Algoritmy optimalizace

– navazuje na „Úvod do lineárního programování"

Osnova:

– Simplexová metoda
(jak řešit úlohy LP)

– Úloha kvadratického programování a Wolfeho metoda

2 15-15:52

– Úloha lineární komplementarity, souvislost s kvadratickým programováním, metoda řešení.

Motivační otázka:

Jak řešit úlohu LP?

Např.:

$$\max \; x + y$$
$$\text{p.p.} \quad -\tfrac{1}{2}x + y \leq 1$$
$$2x - y \leq 2$$
$$x, y \geq 0$$

2 15-16:01

Prakticky: Úlohu LP lze řešit např. v Excelu (modul „Řešitel").
Nebo optimalizačním softwarem ⋯ malé úlohy
(Xpress, Gurobi, CPLEX aj.) ⋯ velké úlohy

Teoreticky:
- zajímá nás postup výpočtu.

2 15-16:17

Simplexová metoda

- klasický algoritmus
- popsal jej americký matematik George B. Dantzig ≈ přelom 40. a 50. let

V Úvodu do LP jsme studovali úlohy LP ve tvaru

(P) $\max c^T x$ s.t. $Ax \leq b$

(D) $\min y^T b$ s.t. $y^T A = c^T$, $y^T \geq o^T$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

2 15-16:23

O simplexové metodě je nyní napsáno mnoho učebnic, knih, článků, ...
A úlohy v literatuře se simplexovou metodou řeší ve tvaru

(P') $\min c^T x$
s.t. $Ax = b$
$x \geqq 0$

(D') $\max y^T b$
s.t. $y^T A \leq c^T$

popř. $\max b^T y$
s.t. $A^T y \leq c$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$b \in \mathbb{R}^m$
$c^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

2 15-16:28

Úlohu (P') $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geqq 0$ nyní nazýváme primární úlohou ve standardním tvaru. Odpovídá duální úloze (D).

Úlohu (D') $\max y^T b$, $y^T A \leq c^T$ nyní nazýváme duální úlohou v normálním tvaru. Odpovídá primární úloze (P).

2 15-16:36

Změna v označení

dříve	význam	nyní
úloha (P) s proměnnou $\underline{x}$	primární úloha s proměnnou neomezenou ve znaménku	úloha (D') s proměnnou y^T
c^T	vektor cílové funkce	b
$a_1, a_2, \dots, a_m$ …. …. řádky matice A	vektory (gradienty) omezujících podmínek	$a_1, a_2, \dots, a_n$ …. …. sloupce matice A

2 15-16:40

dříve	význam	nyní
$b_1, b_2, \dots, b_m$	hodnoty pravých stran omez. podmínek	$c_1, c_2, \dots, c_n$
$y_1, y_2, \dots, y_m$	nezáporné duální proměnné	$x_1, x_2, \dots, x_n$

2 15-16:47

Pojmy pro simplexovou metodu

Jsou dva algoritmy simplexové metody:

- primární simplexová metoda
- duální simplexová metoda

Řešené úlohy:

(P') $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geqq 0$

(D') $\max y^T b$, $y^T A \leqq c^T$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Předpoklad: Soustava rovnic $Ax = b$ má alespoň jedno řešení $\underline{x}$

2 15-16:50

Často se předpokládá, že hodnost $A = m < n$.

Odtud plyne, že $Ax = b$ má aspoň jedno řešení (pro libovolné $\underline{b}$).

Bazické řešení:

Def.: (primární bazické řešení)

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ řeší soustavu $Ax = b$.

Řešení $\underline{x}$ je primárně bazické $\Longleftrightarrow$ množina sloupců $\{a_j ; x_j \neq 0\}$ .... je lineárně nezávislá.

2 15-16:56

Def.: Řešení $\underline{x}$ je přípustné primárně bazické řešení $\Longleftrightarrow$ je primárně bazické a $x \geqq 0$.

Def.: Řešení $\underline{x}$ je nedegenerované primárně baz. řeš. $\Longleftrightarrow$ množina sloupců

$\{a_j \,;\, x_j \neq 0\}$ ..... je lineárně nezávislá ..... tj. $\underline{x}$ je bazické

a současně

generuje zbývající sloupce matice A

$\{a_j \,;\, x_j = 0\}$

2 15-17:03

Def.: V opačném případě bazické řešení $\underline{x}$ je degenerované (v primárním smyslu).

Def.: (duální bazické řešení)

Nechť $y^T \in R^{1 \times m}$ je libovolný bod.

Bod y^T je duálně bazickým řešením $\Longleftrightarrow$

množina sloupců

$\{a_j \,;\, y^T a_j = c_j\}$ ..... generuje ostatní sloupce matice A

$\{a_j \,;\, y^T a_j \neq c_j\}$

2 15-17:10

Def.: Duální bazické řešení y^T je přípustné $\iff$

$\iff$ je duální baz. řeš. a platí $y^T A \leq c^T$

Def.: Duální bazické řešení y^T je nedegenerované

$\iff$ množina sloupců

$\{a_j \,;\, y^T a_j = c_j\}$ ... generuje ostatní sloupce matice A ... tj. y^T je bazické

a současně

... je lineárně nezávislá.

