Popis algoritmu simplexové metody: primární simplexová metoda

Řešíme úlohy

(P') $\min c^T x$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

(D') $\max y^T b$
$$y^T A \leq c^T$$

Předpoklad: soustava $Ax = b$ má řešení.

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$b \in \mathbb{R}^m$
$c^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

3 14-15:55

Chceme použít primární simplexovou metodu.

Proto předpokládejme, že známe výchozí primárně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

báze ... $\{a_j ; j \in B\}$ ... je lineárně nezávislá & generuje všechny zbývající sloupce matice A

Primární báz. řešení určené bází B:

- řešíme $A_B x_B = b$ ..... má právě jedno řešení

$\Rightarrow$ platí $x_B \geq 0$ a klademe $x_N = 0$, kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

3 14-15:59

Primární simplexová metoda:

1. Máme primárně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

   Řešíme $A_B x_B = b$, vyjde $x_B \geqq 0$,

   položíme $x_N = 0$, kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

   B ..... báze ..... indexy basických proměnných

   N .... indexy nebasických proměnných

   x_B ..... basické proměnné

   x_N ..... nebasické proměnné

3 14-16:05

2. Test optimality. (je báze B optimální?)

   Řešíme soustavu $y^T A_B = c_B^T$ ---- má aspoň jedno řešení (podle Fredholmovy věty)

   Ptáme se: platí $y^T A_N \leqq c_N^T$?

   (je báze B přípustná také duálně?)

3. Ano. $(y^T A \leqq c^T)$

   Konec výpočtu: nalezená řešení $\underline{x}$ a $\underline{y}$ úloh (P') a (D') jsou optimální,

   báze B je optimální.

3 14-16:10

4. Ne.

$$\exists \ell \in N : y^T a_\ell > c_\ell$$

tzv. volba klíčového sloupce
(angl. pivot column)

Řešíme rovnici

$$a_\ell = A_B r_B$$

klíčový sloupec ℓ vyjádříme jako lin. kombinaci sloupců z báze

má právě jedno řešení

3 14-16:16

Nyní si povšimneme:

$$a_\ell - A_B r_B = 0 \quad | \cdot \lambda \geq 0$$

$$A_B x_B = b$$

$$\underbrace{a_\ell \cdot \lambda}_{\geq 0} + A_B \underbrace{(x_B - r_B \cdot \lambda)}_{\text{nové } x_B \geq 0} = b$$

nové x_ℓ

λ – hodnota nové bazické proměnné

chceme

Naším cílem je najít co největší hodnotu $\lambda \geq 0$ tak, aby $x_B - r_B \cdot \lambda \geq 0$

3 14-16:24

Rozlišíme dva případy.

Ptáme se: je $R_B \leq 0$?

5. Ano. $(R_B \leq 0)$

Konec výpočtu: cílová funkce úlohy (P') klesá k $-\infty$ a úloha (D') není přípustná.

$$c^T \cdot (\text{nové } x) = \underbrace{c_\ell}_{< y^T a_\ell} \cdot \lambda + \underbrace{c_B^T}_{= y^T A_B} \cdot (x_B - R_B \cdot \lambda) =$$

$$= c_\ell \cdot \lambda + c_B^T x_B - y^T A_B R_B \cdot \lambda =$$

3 14-16:31

$$= c_B^T x_B + (c_\ell - y^T \underbrace{A_B R_B}_{= a_\ell}) \cdot \lambda$$

$$= c_B^T x_B + \underbrace{(c_\ell - y^T a_\ell)}_{< 0} \cdot \underbrace{\lambda}_{\to +\infty} \longrightarrow -\infty$$

a nové $\underline{x}$ je přípustné .... nové $x \geq 0$

$$\lambda \geq 0 \ \& \ \underbrace{x_B}_{\geq 0} - \underbrace{R_B \cdot \lambda}_{\leq 0} \geq 0 \quad \to +\infty$$

3 14-16:38

6. Re. $(R_B \not\leq 0)$

Chceme $\lambda \geq 0$ co největší tak, aby $x_B - R_B \cdot \lambda \geq 0$.

- pevně $i \in B$ a uvažuj nerovnici $x_i - R_i \lambda \geq 0$
- jsou dva případy:

a) $R_i \leq 0$ ..... nerovnice platí samozřejmě pro libovolné $\lambda \geq 0$

b) $R_i > 0$ ... potřebujeme

$$x_i - R_i \lambda \geq 0$$
$$x_i \geq R_i \lambda \quad | : R_i > 0$$
$$\lambda \leq \frac{x_i}{R_i}$$ ... pro všechna $i \in B$ taková, že $R_i > 0$

3 14-16:41

Tedy polož

$$\lambda = \min \left\{ \frac{x_i}{R_i} ;\ i \in B,\ R_i > 0 \right\}$$

Nechť $\underline{k}$ označuje index $\underline{i}$, ve kterém minimum nastalo.

Polož $B := B \cup \{l\} \setminus \{k\}$ ... indexy $\underline{k}$ a $\underline{l}$ se v bázi vymění

Toto je nová primárně přípustná báze.

Jdi na krok 1.

3 14-16:46

Otázka: Je nové $B' = B \cup \{l\} \setminus \{k\}$ primárně přípustná báze?

? Je nové B' báze?

- sloupce $\{a_l, a_i ; i \in B, i \neq k\}$ ... lineárně nezávislé?

- kdyby $a_l x_l + \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} a_i x_i = 0$

$$a_l = A_B r_B = \sum_{i \in B} a_i r_i$$

$$\sum_{i \in B} a_i r_i x_l + \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} a_i x_i = 0$$

... lineární nezávislost je jasná

3 14-16:52

- sloupce $\{a_l, a_i ; i \in B, i \neq k\}$ ... generují ostatní sloupce?

