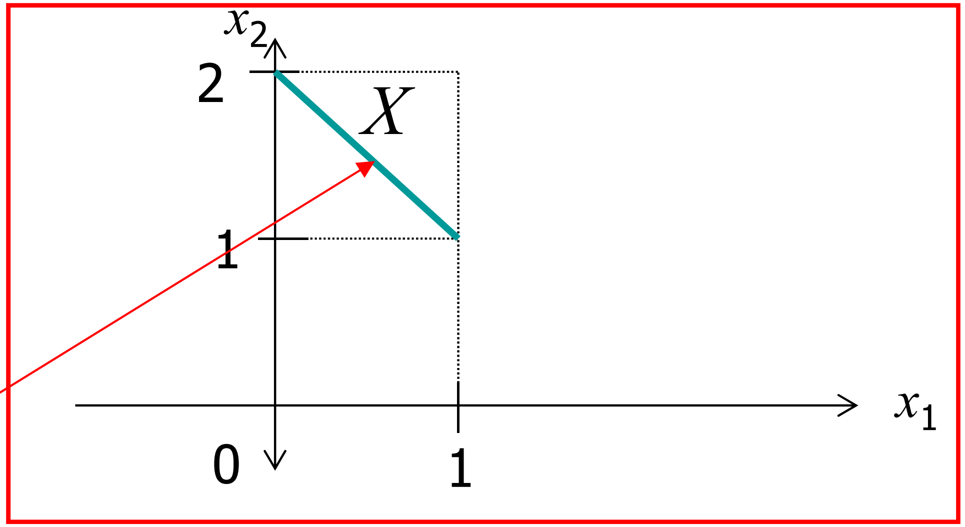
Příklad 4 pokrač. $f(x_1, x_2) = \sin\dfrac{\pi}{x_1 + x_2}$

Řešení: Funkce $\sin z$ nabývá maximální hodnotu 1 pro $z = \dfrac{\pi}{2}$ tj.

$$\frac{\pi}{x_1 + x_2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$1 \le x_2 \le 2$$



Maximum funkce f se nabývá ve všech bodech (x_1,x_2) na úsečce spojující body $(0,2)$ a $(1,1)$!