Def.: jinak baz. řeš. y^T je degenerované (v duálním smyslu)

2 15-17:16

Def.: (báze = basis)

A basis B is a set of indices $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ of columns of the matrix A such that the set of the columns

$\{a_j \,;\, j \in B\}$ ... is linearly independent & generates the remaining columns $\{a_j \,;\, j \notin B\}$

2 15-17:42

Basic solutions determined by a basis B:

Def.: (primal basic solution determined by the basis B)

Let $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ be a basis.

– solve the system of linear equations

$$A_B x_B = b$$

... recall the assumption $Ax = b$ ... has at least one solution

$\Downarrow$

$A_B x_B = b$ ... has exactly one solution

$$\sum_{j \in B} a_j x_j = b$$

2 15-17:47

– put $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$

put $x_N = 0$

Then $x = [x_B, x_N]$ ...... $x_j = \begin{cases} x_j & \dots j \in B \\ 0 & \dots j \in N \end{cases}$

is the primal basic solution determined by the basis B.

Remark: x_j – for $j \in B$ .... basic variables (bazické proměnné)

x_j ... for $j \in N$ .... non-basic variables (nebazické proměnné)

2 15-17:55

Def.: The basis B is primal feasible (primárně přípustná)
iff the $x \geqq 0$ ..... iff $x_B \geqq 0$

Def.: (dual basic solution determined by the basis B)
Let $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ be a basis.
- solve the system of linear equations
$$y^T A_B = c_B^T$$
... $y^T a_j = c_j$ for $j \in B$

2 15-18:00

- the system $y^T A_B = c_B^T$ ... has at least one solution y^T.

The solution y^T is a dual basic solution determined by the basis B.

Def.: The basis B is dual feasible iff the solution y^T satisfies $y^T A \leq c^T$

That is: put $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$
it has to hold $y^T A_N \leqq c_N^T$

2 15-18:03

Def.: The basis B is optimal $\iff$ it is both primal and dual feasible.

Observe: Let a basis B be given

x ... primal basic solution determined by B

y^T.... dual — // —

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T \underbrace{x_N}_{=0} = c_B^T x_B = y^T A_B x_B = y^T b$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j\in B} c_j x_j + \sum_{j\in N} c_j x_j$$

2 15-18:13

Hence, if B is optimal, then both $\underline{x}$ and $\underline{y}^T$ are feasible solutions of (P') and (D'), respectively.

So both $\underline{x}$ and $\underline{y}^T$ are optimal solutions to (P') and (D'), respectively, by the Weak Duality Theorem.

2 15-18:19

Example:

(P') min $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

s.t. $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 10 \quad | y_1$

$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 20 \quad | y_2$

$x_{1,2,3,4,5} \geqq 0$

subject to an polminal r.f.

1. Find some basis (or some bases)

$B = \{4, 5\}$

here: any $B \in \binom{\{1,\dots,5\}}{2}$ is a basis

2 15-18:23

2. Is $B = \{4,5\}$ primal feasible?

- the basis determines the solution

$x_4 = 10 \qquad x_{1,2,3} = 0$

$x_5 = 20$

- since $x_B = \binom{10}{20} \geqq 0$, the B is primal feasible

3. Find another primal feasible basis:

- e.g. $B = \{2,4\}$ ... solve $2x_2 + x_4 = 10$

$3x_2 = 20$

$x_2 = \frac{20}{3}$

$x_4 = 10 - 2 \cdot \frac{20}{3} < 0$ ... not primal feasible

2 15-18:32

- e.g. $B=\{2,5\}$ .... solve

$$\begin{aligned} 2x_2 \quad &= 10 \\ 3x_2 + x_5 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_2 = 5 \qquad 3\cdot 5 + x_5 = 20$$

$$x_5 = 5$$

4. Is $B=\{4,5\}$ dual feasible?

- solve

$$\begin{aligned} y_1 \quad &= 4 \\ y_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D') \max\ & 10\cdot y_1 + 20 y_2 \\ & -y_1 - y_2 \le 1 \\ & 2y_1 + 3y_2 \le 2 \\ & -3y_1 - 4y_2 \le 3 \\ & y_1 \le 4 \\ & y_2 \le 5 \end{aligned}$$

- test: $2y_1 + 3y_2 \le 2$ .... is violated

→ B is not dual feasible

2 15-18:39

5. Is $B=\{2,5\}$ dual feasible?

- solve

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 &= 2 \\ y_2 &= 5 \end{aligned} \quad \cdots\ y_1 = \frac{-13}{2}$$

- test: $-y_1 - y_2 \le 1$ ..... $+\frac{13}{2} - 5 > 1$

... violated

→ B is not dual feasible.