- stačí ověřit, zda lze vygenerovat sloupec a_k:

ale my víme:

$$a_l = \sum_{i \in B} a_i r_i \quad \text{... a } r_k > 0$$

tedy

$$a_k = a_l \cdot \frac{1}{r_k} - \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} a_i \frac{r_i}{r_k}$$

Přípustnost báze B':

- platí $a_l \cdot \underbrace{t}_{\geq 0} + A_B \underbrace{(x_B - r_B \cdot t)}_{\geq 0} = b$

3 14-16:59

Konečnost primární simplexové metody, degenerace a cyklus:

Otázka: Je primární simplexová metoda konečná?

– Jestliže v každé iteraci v 6. kroku určíme $\lambda > 0$ (po celou dobu výpočtu), potom simplexová metoda skončí po konečném počtu iterací (buď v kroku 3. ... najde řešení anebo v kroku 5. ... úlohy nemají řešení)

3 14-17:05

– Protože: Daná báze B jednoznačně určuje bazické řešení $\underline{x}$ (baz. řešení $\underline{y}$ nemusí být jednoznačné), a tím jednoznačně určuje hodnotu cílové funkce $c^T x = y^T b$ ← ... pro kterékoliv baz. řeš. $\underline{y}$ určené bází B

– Hodnota cílové funkce v nové bázi $B' = B \cup \{l\} \setminus \{k\}$ určíme $\lambda = \lambda_{max} = \min\left\{\frac{x_i}{\kappa_i} : i \in B,\ \kappa_i > 0\right\} > 0$ ... předp.

$$c_l \cdot \lambda + c_B^T (x_B - \kappa_B \lambda) = c_B^T x_B + \underbrace{(c_l - y^T a_l)}_{<0} \cdot \underbrace{\lambda}_{>0} <$$

$$< c_B^T x_B \ {}^{*)}$$

*) $c_B^T x_B$ ... hodnota ve staré bázi

3 14-17:10

- Protože hodnota cílové funkce v každé iteraci klesá

$$c_{B_1}^T x_{B_1} > c_{B_2}^T x_{B_2} > c_{B_3}^T x_{B_3} > \cdots$$

báze se neopakují.

- Všech bází $B \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ je konečný počet.
- Tudíž algoritmus skončí.

3 14-17:16

? Co když vyšlo $t = 0$?

- pak následující primárně baz. řešení $\underline{x}'$ je degenerované
- protože $x_\ell = t = 0$ ..... hodnota nové bazické proměnné.
- V případě, že $t = 0$ vychází několik iterací za sebou, už nelze říci, že se báze neopakují, a simplexová metoda se při nevhodné volbě klíč. sloupce $\underline{\ell} \in N$ a klíčového řádku $k \in B$ může zacyklit. Říkáme, že nastal cyklus.

3 14-17:39

Vidíme, že podmínkou vzniku cyklu je přítomnost primární degenerace.

Kdy primární degenerace vzniká?

- předpokládejme, že výchozí báz. řeš. $\underline{x}$ nebylo degenerované.
- kdy se stane, že nějaká báz. proměnná $x_i = 0$? (když ještě bylo $\lambda > 0$)
  - hledali jsme $\lambda \geq 0$ co největší tak, aby

$$x_i - R_i \cdot \lambda \geq 0 \quad \text{... pro vš. } i \in B, \; R_i > 0$$

3 14-17:46

volba $\lambda = \min \left\{ \frac{x_i}{R_i} \; ; \; i \in B, \; R_i > 0 \right\}$

způsobí, že některé nerovnice ... např. s indexem $\underline{k}$ budou splněny jako rovnice

k ... index, kde minimum nastalo

$$x_k - R_k \cdot \lambda = 0 \quad \text{... jde z báze ven}$$

ale nějaká nová bazická proměnná je též nulová, tedy $x_i - R_i \cdot \lambda = 0$ ... i pro další $i \in B \setminus \{k\}$

Tedy volba indexu $\underline{k}$ byla dvojznačná: minimum nastalo v alespoň dvou indexech.

3 14-17:54

Odtud: Jestliže výchozí baz. řešení $\underline{x}$ nebude primárně degenerované a zajistíme, že volba klíč. řádku $\underline{k}$ bude vždy jednoznačná, potom degenerace nenastane, a tudíž ani cyklus nenastane.

