Ekonomicko-matematické metody 5

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Úlohy lineárního programování (LP) I

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP v kanonickém tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Primární úloha LP v kanonickém tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \max$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná

respektive

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Úlohy LP v kanonickém tvaru

Každou úlohu LP lze převést na kanonický tvar (P) resp. (D) pomocí obvyklých úprav:

- Podmínky $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $\boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{Cx} \geq \boldsymbol{d}$
  respektive
  podm. $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ napíšeme jako $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \geq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$
- Podmínky $\boldsymbol{Cx} \geq \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $-\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$
  respektive
  podmínky $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$ napíšeme jako $-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \geq -\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$

Úlohy LP v kanonickém tvaru

Každou úlohu LP lze převést na kanonický tvar (P) resp. (D) pomocí obvyklých úprav:

- Proměnnou $x \in \mathbb{R}$ neomezenou ve znaménku napíšeme jako $x = x^+ - x^-$, kde $x^+, x^- \geq 0$.

  (V případě proměnné $y \in \mathbb{R}$ obdobně.)

- Cílovou funkci $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$ napíšeme jako $-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$ respektive
  cílovou funkci $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \max$ napíšeme jako $-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$

Připomeňme úlohy LP v kan. tvaru:

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} &\geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} &\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná

Věta o slabé dualitě

Jestliže $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D), potom platí

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

Důkaz: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ □

Heslem:

maximum ≤ minimum

Důsledky věty o slabé dualitě $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$

- Jestliže $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D) taková, že $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$,
  potom obě řešení **jsou optimálními řešeními** obou úloh.

- Jestliže úloha (P) není omezená shora
  ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ při splnění $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$),
  potom úloha (D) **není přípustná**.

- Jestliže úloha (D) není omezená zdola
  ($\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow -\infty$ při splnění $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \ge \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$),
  potom úloha (P) **není přípustná**.

Poznámka ke slabé dualitě

Z důkazu ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$) plyne:

Rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$ nastává právě tehdy, když jsou splněny podmínky komplementarity

$$\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}^* = 0 \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = 0$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{a}_j)x_j^* = 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{m} y_i^*(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* - b_i) = 0$$

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Jestliže úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$, potom úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

- Jestliže úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$, potom úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

respektive

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Úloha (P) má optimální řešení právě tehdy, když úloha (D) má optimální řešení.

  To jest, optimální řešení mají
  - buď obě úlohy současně,
  - anebo žádná z nich.

- Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom jejich optimální hodnoty se rovnají.

Heslem:

maximum = minimum

Věta o existenci optimálních řešení

Jestliže obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné (existují nějaká přípustná řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ těchto úloh),

potom obě úlohy mají optimální řešení (existují optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ těchto úloh).

Důsledek všech uvedených tvrzení

Pro úlohy (P) a (D) nastává právě jedna z následujících možností:

- obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné, mají optimální řešení a platí rovnost optimálních hodnot,
- úloha (P) není přípustná a úloha (D) není omezená zdola,
- úloha (D) není přípustná a úloha (P) není omezená shora,
- obě úlohy (P) a (D) jsou nepřípustné.

Úlohy lineárního programování (LP) II

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP v normálním tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

Primární úloha LP v normálním tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \max$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

(P) a (D) úloha LP v norm. a std. tvaru

Úloha LP

v normálním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

ve standardním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná
respektive

(P) a (D) úloha LP v norm. a std. tvaru

Úloha LP

v normálním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

ve standardním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Úlohy LP v norm. a std. tvaru

Každou úlohu LP lze převést na normální (P) a standardní (D) tvar pomocí úprav, které už známe, a přidáme:

- Podmínky $\boldsymbol{Cy} \leq \boldsymbol{d}$ napíšeme jako $\boldsymbol{Cy} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{d}$ neboli $\boldsymbol{Cy} + \boldsymbol{Is} = \boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice a $\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$ jsou nové proměnné (angl. slack variables)

Cvičení: Úlohy (P) a (D) v kanonickém tvaru převeďte na úlohy (P) a (D) v normálním a standardním tvaru (a obráceně).

Připomeňme úlohy LP v n. a s. tvaru:

Úloha LP

v normálním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ je proměnná

ve standardním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \ge \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná

Věta o slabé dualitě

Jestliže $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D), potom platí

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

Důkaz: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ □

Heslem:

maximum ≤ minimum

Důsledky věty o slabé dualitě $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$

- Jestliže $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D) taková, že $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$,
  potom obě řešení **jsou optimálními řešeními** obou úloh.