2 15-18:41

Vsuvka: Dvě věty o alternativě

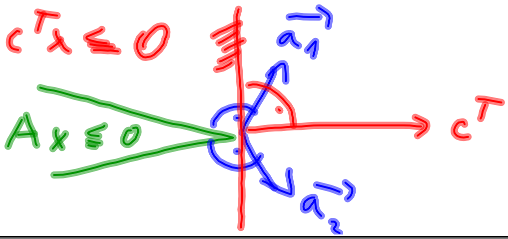
Opakování: Farkasovo lemma $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$c^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0 \Longrightarrow c^T x \leq 0 \qquad (*)$$

právě tehdy, když

$$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1\times m}, u^T \geq 0^T : c^T = u^T A \qquad (**)$$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "c^T"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dl, dashed, "u^T"] \\ \mathbb{R}^1 & \end{tikzcd}$$

2 22-15:54

Základní lemma lineární algebry:

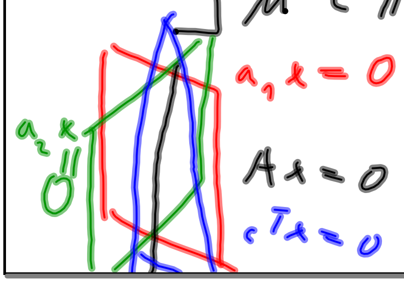
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $c^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Potom platí

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \Longrightarrow c^T x = 0$$

právě tehdy, když

$$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1\times m} : c^T = u^T A$$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "c^T"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dl, dashed, "u^T"] \\ \mathbb{R}^1 & \end{tikzcd}$$

2 22-16:07

Důkaz: $\Rightarrow$ D.M.I. podle m ... počet řádků matice A

I. $m=0$ ... matice A nemá žádné řádky

víme: $\forall x \in \mathbb{R}^n: \ Ax = 0 \rightarrow c^T x = 0$

$$a_1 x = 0 \wedge a_2 x = 0 \wedge \dots \wedge a_m x = 0,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_m$ ... řádky matice A

- když $m=0$, pak konjunkce je prázdná, tedy vždy logicky pravdivá,
- tedy víme:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \ c^T x = 0,$$

tedy c^T je nulový vektor

2 22-16:16

co máme dokázat:

$$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}: \ c^T = u^T A$$
$$= u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_m a_m$$

jestliže $m=0$, potom tento součet je prázdný, tedy roven nule.

Závěr: jestliže $m=0$, potom směr "$\Rightarrow$" základního lemmatu platí.

II. Indukční předpoklad:

dokazované tvrzení platí pro $m \geq 0$

2 22-16:24

II. dokazujeme pro $m+1$:

- předpokládáme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad a_1 x = 0 \wedge \dots \wedge a_m x = 0 \wedge a_{m+1} x = 0 \Rightarrow \Rightarrow c^T x = 0$$

- máme dokázat, že

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_m, \mu_{m+1} \in \mathbb{R}: c^T = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m + \mu_{m+1} a_{m+1}$$

Rozlišíme dva případy:

a) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \; a_1 x = 0 \wedge \dots \wedge a_m x = 0 \Longrightarrow a_{m+1} x = 0$

b) $\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n: \; a_1 \hat{x} = 0 \wedge \dots \wedge a_m \hat{x} = 0 \wedge a_{m+1} \hat{x} \neq 0$

2 22-16:29

Případ a) je snadný. Platí totiž:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: a_1 x = 0 \wedge \dots \wedge a_m x = 0 \Rightarrow c^T x = 0$$

Tudíž podle indukčního předpokladu

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}: \; c^T = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m.$$

Položíme $\mu_{m+1} = 0$ a jsme hotovi.

Uvažujeme případ b)

$$a_1 \hat{x} = 0 \wedge \dots \wedge a_m \hat{x} = 0 \wedge a_{m+1} \hat{x} \neq 0$$

Předpokládejme bůno, že $a_{m+1} \hat{x} = 1$

2 22-16:30

Pokud $a_{m+1}\hat{x} \neq 1$, pak uvažuj bod $\hat{x} := \frac{\hat{x}}{a_{m+1}\hat{x}}$

Pak $a_{m+1}\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) =$

$$= a_{m+1}x - (a_{m+1}x)\cdot\underbrace{a_{m+1}\hat{x}}_{=1} = 0$$

Tudíž opět:

$\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\left.\begin{aligned} &a_1\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) = 0 \wedge \dots \\ &\dots\dots \\ &a_m\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) = 0 \wedge \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\Longrightarrow c^T\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) = 0$$

2 22-16:42

Chceme použít indukční předpoklad, proto rovnice upravíme:

$$a_i\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) = a_i x - (a_{m+1}x)\cdot a_i\hat{x}$$

$$= \left(a_i - (a_i\hat{x})\cdot a_{m+1}\right)(x)$$

obdobně

$$c^T\left(x - (a_{m+1}x)\cdot\hat{x}\right) = \left(c^T - (c^T\hat{x})\cdot a_{m+1}\right)(x)$$

Tedy podle indukčního předpokladu

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}: \left(c^T - (c^T\hat{x})\cdot a_{m+1}\right) =$$

$$= \mu_1\cdot\left(a_1 - (a_1\hat{x})\cdot a_{m+1}\right) + \dots + \mu_m\cdot\left(a_m - (a_m\hat{x})\cdot a_{m+1}\right)$$

2 22-16:48

Přesněji:

$$c^T = u_1 a_1 + \dots + u_m a_m + \underbrace{\left(c^T\hat{x} - (a_1\hat{x})\cdot u_1 - \dots - (a_m\hat{x})\cdot u_m\right)}_{u_{m+1}}\cdot a_{m+1}$$

$\Leftarrow$ ... platí triviálně:

- víme: $\exists u^T \in \mathbb{R}^{1\times m} : c^T = u^T A$
- máme dokázat: $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \Rightarrow c^T x = 0$
- zvol $x \in \mathbb{R}^n$ libovolně
- předpokládej, že $Ax = 0$
- máme dokázat, že $c^T x = 0$
- ale víme $c^T = u^T A$,

tedy $c^T x = u^T \underbrace{Ax}_{=0} = 0$ c.b.d.