Příklad na cyklus v primární simplexové metodě

(P') $\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_6 x_6$

z.p. $a_{11} x_1 + \dots\dots + a_{16} x_6 = 0$

$a_{21} x_1 + \dots\dots + a_{26} x_6 = 0$

$x_1, \dots, x_6 \geq 0$

(D') $\max 0u + 0v$

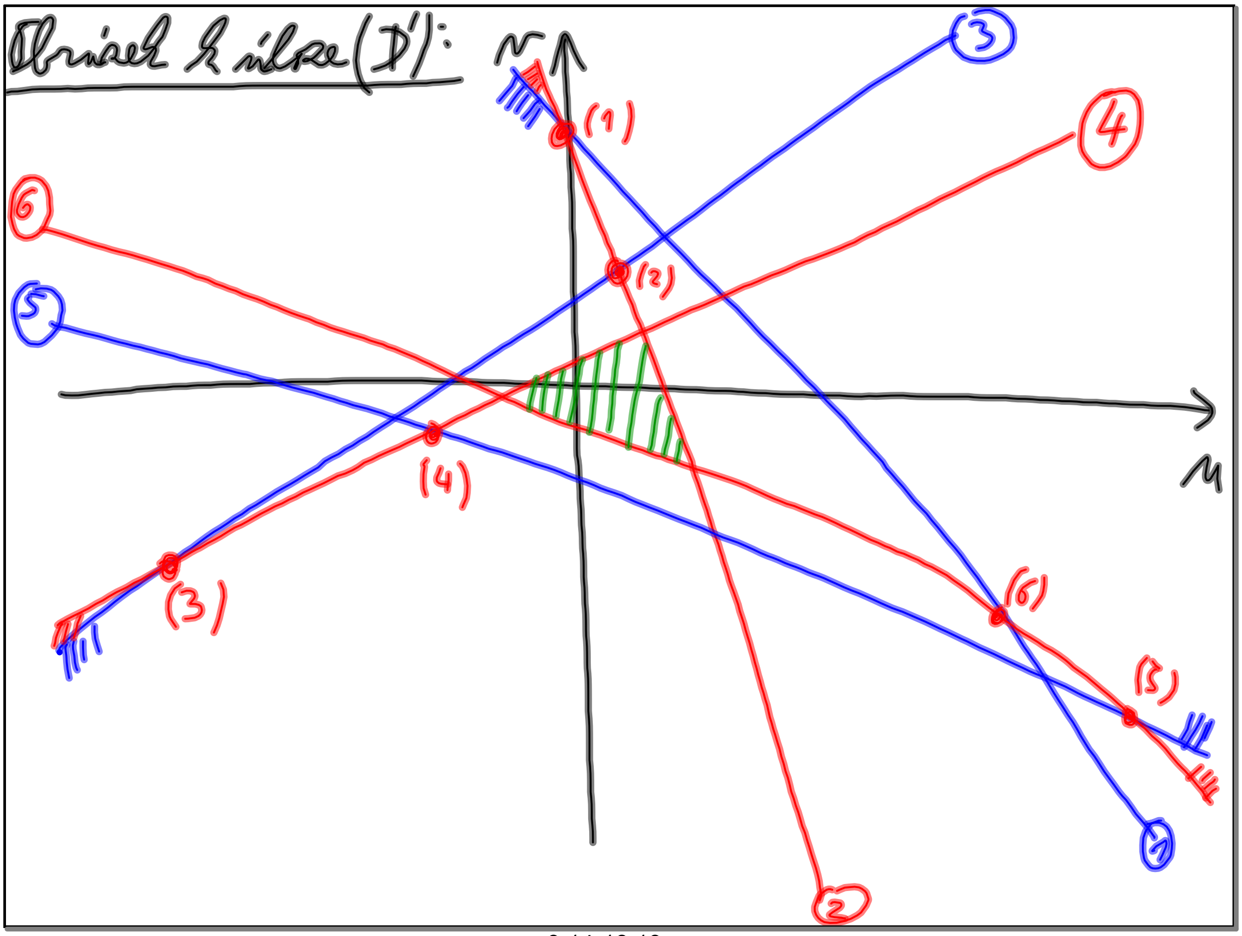
$a_{11} u + a_{21} v \leq c_1$

$\vdots$

$a_{16} u + a_{26} v \leq c_6$

3 14-17:59

Obrázek k úloze (D'):

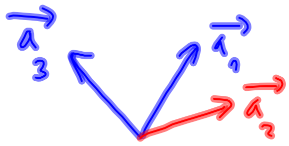


3 14-18:13

$B_1 = \{1, 2\}$ ..... viz bod (1)

- podmínky č. 3 a 4 jsou porušeny, volíme např. $l = 3$
- řešíme soustavu $a_l = A_B r_B$

tedy $a_3 = a_1 r_1 + a_2 r_2$



platí $r_1 > 0$, $r_2 < 0$

- tedy v 6. kroku je jediná volba $k = 1$

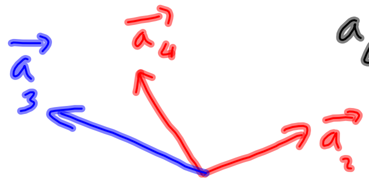
Nová báze je $B_2 = B_1 \cup \{l\} \setminus \{k\} = \{1,2\} \cup \{3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\}$

3 14-18:55

$B_2 = \{2, 3\}$ ..... viz bod (2)

- nyní jen podmínka č. $l = 4$ je porušena
- řešíme rovnici $a_l = A_B r_B$

$a_4 = a_2 r_2 + a_3 r_3$



platí $r_2 > 0$ i $r_3 > 0$

- volíme

$$\lambda = \min\left\{ \frac{x_i}{r_i} ;\ i \in B,\ r_i > 0 \right\}$$

$$= \min\left\{ \frac{x_2}{r_2}, \frac{x_3}{r_3} \right\}$$

3 14-19:01

Ale $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$, tedy minimum nastává v obou indexech 2 i 3, volíme např. $k = 2$.

Dostáváme bázi $B_3 = B_2 \cup \{l\} \setminus \{k\}$
$= \{2,3\} \cup \{4\} \setminus \{2\}$
$= \{3,4\}$

3 14-19:04

$B_3 = \{3,4\}$ ..... viz bod (3) ..... analogicky jako u B_1

- zvol např. $l = 5$ a vyjde $k = 3$

$\downarrow$

$B_4 = \{4,5\}$ ..... viz bod (4) ..... analogicky jako u B_2

- vyjde $l = 6$ a zvol např. $k = 4$

$\downarrow$

$B_5 = \{5,6\}$ ..... viz bod (5) ..... analogicky jako B_1 a B_3

$\downarrow$

$B_6 = \{6,1\}$ ..... viz bod (6) ..... analogicky jako B_2 a B_4

$\downarrow$

$B_7 = \{1,2\} = B_1$ ..... <u>cyklus</u> z důvodu nevhodné volby indexů l a k

3 14-19:08

Vsuvka: poznámky k primární simplexové metodě

Odstranění cyklu v simplexové metodě:

- například použitím Blandova pravidla nejmenšího indexu:
- ve 4. kroku volíme klíčový sloupec $l \in N$ tak, aby $y^T a_l > c_l$;

Index $\underline{l}$ volíme jako nejmenší možný:

$$l = \min\{ j \in N ; \ y^T a_j > c_j \}$$

3 21-15:50

- v 6. kroku volíme index $k \in B$ klíčového řádku jako nejmenší možný:

$$k = \min\left\{ i_0 \in B ; \ h_{i_0} > 0 \ \text{ a } \ \frac{x_{i_0}}{h_{i_0}} = \min\left\{ \frac{x_i}{h_i} ; \ i \in B, \ h_i > 0 \right\} \right\}$$

Při použití Blandova pravidla může degenerace, ale nemůže nastat cyklus.

