Ekonomicko-matematické metody 5a

přednáší
doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná

respektive

(P) a (D) úloha LP v kanonickém tvaru

Úloha LP v kanonickém tvaru

PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Jestliže úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$, potom úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

- Jestliže úloha (D) má optimální řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$, potom úloha (P) má optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a platí rovnost $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$.

respektive

Věta o silné dualitě (princip duality)

- Úloha (P) má optimální řešení právě tehdy, když úloha (D) má optimální řešení.

  To jest, optimální řešení mají
  - buď obě úlohy současně,
  - anebo žádná z nich.

- Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom jejich optimální hodnoty se rovnají.

Heslem:

maximum = minimum

Ekonomická interpretace (příklad)

Uvažujme, že úloha (P) je úlohou stanovení optimálního výrobního programu při míchání směsí (racio, müsli, směsi travní / zednické):

- x_j – množství j-té směsi, které se má vyrobit
- c_j – prodejní cena (v ¤) za 1 jednotku j-té směsi

Co znamená hodnota cílové funkce?

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle \text{zisk} \rangle \text{ ¤}$$

kde: $\langle \text{zisk} \rangle$ = číslo, ¤ = jednotka měny (peníze)

Ekonomická interpretace (příklad)

Co znamená rovnost optimálních hodnot cílových funkcí obou úloh?

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

Již víme: Levá strana vyjadřuje zisk (v penězích ¤).
Proto i pravá strana vyjadřuje zisk (v penězích ¤).

Ekonomická interpretace (příklad)

Máme:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \langle \text{zisk} \rangle \text{ ¤}$$

Uvažujme, že úloha (P) je úlohou stanovení optimálního výrobního programu při míchání směsí (racio, müsli, směsi travní / zednické):

- b_i – dostupné množství i-té suroviny

Tudíž:

- y_i – cena (v ¤) za 1 jednotku množství

Ekonomická interpretace (příklad)

Kontrola:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

Dále máme:

- y_i – cena (v ¤) za 1 jednotku množství i-té suroviny
- a_{ij} – technologický koeficient: počet jednotek množství i-té suroviny potřebné k výrobě 1 jednotky j-té směsi

Ekonomická interpretace (příklad)

Dále máme:

- y_i – cena (v ¤) za 1 jednotku množství i-té suroviny
- a_{ij} – technologický koeficient: počet jednotek množství i-té suroviny potřebné k výrobě 1 jednotky j-té směsi
- x_j – množství j-té směsi, které se má vyrobit

Tudíž:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \langle \text{zisk} \rangle \text{ ¤}$$

Ekonomická interpretace

Význam duálních proměnných $y_1, \dots, y_m$ v uvažované úloze stanovení optimálního výrobního programu při míchání směsí:

Jsou to tzv. *stínové ceny* (angl. *shadow prices*) jednotlivých zdrojů resp. vstupních surovin číslo $i = 1, \dots, m$.

Jestliže i-té suroviny je dostatek ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b_i$), potom její duální cena je nulová ($y_i = 0$).

Jestliže i-tá surovina se výrobou vyčerpá ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$), potom její duální cena je obvykle (!) kladná ($y_i > 0$).

Ekonomická interpretace

Jak řečeno:
Jestliže i-tá surovina se výrobou vyčerpá ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$), potom její duální cena je obvykle (!) kladná ($y_i > 0$).

Poznámka:
Může se stát, že i-tá surovina se výrobou vyčerpá ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$) a její duální cena je přesto nulová ($y_i = 0$) – jde o *degeneraci řešení*.

Ekonomická interpretace hodnoty

Význam hodnoty duální proměnné y_i:

Jestliže $y_i > 0$, znamená to, že i-tá surovina se vyčerpala, a proto již není možné vyrobit více výrobků (směsí).

Jestliže i-tou surovinu je možné nakoupit na vnějším trhu, pak hodnota y_i představuje horní mez ceny, za kterou se vyplatí surovinu nakoupit (je-li dražší, zvýšení výroby nepřinese zisk).

Ekonomická interpretace hodnoty

Význam hodnoty duální proměnné y_i:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

Tedy:

- b_i se zvýší (přikoupíme surovinu),
- všechna y_i zůstanou na původních hodnotách (to je předpoklad – oprávněný, pokud změna b_i je „malá“),
- x_i se změní (dojde ke zvýšení výroby),
- zisk se zvýší (prodejní ceny c_j zůstávají stejné)