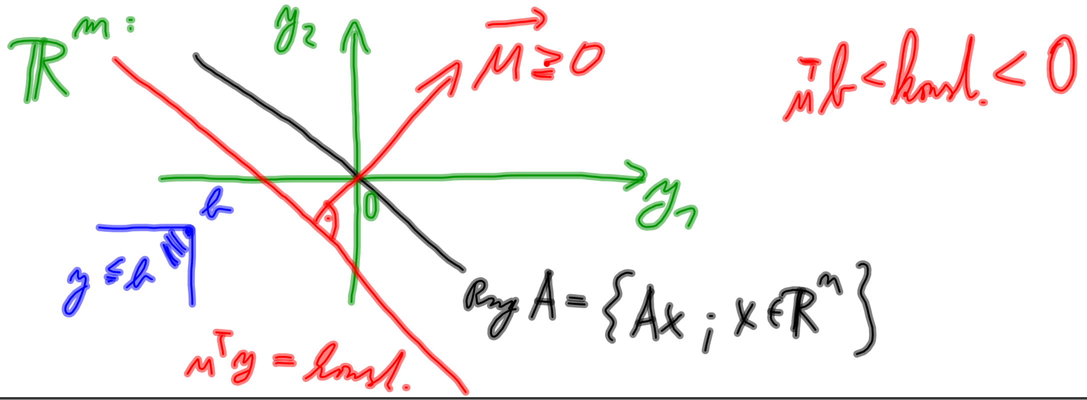
2 22-16:55

Opakování: Galeova věta: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Soustava $Ax \leq b$ .... nemá řešení

právě tehdy, když

$$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1\times m}, u^T \geqq 0 : u^T A = 0 \wedge u^T b < 0$$



2 22-17:01

Fredholmova věta o alternativě:

nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$

Pak: soustava $Ax = b$ ..... nemá řešení

právě tehdy, když

$$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1 \times m} : u^T A = 0 \wedge u^T b \neq 0$$

Důkaz: $\Leftarrow$ ..... platí triviálně (sporem)

- víme, že $\exists u^T \in \mathbb{R}^{1 \times m} : u^T A = 0 \wedge u^T b \neq 0$
- předpokládejme, že soustava $Ax = b$ má řešení

Máme: $Ax = b \quad | \; u^T \cdot ()$

$$\underbrace{u^T A x}_{=0} = \underbrace{u^T b}_{\neq 0} \quad \text{..... spor}$$

$\Rightarrow$ ... pomocí základního lemmatu LA, trikem homogenizace

- soustava $Ax = b$ ..... nemá řešení
- tudíž

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall t \in \mathbb{R} : Ax = bt \Rightarrow t = 0$$

neboli

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 :$$

$$(A \;\; -b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Tedy podle základního lemmatu

$\exists u^T \in \mathbb{R}^{1\times m}: \; u^T\begin{pmatrix} A & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

neboli $u^T A = 0 \;\wedge\; -u^T b = 1$

$u^T b = -1 \neq 0$

c.b.d.

2 22-17:18

Uvažujeme úlohy

(P') $\min c^T x$

ř.p. $Ax = b$

$x \geq 0$

(D') $\max y^T b$

ř.p. $y^T A \leq c^T$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \in \mathbb{R}^m$

$c \in \mathbb{R}^n$

Připomeňme:

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ řeší soustavu $Ax = b$.

Řešení $\underline{x}$ je bazické (primárně) $\Longleftrightarrow$

množina sloupců $\{a_j ; x_j \neq 0\}$

je lineárně nezávislá.

Platí-li navíc $x \geq 0$, pak x je přípustné baz. řešení.

2 29-15:53

Věta: I. Jestliže úloha (P') je přípustná, potom má i přípustné bazické řešení.

II. Jestliže úloha (P') má optimální řešení, potom má i optimální bazické řešení.

Důkaz: I. Předpokládejme, že (P') má alespoň jedno přípustné řešení.

Mezi všemi přípustnými řešeními $\underline{x}$ soustavy $Ax = b, x \geq 0$, vybereme takové, které má maximální počet nulových složek.

2 29-16:01

Jedno takové řešení označíme $\underline{x}^*$.

Ukážeme, že $\underline{x}^*$ je bazické řešení.

Pro spor předpokládejme, že není bazické.