(důkaz později)

3 21-16:04

Druhá poznámka: Soustavy řešené v simplexové metodě:

$A_B x_B = b$ ..... v 1. kroku

$y^T A_B = c_B^T$ ..... ve 2. kroku

$A_B r_B = a_\ell$ ..... ve 4. kroku

Všechny soustavy mají stejnou matici A_B.

Doporučená metoda: LU-rozklad

$A_B = LU$ kde L ... dolní $\triangle$-matice, U ... horní $\triangle$-matice

$A_B x_B = L U x_B = b$ ..... vyřeš jako $Ly = b$, $Ux_B = y$

$y^T A_B = c^T_B$

$A_B r_B = a_\ell$ ... obdobně

3 21-16:15

$y^T A_B = y^T L U = c^T B$ ... vyřeš $r^T U = c^T_B$, $y^T L = r^T$

Pak v 6. kroku dojde ke změně báze:

$B := B \setminus \{k\} \cup \{\ell\}$

Tedy sloupec a_k je zaměněn za sloupec a_ℓ, ostatní sloupce zůstávají.

Je nutné dělat LU-rozklad znovu?

- stačí využít Sherman-Morrisonovu formuli:
- známe matici $A \in R^{n \times n}$
- známe její inverzi A^{-1} ..... my známe LU-rozklad a z inverze

3 21-16:21

- formule umožňuje určit inverzi matice

$(A + u \cdot v^T)$, kde $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + u_1 \cdot v_1 & a_{12} + u_1 \cdot v_2 & \cdots \\ a_{21} + u_2 \cdot v_1 & a_{22} + u_2 v_2 & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

- Například, když

sloupec a_k se změnil na a_l, tak volíme

$u = a_l - a_k$ a $v = (0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0)$ ... jednotkový vektor

$\uparrow$

index změněného sloupce (z a_k na a_l)

3 21-16:27

$$(A + u v)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1} u \cdot v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

Pozn.: $\underbrace{A^{-1} u}_{w}$ ... to je jako řešit soustavu $Aw = u$

$w = A^{-1} u$

řešíme metodou LU-rozkladu

3 21-16:32

Proč se simplexová metoda jmenuje simplexová?
(Kde je simplex?)

Řešíme úlohu

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\left.a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \right\} \text{m rovnic}$$

$$\left.x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \right\} \text{(m+1)-ní rovnice}$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

3 21-16:36

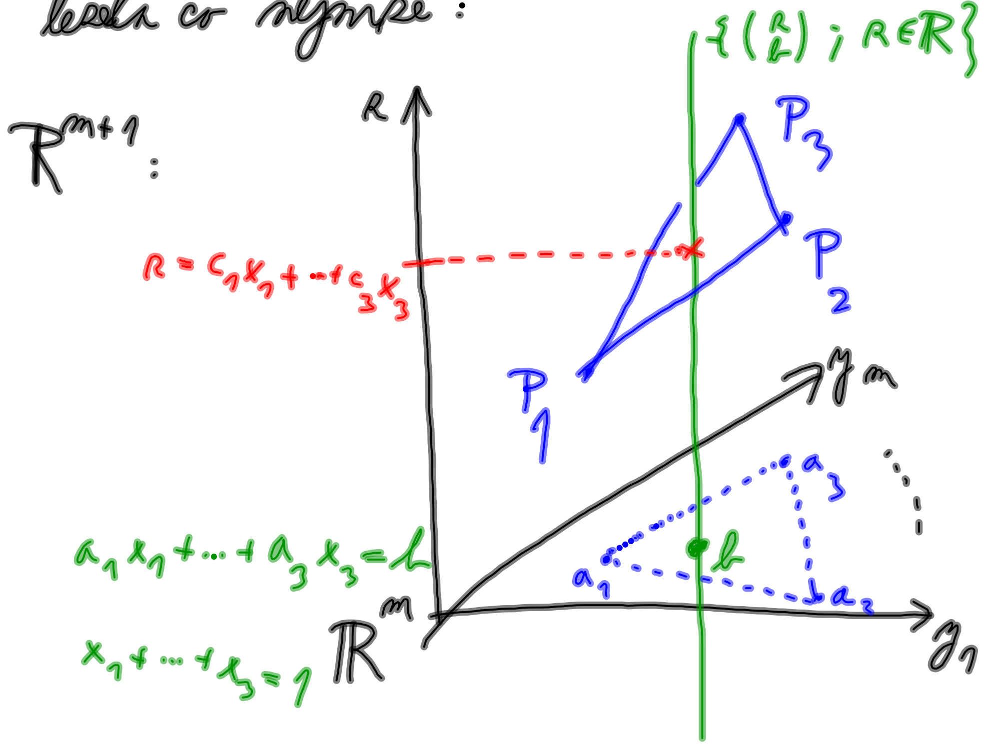
V prostoru $\mathbb{R}^{m+1}$ uvažujme body

$$P_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 \end{pmatrix}, \dots, \quad P_n = \begin{pmatrix} c_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

Pak hodnoty $x_1, \dots, x_n$ lze chápat jako váhy bodů $P_1, \dots, P_n$. Potom součet $P_1x_1 + \dots + P_nx_n$ je těžištěm této soustavy hmotných bodů. Úlohou je najít váhy $x_1 \dots x_n$ tak, aby těžiště leželo na přímce $\left\{ \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} ; r \in \mathbb{R} \right\}$

3 21-16:41

a aby první h-souřadnice těžiště ležela co nejníže:



3 21-16:48

V naší úloze uvažujeme bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

V 1. kroku řešíme soustavu

$$A_B x_B = b$$
$$e^T x_B = 1$$

$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ... vektor jedniček

$e^T x_B = \sum_{i \in B} 1 x_i = 1$

Ve 2. kroku řešíme $v e^T + y^T A_B = c_B^T$

Zjistíme, že báze není optimální.