- Jestliže úloha (P) není omezená shora
  ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ při splnění $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$),
  potom úloha (D) **není přípustná**.

- Jestliže úloha (D) není omezená zdola
  ($\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow -\infty$ při splnění $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$),
  potom úloha (P) **není přípustná**.

Poznámka ke slabé dualitě

Z důkazu ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$) plyne:

Rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$ nastává právě tehdy, když je splněna podmínka komplementarity

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = 0$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*\left(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* - b_i\right) = 0$$

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Jestliže úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$, potom úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

- Jestliže úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$, potom úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

respektive

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Úloha (P) má optimální řešení právě tehdy, když úloha (D) má optimální řešení.

  To jest, optimální řešení mají
  - buď obě úlohy současně,
  - anebo žádná z nich.

- Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom jejich optimální hodnoty se rovnají.

Heslem:

maximum = minimum

Věta o existenci optimálních řešení

Jestliže obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné (existují nějaká přípustná řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ těchto úloh),

potom obě úlohy mají optimální řešení (existují optimální řešení $\boldsymbol{x}^{*}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ těchto úloh).

Důsledek všech uvedených tvrzení

Pro úlohy (P) a (D) nastává právě jedna z následujících možností:

- obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné, mají optimální řešení a platí rovnost optimálních hodnot,
- úloha (P) není přípustná a úloha (D) není omezená zdola,
- úloha (D) není přípustná a úloha (P) není omezená shora,
- obě úlohy (P) a (D) jsou nepřípustné.

Úlohy lineárního programování (LP) III

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \min$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

(P) a (D) úloha LP ve std. a norm. tvaru

Úloha LP

ve standardním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

v normálním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná
respektive

(P) a (D) úloha LP ve std. a norm. tvaru

Úloha LP

ve standardním tvaru PRIMÁRNÍ (P)	v normálním tvaru DUÁLNÍ (D)
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$	$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \max$
z.p.	z.p.
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	
kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná	kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Úlohy LP ve std. a norm. tvaru

Cvičení: Ukažte, že

- úlohy (P) a (D) v kanonickém tvaru,
- úlohy (P) a (D) v normálním a standardním tvaru,
- úlohy (P) a (D) ve standardním a normálním tvaru

lze převést mezi sebou navzájem.

Cvičení:
Ukažte, že úlohy jsou k sobě duální navzájem:

- Úlohu (P) převeďte na úlohu (D).
- Úlohu (D) převeďte na úlohu (P).

Připomeňme úlohy LP ve s. a n. tvaru:

Úloha LP

ve standardním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

v normálním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Věta o slabé dualitě

Jestliže $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D), potom platí

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

Důkaz: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ $\square$

Heslem:

minimum ≥ maximum

Důsledky věty o slabé dualitě $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$

- Jestliže $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ jsou přípustná řešení úloh (P) a (D) taková, že $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$,
  potom obě řešení **jsou optimálními řešeními** obou úloh.

- Jestliže úloha (P) není omezená zdola
  ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$ při splnění $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$),
  potom úloha (D) **není přípustná**.

- Jestliže úloha (D) není omezená shora
  ($\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow +\infty$ při splnění $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$),
  potom úloha (P) **není přípustná.**

Poznámka ke slabé dualitě

Z důkazu ($\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$) plyne:

Rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$ nastává právě tehdy, když je splněna podmínky komplementarity

$$\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}^* = 0$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{a}_j\right)x_j^* = 0$$

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Jestliže úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$, potom úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

- Jestliže úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$, potom úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

respektive

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Úloha (P) má optimální řešení právě tehdy, když úloha (D) má optimální řešení.

  To jest, optimální řešení mají
  - buď obě úlohy současně,
  - anebo žádná z nich.

- Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom jejich optimální hodnoty se rovnají.

Heslem:

minimum = maximum

Věta o existenci optimálních řešení

Jestliže obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné (existují nějaká přípustná řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ těchto úloh),
potom obě úlohy mají optimální řešení (existují optimální řešení $\boldsymbol{x}^{*}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ těchto úloh).

Důsledek všech uvedených tvrzení

Pro úlohy (P) a (D) nastává právě jedna z následujících možností:

- obě úlohy (P) a (D) jsou přípustné, mají optimální řešení a platí rovnost optimálních hodnot,
- úloha (P) není přípustná a úloha (D) není omezená shora,
- úloha (D) není přípustná a úloha (P) není omezená zdola,
- obě úlohy (P) a (D) jsou nepřípustné.