To znamená, že množina sloupců

$$\{a_j \,;\, x_j^* \neq 0\} \quad \text{je lineárně závislá.}$$

Tedy existuje vektor $y \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$x_j^* = 0 \Longrightarrow y_j = 0 \qquad \& \; y \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{x_j^* \neq 0} a_j \cdot y_j = 0$$

2 29-16:08

BÚNO je aspoň jedna složka $y_j < 0$.

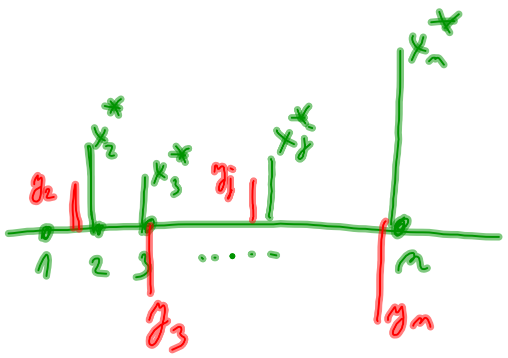
Pokud je $y \geqq 0$, potom vezmi vektor $y := -y$.

Nyní uvažujeme součet

$$x^* + \lambda y \qquad \text{pro } \lambda \geqq 0$$

$\lambda \ldots$ roste

$$Ax^* = b$$
$$Ay = 0 \quad | \cdot \lambda$$
$$\overline{A(x^* + \lambda y) = b}$$



2 29-16:16

Teď zvolíme $\lambda = \min \left\{ \frac{-x_j^*}{y_j} \; ; \; y_j < 0 \right\}$

Nechť $\underline{k}$ je index, ve kterém minimum nastalo. Pak $x^* + \lambda y \geqq 0$ & $x_k^* + \lambda y_k = 0$

& $A(x^* + \lambda y) = b$

a) $y_j \geqq 0$, pak:

$\underbrace{x_j^*}_{\geqq 0} + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{y_j}_{\geqq 0} \geqq 0$

b) $y_j < 0$, pak:

$x_j^* + \lambda y_j \geqq 0$?

$\lambda y_j \geqq -x_j^*$? $\quad | : y_j < 0$

2 29-16:21

? $\lambda \leqq \frac{-x_j}{y_j}$ ...... pro všechna j taková, že $y_j < 0$

Tedy potřebujeme

$\lambda \leqq \min \left\{ \frac{-x_j}{y_j} \; ; \; y_j < 0 \right\}$ ... a to je splněno.

Předpokládali jsme, že $x^* \geqq 0$ je řešení soustavy $Ax^* = b$, které má maximální počet nulových složek. (A mimo jiné $x_k^* > 0$.) A předp., že $\underline{x}^*$ není báz.

Našli jsme nové řešení $(x^* + \lambda y) \geqq 0$, $A(x^* + \lambda y) = b$, které má o jednu nulovou složku víc $(x_k^* + \lambda y_k) = 0$, což je spor s volbou $\underline{x}^*$. Tedy x^* je bazické.

2 29-16:29

II. Předpokládáme, že (P') má alespoň jedno optimální řešení.

Nechť $\underline{x}^*$ je takové optimální řešení, které mezi všemi opt. řešeními má maximální počet nulových složek.

Ukážeme, že $\underline{x}^*$ je bazické optimální řešení.

Sporem: není bazické

$$\{a_j ; x_j^* \neq 0\} \text{ ... je lineárně závislá}$$

$$\exists y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0 : (x_j^* = 0 \Rightarrow y_j = 0) \;\&\; Ay = 0$$

... obdobně jako dříve

búno aspoň jedno $y_j < 0$

2 29-16:38

Uvažujeme součet

$$x^* + \lambda y \quad \text{..... } \lambda \geq 0$$

Ukážeme, že $c^T(x^* + \lambda y) = c^T x^*$,

$A(x^* + \lambda y) = b$ jako výše

tedy $x^* + \lambda y$ ..... přípustné optimální řešení, dokud $x^* + \lambda y \geq 0$

Tedy potřebujeme ukázat:

$$c^T x^* + \lambda c^T y = c^T x^* \quad \text{..... i pro } \lambda \neq 0$$

$$c^T y = 0$$

Sporem:

- kdyby $c^T y < 0$
  - pak uvažuj malé $\lambda > 0$ tak, aby $x^* + \lambda y \geq 0$

2 29-16:46

Tedy $x_j^* + \lambda y_j \geqq 0$ ... pro všechna $j = 1, \dots, n$

a) $y_j \geqq 0$ ... přijmé $\underbrace{x_j^*}_{\geqq 0} + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{y_j}_{\geqq 0} \geqq 0$

b) $y_j < 0$ ... tedy chceme

$$\lambda y_j \geqq -x_j^*$$

$$\lambda \leqq \frac{-x_j^*}{y_j}$$

- např. $\lambda = \min \left\{ \frac{-x_j^*}{y_j} ; y_j < 0 \right\}$

Pak $c^T (x^* + \lambda y) < c^T x^*$ ... tedy x^* není optimální
- spor

2 29-16:52

- kdyby $c^T y > 0$ ... analogicky
- pak uvažuj malé $\lambda < 0$ ... aby $x^* + \lambda y \geqq 0$

a) $y_j \leqq 0$ ... přijmé $\underbrace{x_j^*}_{\geqq 0} + \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{y_j}_{\leqq 0} \geqq 0$

b) $y_j > 0$ ... chceme $x_j^* + \lambda y_j \geqq 0$

$$\lambda y_j \geqq -x_j^*$$

$$\lambda \geqq \frac{-x_j^*}{y_j}$$

$\lambda = \max \left\{ \frac{-x_j^*}{y_j} ; y_j > 0 \right\}$

Pak $c^T (x^* + \lambda y) < c^T x^*$ ... spor s optimalitou $\underline{x^*}$.