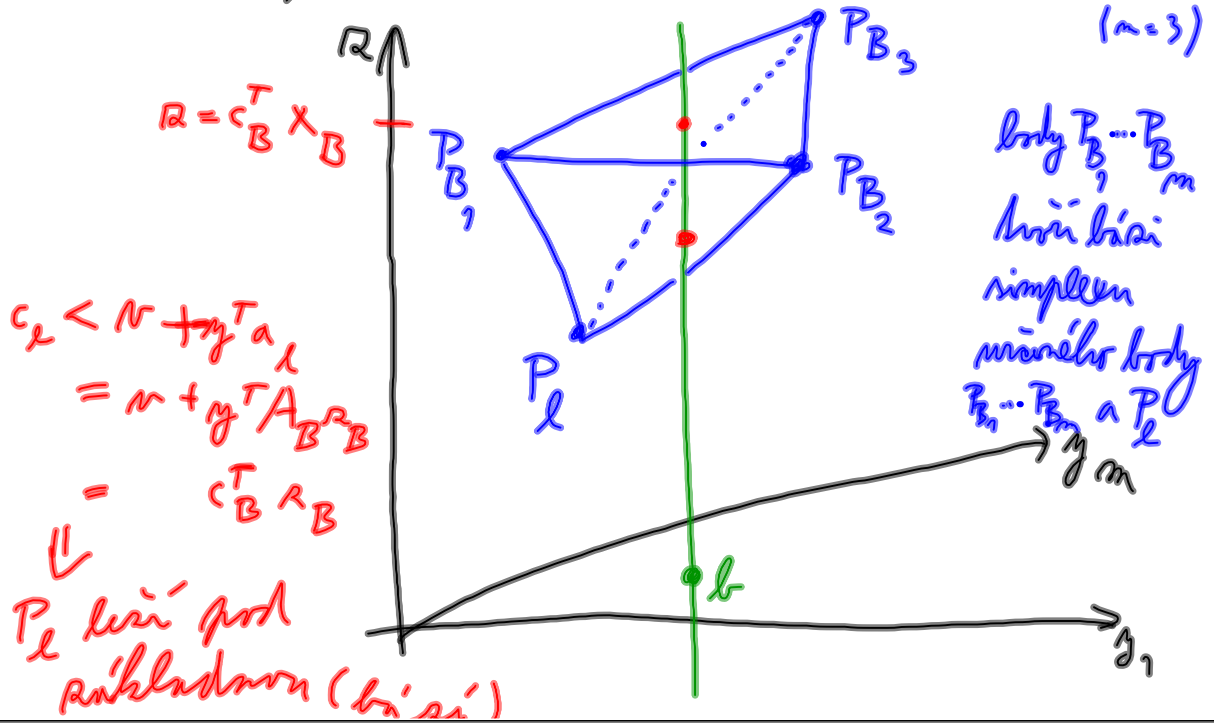
Ve 4. kroku volíme index $l \in N$ tak, aby

$$v + y^T a_l > c_l$$

3 21-16:55

Obrázek: $P_{B_1} \dots P_{B_m}$ ..... body z báze

P_ℓ ..... nový bod $(\ell \in N)$



3 21-16:58

Přímka $\left\{ \binom{z}{b} ; z \in \mathbb{R} \right\}$ opouští simplex nějakou stěnou.

Souřadnice z tohoto průsečíku je menší než současná hodnota $c_B^T x_B$.

Stěna, skrze kterou přímka simplex opouští, se stane novou bází.

3 21-17:12

Inicializace primární simplexové metody

Algoritmus primární simplexové metody v kroku 1 předpokládá, že známe výchozí primárně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

? Co když takovou bázi neznáme ?

4 4-15:56

Řešíme úlohu

$$(P') \quad \min \ c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, \quad x \geqq 0$$

– úlohu chceme řešit primární simplexovou metodou, ale neznáme výchozí primárně přípustnou bázi, tj. množinu $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ tak, aby – řešíme-li $A_B x_B = b$ – vyšlo $x_B \geqq 0$.

4 4-16:08

- v takovém případě použijeme fázi I simplexové metody:
- předpokládáme, že $b \geqq 0$
  - pokud nějaké $b_i < 0$, potom i-tou rovnici

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \Big| \cdot (-1)$$

násobíme číslem -1.

4 4-16:12

- místo původní úlohy (P') řešíme tzv. umělou úlohu (angl. artificial problem)

$$(P'_u) \quad \min \ o^T x + e^T s$$

$$\text{z.p.} \quad Ax + Is = b$$

$$x \geqq 0, \ s \geqq 0$$

kde I … jednotková matice typu $m \times m$

o^T … nulový vektor, $o^T x = 0$

e^T … vektor m jedniček, $e^T = (1\ 1 \dots 1)$

$e^T s = \sum_{i=1}^{m} s_i \rightarrow \min$

$s \in \mathbb{R}^m$ … nové umělé proměnné (angl. artificial variables)

4 4-16:16

Pozorování: Umělá úloha (P'_u) je vždy přípustná ..... např. $x=0$ a $s=b \geq 0$

předpoklad

Pozorování: Původní úloha (P') je přípustná $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ optimální hodnota umělé úlohy (P'_u) je $=0$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ - máme přípustné $x \geq 0$, $Ax = b$

- vezmi $s=0$ ..... pak cílová hodnota je 0

a v obecném řešení $[x,s]$ je $s \geq 0$, proto cílová hodnota $e^T s \geq 0$, tedy nula je opt.

4 4-16:25

$\Leftarrow$ máme optimální řešení $[x,s]$ a optimální hodnota $e^T s = 0$, tudíž (protože $s \geq 0$) je $s=0$, tudíž $Ax=b$. c.b.d.

Umíme umělou úlohu (P'_u) řešit primární simplexovou metodou?