Tedy $c^T y = 0$.

2 29-16:56

Obdobně jako dříve: ... předp., že aspoň jedno $y_j < 0$

- najdi $\lambda = \min\left\{ \frac{-x^*_j}{y_j} \; ; \; y_j < 0 \right\}$
- pak $A(x^* + \lambda y) = b$, $\quad x^* + \lambda y \geqq 0$
- a $c^T(x^* + \lambda y) = c^T x^*$ $\quad x^*_k + \lambda y_k = 0$

Tedy $x^* + \lambda y$ je optimální a má o jednu nulovou složku víc – spor.

Tedy $\underline{x}^*$ je bazické opt. řešení. c.b.d.

2 29-17:00

Máme úlohy

(P') $\min c^T x$
p.p. $Ax = b$
$x \geqq 0$

(D') $\max y^T b$
$y^T A \leq c^T$

Připomeňme: nechť $y^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ je libovolný bod.

Bod y^T je duální bazické řešení $\iff$

$\{ a_j \; ; \; y^T a_j = c_j \}$ ..... generuje všechny (obývající) sloupce matice A

y^T je přípustné baz. řešení, když navíc platí $y^T A \leq c^T$.

2 29-17:21

<u>Věta</u>: I. Jestliže úloha (D') je přípustná, potom má i duální přípustné baz. řešení.

II. Jestliže úloha (D') má optimální řešení, potom má i optimální bazické řešení.

(Důkaz později.)

2 29-17:25

<u>Příklad</u>: Jak vypadá bazické řešení?

$$(P') \quad \min\ 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

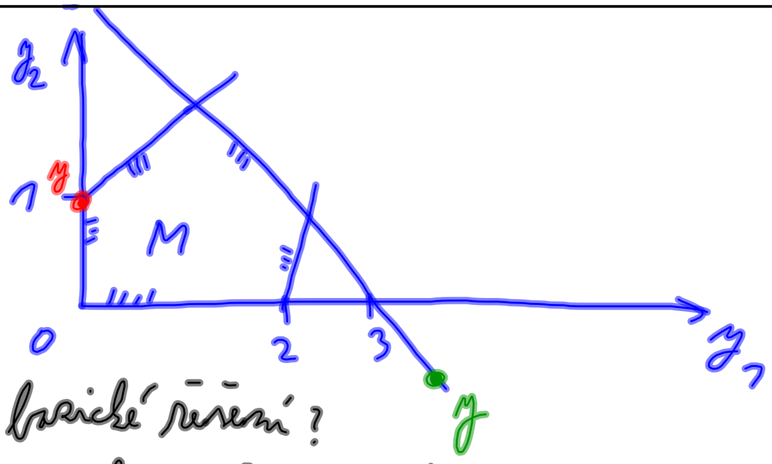
$$\text{p.p.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \quad &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \quad - x_5 &= 1 \\ x_{1,2,3,4,5} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(D') \quad \max\ y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &\leq 4 \\ y_1 + y_2 &\leq 3 \\ -y_1 + y_2 &\leq 1 \\ -y_1 \quad &\leq 0 \\ -y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

2 29-17:29

Duální úloha



? je bod y bazické řešení?

- množina sloupců: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 3 \right\}$

negeneruje ostatní sloupce

→ není bazické

2 29-17:42

? je bod y bazické řešení?

- množina sloupců

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a_j ;\ y^T a_j = c_j \right\}$$

- generuje zbývající sloupce $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- je bazické, je přípustné

<u>Poučení:</u> Přípustná bazická řešení (duální) jsou právě vrcholy*) konvexního polyedru $M = \{ y^T \in \mathbb{R}^{1 \times m} ;\ y^T A \le c^T \}$ ... množiny přípustných řešení.

*) obecně: minimální vlastní stěny

2 29-17:51

Bod $y = (5, 6)$ .... průsečík podmínek

$$-y_1 + y_2 = 1$$

... je také bazické řešení

$$2y_1 - y_2 = 4$$

- množina sloupců $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

generuje ostatní sloupce ... $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- ale není přípustné baz. řešení ... $y_1 + y_2 > 3$ ... porušeno

? Má úloha (D') optimální řešení?

- má ... např. $y^* = (2,1)$

- toto řešení není bazické .... $y_1 + y_2 = 3$ je jediná aktivní podmínka

2 29-18:03

? je řešení $y^* = (2,1)$ opravdu optimální?

- uvažuj řešení úlohy (P') $x = (0,1,0,0,0)$ .... cílová funkce má také hodnotu 3

Tedy y^* a $\underline{x}$ jsou optimální

? Má úloha (D') bazické opt. řešení?