- známe výchozí primárně přípustnou bázi v úloze (P'_u)?

4 4-16:31

- ano

$$\min c^T x + e^T s$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + \boxed{I s} = b$$

$$x \geqq 0 \qquad s \geqq 0$$

výchozí přípustná báze:
$x = 0$ a $s = b \geqq 0$
bazické proměnné

- spustíme simplexovou metodu ...... tzv. fázi I výpočtu
- získáme nějaké optimální řešení x^* a s^* umělé úlohy (P_u')
- i optimální bázi $B^* \subseteq \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$

4 4-16:38

- jestliže $e^T s^* > 0$ ...... tj. $s^* \neq 0$ ....
potom konec výpočtu: zadaná úloha (P') není přípustná.
- jinak $(s^* = 0)$:
  - pokud nedošlo k degeneraci, potom proměnné $\underline{s}$ musí být nebazické, tudíž $B^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ - máme výchozí primárně přípustnou bázi pro úlohu (P')

4 4-16:44

- obecně položíme $B := B^* \setminus \{n+1, \dots, n+m\}$

(bazické proměnné $\underline{s}$ odstraníme, zůstanou pouze $\underline{x}$),

a to je "skoro-báze" pro úlohu (P').

- a (s jistou opatrností) pokračujeme ve výpočtu simplexovou metodou:
  - účelovou funkci $o^T x = 0$ nahradíme $c^T x$ .... původní funkce úlohy (P)
  - výchozí bázi B máme $\rightarrow$ fáze II výpočtu.

4 4-16:48

Na konci fáze II máme buď optimální řešení úlohy (P') a úlohy (D') k ní duální, anebo zjistíme, že (P') není omezená zdola a že (D') není přípustná.

Tímto jsme popsali výpočet tzv. dvoufázovou simplexovou metodou.

4 4-16:53

Duální simplexová metoda

Řešíme úlohy

(P') min $c^T x$
$Ax = b$
$x \geqq 0$

(D') max $y^T b$
$y^T A \leqq c^T$

- úlohy chceme řešit duální simplexovou metodou
- předpokládáme, že známe výchozí duálně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$

4 4-17:06

- předpokládáme, že soustava $Ax = b$ má alespoň jedno řešení.

Např., když $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, předpokládáme

hodnost $A = m < n$ $\Rightarrow Ax = b$ má řešení

Algoritmus:

1. Máme duálně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Řešíme $y^T A_B = c_B^T$ ...... má aspoň jedno řešení podle Fredholmovy věty o alternativě

pak platí $y^T A_N \leqq c_N^T$ ← protože báze B je duálně přípustná

4 4-17:09

Duální simplexová metoda

- řešíme (P') $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $\qquad$ (D') $\max y^T b$, $y^T A \leq c^T$

- známe výchozí duálně přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$

- soustava $Ax = b$ má řešení.

4 11-15:52

Algoritmus:

1. Máme duálně přípustnou bázi B.

Řešíme $y^T A_B = c_B^T$ ..... soustava má aspoň jedno řešení

→ řešení splňuje $y^T A_N \leq c_N^T$ kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

(protože B je duálně přípustná)

? Je báze B přípustná také primárně?

4 11-15:59

2. Řešíme
$$A_B x_B = b$$

? Platí $x_B \geqq 0$?

3. Ano.
Konec výpočtu: báze B je optimální

Nalezená řešení $\underline{x}$ a y^T jsou optimální. (přípustná primárně i duálně)

x_B … spočteno … $A_B x_B = b$
$x_N = 0$

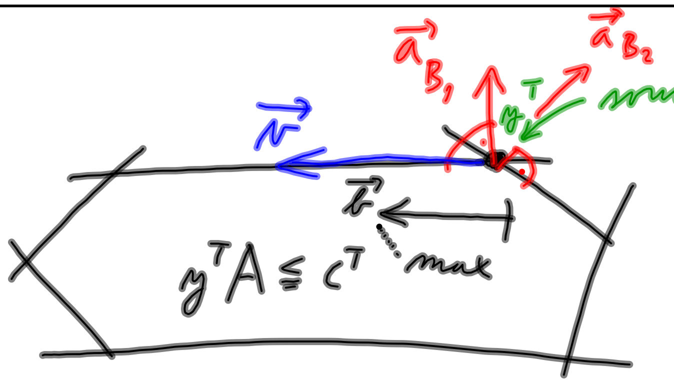
4 11-16:03

4. Ne.
Tedy $\exists k \in B: x_k < 0$

- volba klíčového řádku (angl. pivot row)
- $k \in B$ lze zvolit "libovolně" tak, aby $x_k < 0$
- pro volbu $k \in B$, $x_k < 0$, jsou i pravidla, např. x_k … nejvíce záporné
  $k \in B$ … první takový, že $x_k < 0$ … Blandovo pravidlo
  aj.

(použité pravidlo má vliv na počet iterací, a tím i na dobu výpočtu)

4 11-16:07



současné řešení vyřešené v kroku 1

⋮

řešení soustavy

$y^T a_{B_1} = c_{B_1}$

$y^T a_{B_2} = c_{B_2}$

Řešíme soustavu

$\vec{v}^T \cdot a_i = 0$ pro $i \in B \setminus \{k\}$

$\vec{v} \cdot a_k = -1$

(2):

$b = a_{B_1} x_{B_1} + a_{B_2} x_{B_2}$

$x_{B_2} < 0$

4 11-16:13

a uvažujeme bod

$y^T + \lambda \vec{v}^T$ ..... pro $\lambda \ge 0$

... postupně

Ptáme se:

? Platí $y^T A_N \le 0^T$? kde $N = \{1, \dots, m\} \setminus B$

5. Ano

Konec výpočtu: primární úloha (P') není přípustná a duální úloha (D') není omezena shora

4 11-16:24

Máme: $y^T A_B = c_B^T$ & $y^T A_N \leq c_N^T$

$\vec{r} \cdot A_B \leq 0^T$ & $\vec{r} \cdot A_N \leq 0^T \quad | \cdot \lambda \geq 0$

$\vec{r} \cdot a_i = 0$ pro $i \in B \setminus \{k\}$

$\vec{r} \cdot a_k = -1$

Tudíž $(y^T + \lambda \vec{r}^T) \cdot A_B \leq c_B^T$

a $(y^T + \lambda \vec{r}^T) \cdot A_N \leq c_N^T$

... tedy bod $y^T + \lambda \vec{r}^T$ je přípustný pro všechna $\lambda \geq 0$

4 11-16:31

Hodnota cílové funkce:

$$(y^T + \lambda \vec{r}^T) \cdot b = y^T b + \lambda \vec{r}^T \cdot \underbrace{b}_{= A_B x_B} =$$

$$= y^T b + \lambda \cdot \sum_{i \in B} \underbrace{\vec{r} \cdot a_i}_{= \begin{cases} 0 & \dots i \neq k \\ -1 & \dots i = k \end{cases}} \cdot x_i = \underbrace{y^T b - \underbrace{\lambda \cdot x_k}_{<0}}_{\to +\infty} \to +\infty$$

Tudíž úloha (P') není přípustná

4 11-16:35

6. ne ($\vec{r} \cdot A_N \nleq 0$ .... $\exists j \in N: r a_j > 0$)

V tom případě $\lambda \geqq 0$ posunujeme tak dlouho (na co největší hodnotu), dokud bod $(y^T + \lambda \vec{r}^T)$ zůstává přípustný.

→ tedy dokud $(y^T + \lambda \vec{r})A_N \leqq c_N^T$

neboli $y^T a_j + \lambda \vec{r}^T a_j \leqq c_j$ pro všechna $j \in N$

4 11-16:40

a) $\vec{r}^T a_j \leqq 0$ .... $\lambda \geqq 0$ ... libovolné

b) $\vec{r} a_j > 0$ .... pak

$$\lambda \leqq \frac{c_j - y^T a_j}{r^T a_j}$$

Tedy zvol

$$\lambda = \min \left\{ \frac{c_j - y^T a_j}{r^T a_j} \; ; \; j \in N, \; r^T a_j > 0 \right\}$$

Nechť $\underline{\ell}$ je index, ve kterém se minima nabylo [volba klíčového sloupce / pivot column]

Polož $B := B \cup \{\ell\} \setminus \{k\}$ a jdi na krok 1.

4 11-16:45

Konečnost duální simplexové metody, degenerace a cyklus:

jestliže v každé iteraci výpočtu v kroku 6 pokaždé vyjde $\lambda > 0$, potom hodnota cílové funkce během výpočtu stále roste:

$$y^T b < y^T b - \lambda x_k = \underbrace{(y^T + \lambda \vec{v}^T)}_{\text{nové } y^T} \cdot b$$

4 11-16:56

tudíž báze $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ se během výpočtu neopakují. Bází je konečný počet. Tudíž simplexová metoda musí skončit.

jestliže vyšlo $\lambda = 0$, pak $y^T + \lambda \vec{v}^T = y^T \dots$ zůstáváme na místě, zůstává na stejné hodnotě, tudíž (obecně) nelze zaručit, že báze se neopakují, tedy může nastat cyklus (simplexová metoda neskončí).

4 11-17:02

Poznámka: $\lambda = 0$ ... znamená, že v bodě y^T nastává duální degenerace – příliš mnoho aktivních podmínek.

Odstranění duální degenerace:

- např. pomocí ε-modifikace úlohy

angl. ε-perturbation

- místo

$$\max y^T b$$
$$y^T a_1 \leq c_1$$
$$\vdots$$
$$y^T a_n \leq c_n$$

uvažujeme

$$\max y^T b$$
$$y^T a_1 \leq c_1 + \varepsilon$$
$$y^T a_2 \leq c_2 + \varepsilon^2$$
$$\vdots$$
$$y^T a_n \leq c_n + \varepsilon^n$$

$\varepsilon > 0$ – malé

$\varepsilon \searrow 0$

4 11-17:08

Odstranění cyklu:

- pomocí Blandova pravidla nejmenšího indexu:
  - v kroku 4 zvol index $k \in B$, $x_k < 0$, jako nejmenší možný
  - v kroku 6, pokud $\min \left\{ \frac{c_j - y^T a_j}{v^T a_j} ; j \in N, v^T a_j > 0 \right\}$ nastává ve více indexech, potom zvol ten nejmenší.

4 11-17:17

Příklad na cyklus v duální simplexové metodě

(jestliže indexy $\underline{k}$ a $\underline{l}$ ve 4. a 6. kroku jsou voleny nevhodně):

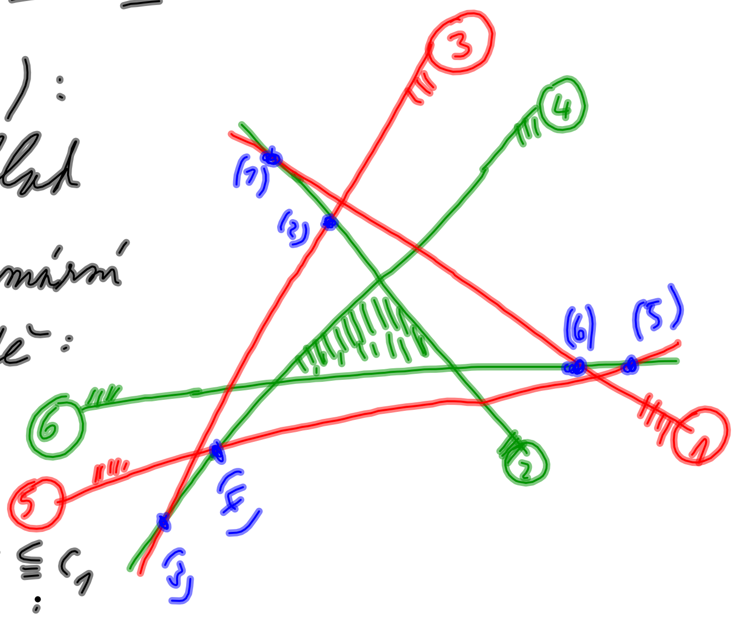
- měli jsme příklad na cyklus v primární simplexové metodě:

$$\max\ 0u + 0v$$

$$\text{p.p.}\quad a_{11}u_1 + a_{12}v \leqq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{61}u + a_{62}v \leqq c_6$$