- má dvě bazická opt. řeš.:

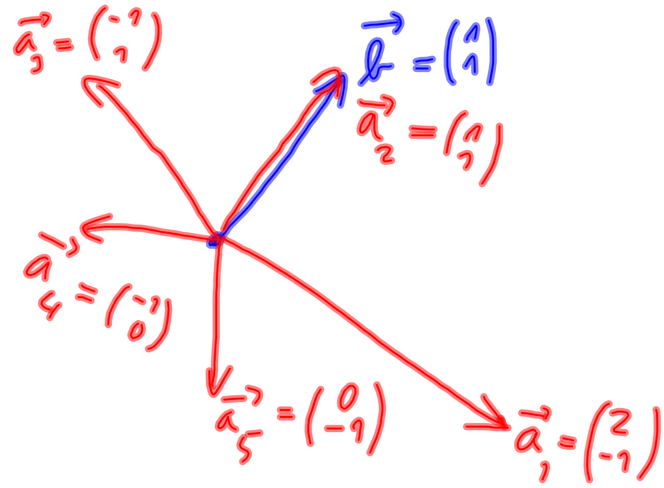
$$\begin{array}{l} -y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ \hline \underline{y_1 = 1} \quad 2y_2 = 4 \\ \qquad \underline{y_2 = 2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2y_1 - y_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ \hline 3y_1 \qquad = 7 \\ \underline{y_1 = \frac{7}{3}} \quad \underline{y_2 = \frac{2}{3}} \end{array}$$

2 29-18:10

Jak vypadají primární bazická řešení?

- nakreslíme vektor $\underline{b}$ ..... pravou stranu
- nakreslíme sloupce $a_1, \dots, a_n$ ..... řešíme $Ax = b$

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j \cdot x_j = \vec{b}$$



2 29-18:13

např. $x_2 = 2$, $x_4 = x_5 = 1$ .... řeší, ale není bazické

např. $x_2 = 1$ .... řeší, je bazické – je přípustné
$x_{1,3,4,5} = 0$ je degenerované, je optimální

např.: $x_4 = x_5 = -1$ ... řeší, je bazické, není přípustné
$x_{1,2,3} = 0$

např.: $x_1 = 2$ $x_3 = 3$ .... je bazické, přípustné
$x_{2,4,5} = 0$

např. $x_3 = 1$ $x_4 = -2$ ... řeší, je bazické, není přípustné
$x_{1,2,5} = 0$

2 29-18:30

Úloha (P') má dvě optimální báze:

$$B = \{1,2\} \quad \text{a} \quad B = \{2,3\}$$

ale obě určují stejné bazické řešení $x_2 = 1$

$$x_{1,3,4,5} = 0$$

V úloze (D') tyto báze určují opt. řešení

$$y = (1,2) \quad \text{a} \quad y = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

2 29-18:42

Věta: I. Jestliže úloha (D') je přípustná, potom má i bazické přípustné řešení.

II. Jestliže úloha (D') má optimální řešení, potom má i bazické optimální řešení.

Důkaz: I. Mezi všemi přípustnými řešeními úlohy (D') vybereme takové, v němž počet aktivních podmínek je maximální.

3 7-15:52

Toto řešení označíme $\underline{y^{*T}}$.

Tedy platí $y^{*T}A \leq c^T$ a množina indexů

$\{j \in \{1, \dots, n\};\ y^{*T}a_j = c_j\}$

je maximální.

Ukážeme, že toto řešení y^{*T} je bazické.

Sporem: není bazické.

Tedy množina sloupců

$\{a_j ;\ y^{*T}a_j = c_j\}$ negeneruje všechny sloupce matice A.

Například sloupec $\underline{a_k}$ není vygenerován.

3 7-16:06

Tedy bod y^{*T} řeší soustavu

$$y^T a_j = c_j$$

... pro j taková, že $y^{*T} a_j = c_j$

Budeme řešit soustavu

$$\vec{r}^{\,T} a_j = 0$$

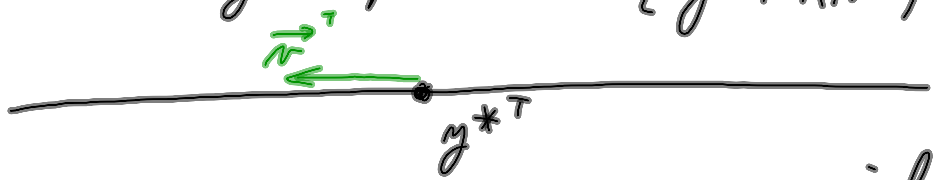
... pro j taková, že $y^{*T} a_j = c_j$

$$\vec{r}^{\,T} a_k = -1$$

Tato soustava má alespoň jedno řešení $\vec{r}$, podle Fredholmovy věty, protože sloupec a_k nezávisí na ostatních sloupcích a_j.