4 11-17:36

Tento příklad upravíme do podoby úlohy (P')

$$\min\ 0u + 0v + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{aligned}
a_{11}u + a_{12}v + x_1 &= c_1\\
a_{21}u + a_{22}v + x_2 &= c_2\\
a_{31}u + a_{32}v + x_3 &= c_3\\
a_{41}u + a_{42}v + x_4 &= c_4\\
a_{51}u + a_{52}v + x_5 &= c_5\\
\underbrace{a_{61}}_{a_1}u + \underbrace{a_{62}}_{a_2}v + x_6 &= c_6
\end{aligned}$$

$$u, v, x_1, \dots, x_6 \geqq 0$$

V bázi nyní bude 6 proměnných z 8.

4 11-17:50

(1) $B_1 = \{u, v, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

1 - řešíme "$y^T A_B = c_B^T$" ..... viz 1. krok, ovšem zde $\underline{c}$ je něco jiného!

neboli

$y^T a_1 = 0$

$y^T a_2 = 0$ $\quad y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$

$\underline{\underline{y = 0}}$ ... řešení $\quad y_1 = y_2 = 0$

2. je báze B_1 primárně přípustná?

- řešíme "$A_B x_B = b$"

neboli $a_1 u + a_2 v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$

4 11-17:56

$[u, v]$ ... vyjde jako bod (1) a $x_3, x_4 < 0$

- báze není prim. přípustná $\quad x_5, x_6 > 0$

4. krok: volíme $k \in \{3, 4\}$

např. $k = 3$ ...... x_3 půjde z báze ven

- řešíme "$v a_i = 0$ ... pro $i \in B \setminus \{k\}$
$v a_k = -1$"

neboli $v^T \cdot a_1 = 0$, $v \cdot a_2 = 0$, $v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

$v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

← sloupec k

4 11-17:58

Tedy $v_3 = -1$ a $v_4 = v_5 = v_6 = 0$

a
$$\begin{aligned} & v_1 \cdot (a_{11} \quad a_{12}) \\ + & v_2 \cdot (a_{21} \quad a_{22}) \\ + & v_3 \, (a_{31} \quad a_{32}) \\ + & \dots \\ + & v_6 \, (a_{61} \quad a_{62}) \\ = & \;(0 \quad 0) \end{aligned}$$

-1

nuly

neboli
$$\begin{aligned} & v_1 (a_{11} \quad a_{12}) \\ + & v_2 (a_{21} \quad a_{22}) \\ = & \;(a_{31} \quad a_{32}) \end{aligned}$$

Vyjde $v_1 > 0$, $v_2 < 0$

4 11-18:35

Uvažujeme bod $\underbrace{y^T}_{=0^T} + \lambda \vec{v}$,

dokud "$(y^T + \lambda \vec{v}) A_N \leq c_N^T$"

nuly

v našem případě?? sloupce x_1 a x_2

neboli
$$0 + \lambda \overbrace{v_1}^{>0} \leq 0$$
$$0 + \lambda \underbrace{v_2}_{<0} \leq 0$$

Tedy $\lambda = 0$ .... degenerace, stojíme na místě a jen to hodili sloupci $\underline{x_1}$ ... jde do báze

Nová báze: $B_2 = \{u, v, x_1, x_4, x_5, x_6\}$

4 11-18:40

(2) Báze $B_2 = \{u, v, x_1, x_4, x_5, x_6\}$

- řešíme "$y^T A_B = c_B^T$"

$\downarrow$

v našem případě vyjde $y = 0$ ... řeš.

? je báze primárně přípustná ?

- řešíme "$A_B x_B = b$"

neboli

$$a_1 u + a_2 v + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} x_6 = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\end{pmatrix}$$

$[u, v]$ ... bod (2)

$x_1 > 0$, $\underbrace{x_4 < 0}_{k \text{ ... z báze ven}}$, $x_5, x_6 > 0$

... není jiná volba

4 11-18:42

- řešíme soustavu "$v a_i = 0$ pro $i \in B \setminus \{k\}$"

$v a_k = -1$

neboli

$v \cdot a_1 = 0$

$v \cdot a_2 = 0$

$$v \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = -1$$

$$v \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad v \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad v \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

tedy $v_1 = v_5 = v_6 = 0$

$v_4 = -1$

a

$$\begin{array}{l} v_2 \cdot (a_{21} \;\; a_{22}) \\ + v_3 (a_{31} \;\; a_{32}) \\ \hline = (a_{41} \;\; a_{42}) \end{array}$$

4 11-18:51

Vyjde $v_2 > 0$ i $v_3 > 0$

Uvažujeme bod "$y^T + \lambda v$"

ale chceme "$(y^T + \lambda v) A_N \leq c_N^T$"

sloupce x_2, x_3 — nuly

$$0 + \lambda v_2 \leq 0$$
$$0 + \lambda v_3 \leq 0$$

tedy $\lambda = 0$ ... degenerace .... minimum v obou indexech 2 i 3

$\Downarrow$

lze si vybrat

4 11-18:53

"nevhodně" zvolíme např. $l = 2$ ..... do báze

pak další báze je

$$B_3 = \{u, v, x_1, x_2, x_5, x_6\}$$

..... odpovídá bodu (3)

atd.

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1) \to \ldots$$

při nevhodné volbě indexů.

4 11-18:59