3 7-16:12

Nyní uvažujeme přímku $\{y^{*T} + \lambda \vec{r}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



Pak $$(y^{*T} + \lambda r^T) \cdot a_j = c_j$$ ... pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ ... pro j taková, že $y^{*T} a_j = c_j$

a $$(y^{*T} + \lambda r^T) \cdot a_k = c_k$$ ... pro vhodné λ

$$\lambda r^T a_k = c_k - y^{*T} a_k$$

$$\lambda = \frac{c_k - y^{*T} a_k}{\underbrace{r^T a_k}_{=-1}} = \underbrace{y^{*T} a_k - c_k}_{<0}$$

3 7-16:19

Tedy hodnotu λ snižujeme od 0 pro $y^* a_k - c_k$, dokud bod $(y^* + \lambda \vec{r})^T$ zůstává přípustný, tj. splňuje soustavu $(y^{*T} + \lambda \vec{r}^T) A \leq c^T$.

Tedy potřebujeme

$$(y^* + \lambda \vec{r})^T a_i \leq c_i \quad \text{... pro všechna } i = 1, \dots, n$$

$$\underbrace{\lambda}_{\leq 0} \vec{r}^T a_i \leq \underbrace{c_i - y^{*T} a_i}_{\leq 0} \quad \text{... protože bod } y^* \text{ je přípustný.}$$

- jestliže $\vec{r}^T a_i \geq 0$, potom tento vztah je splněn automaticky.

3 7-16:34

- jestliže $r^T a_i < 0$, potom ... a) $y^{*T} a_i < c_i$

  – protože kdyby $y^* a_i = c_i$, pak by $r^T a_i = 0$ ..... tak jsme řešili

  ... b) dělíme: potřebujeme

$$\lambda \geq \frac{c_i - y^{*T} a_i}{\vec{r}^T a_i}$$

...... pro všechna i taková, že $\vec{r} \cdot a_i < 0$ (jmenovitě i pro $i = k$)

Tedy zvol

$$\lambda = \max \left\{ \frac{c_i - y^{*T} a_i}{\vec{r}^T \cdot a_i} ; \ \vec{r}^T a_i < 0 \right\}$$

3 7-16:40

Nechť $\underline{l}$ označuje ten index i, ve kterém maximum nastalo. Potom bod

$$\underbrace{\left(y^{*T} + \lambda \vec{r}^{\,T}\right)}_{\text{… je přípustný}} A \leqq c^T$$

a kromě podmínek číslo $\underline{j}$ … $y^* a_j = c_j$

je aktivní také podmínka $(y^* + \lambda \vec{r}) a_j = c_j$

číslo l $(y^* + \lambda \vec{r}) a_l = c_l$

což je spor s tím, že v bodě $\underline{y^*}$ byl maximální počet aktivních podmínek. Tedy y^* je bazické.

3 7-16:46

II. Mezi všemi optimálními řešeními úlohy (D') vybereme takové, ve kterém je počet aktivních podmínek maximální.

Takové řešení označíme $\underline{y^*}$.

Ukážeme, že je bazické.

sporem: není bazické

tedy $\{ a_j ; y^{*T} a_j = c_j \}$ … negenerují např. sloupec $\underline{a_l}$

tedy platí $y^{*T} a_l < c_l$

3 7-16:51

Řešíme soustavu $\vec{r}^T a_j = 0$ ... pro j taková, že $y^{*T} a_j = c_j$

$$\vec{r}^T a_k = -1$$

Soustava má aspoň jedno řešení.

Ukážeme, že $\vec{r}^T \cdot b = 0$ ... cílová funkce ... úloha (D')

max $y^T b$
s.t. $y^T A \leq c^T$

(Pak bude platit

$(y^* + \lambda \vec{r}) \cdot b = y^* \cdot b$,

tedy body $y^* + \lambda \vec{r}$ jsou také optimální
(jsou-li přípustné).)

3 7-16:55

• Kdyby $\vec{r} \cdot b < 0$ ... tedy $(y^* + \lambda \vec{r}) \cdot b < y^{*T} b$ pro $\lambda > 0$

– pak uvažujme malinké $\lambda > 0$ tak,
aby $(y^* + \lambda \vec{r}) \cdot a_i < c_i$ ... pro vš. i taková, že $y^* a_i < c_i$

– pak bod $(y^* + \lambda \vec{r})$ je přípustný
a hodnota cílové funkce menší – což je spor s optimalitou bodu y^*

• Kdyby $\vec{r} \cdot b > 0$
... analogicky ... uvažuj malinké $\lambda < 0$.

• Tedy musí být $\vec{r} \cdot b = 0$.

3 7-17:00

Zbytek jako v předch. části I,

Zvol $\lambda = \max \left\{ \frac{c_i - y^* a_i}{\vec{v}^T a_i} ; v a_i < 0 \right\}$

nechť $\underline{l}$ je index $\underline{i}$, ve kterém nastalo maximum.

Pak $(y^* + \lambda \vec{v})^T \cdot b = y^{*T} b$, tedy bod $(y^* + \lambda v)$

je optimální a kromě podmínek

$(y^* + \lambda \vec{v}) a_j = c_j$ ...... pro j taková, že $y^* a_j = c_j$

platí též $(y^* + \lambda \vec{v}) a_l = c_l$

což je spor s tím, že v opt. bodě y^* byl max. počet aktivních podmínek. Tedy y^* je krajní. ~~c.d.~~

3 7-17:07

3 7-17:08