Ekonomicko-matematické metody 5b

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Úlohy lineárního programování (LP) III

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ resp. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ je vektor (gradient) cílové funkce.

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Primární úloha LP ve standardním tvaru:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \min$$

z.p.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

(P) a (D) úloha LP ve std. a norm. tvaru

Úloha LP

ve standardním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ je proměnná

v normálním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$

kde $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je proměnná
respektive

(P) a (D) úloha LP ve std. a norm. tvaru

Úloha LP

ve standardním tvaru
PRIMÁRNÍ (P)

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná

v normálním tvaru
DUÁLNÍ (D)

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \longrightarrow \max$$

z.p.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$

kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ je proměnná

Bazické řešení v úloze (P)

Řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je

- **bazické** právě tehdy, když množina sloupců
$$\{\boldsymbol{a}_j : x_j \neq 0\}$$
je lineárně nezávislá;
- **nedegenerované bazické** právě tehdy, když je bazické a množina sloupců $\{\boldsymbol{a}_j : x_j \neq 0\}$ generuje všechny ostatní sloupce matice (tvoří **bázi** – prostoru sloupců matice $\boldsymbol{A}$);
- **přípustné bazické** právě tehdy, když je bazické

Primární degenerace bazického řešení

Když řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je bazické a degenerované, znamená to, že množina sloupců

$$\{\boldsymbol{a}_j : x_j \neq 0\}$$

je „příliš malá“ (nevygeneruje všechny sloupce matice $\boldsymbol{A}$), to znamená, že

řešení $\boldsymbol{x}$ obsahuje

„příliš mnoho nulových složek“.

Bazické řešení v úloze (D)

Bod resp. řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je

- **bazické** právě tehdy, když množina sloupců
$$\{\boldsymbol{a}_j : \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = c_j\}$$
generuje všechny ostatní sloupce matice $\boldsymbol{A}$;

- **nedegenerované bazické** právě tehdy, když je bazické a množina sloupců $\{\boldsymbol{a}_j : \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a}_j = c_j\}$ je navíc lineárně nezávislá (tvoří **bázi** – prostoru sloupců matice $\boldsymbol{A}$);

- **přípustné bazické** právě tehdy, když je bazické

Duální degenerace bazického řešení

Když řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ je bazické a degenerované, znamená to, že množina sloupců

$$\{\boldsymbol{a}_j : \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = c_j\}$$

je „příliš velká“ (není lineárně nezávislá), to znamená, že

v řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ je

„příliš mnoho aktivních podmínek “.

Základní věta lineárního programování

Základní věta LP:

Jestliže obě úlohy (P) a (D) mají optimální řešení, potom mají i bazická optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$.

Navíc platí rovnice

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$$

a platí podmínka komplementarity

$$\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{a}_j\right)x_j^* = 0$$

Báze

Bází rozumíme množinu indexů $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ takovou, že množina sloupců

$$\{\boldsymbol{a}_j : j \in B\}$$

je lineárně nezávislá a současně generuje ostatní sloupce matice $\boldsymbol{A}$.

<u>Cvičení:</u>
Vraťte se k definici bazického řešení v úloze (P) a v úloze (D).

Báze

Mějme bázi $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Klademe $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$.

B – množina indexů bazických proměnných x_j
N – množina indexů nebazických proměnných x_j

Báze B určuje bazické řešení úlohy (P) a úlohy (D) následujícím způsobem.

Bazické řešení úlohy (P) určené bází B

Mějme bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ a předpokládejme, že soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má alespoň jedno řešení. (Např. $\boldsymbol{A}$ je matice typu $m \times n$ a platí, že hodnost $\boldsymbol{A} = m \leq n$.)

Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}_B \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$$

(soustava má právě jedno řešení) a položme

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}_N$$

Takto získané řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je

Bazické řešení úlohy (D) určené bází B

Mějme bázi $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_B = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}$$

(soustava má alespoň jedno řešení).

Takto získaný bod resp. řešení $\boldsymbol{y}^T$ je bazickým řešením úlohy (D) určeným bází B.

Bazické řešení úlohy (P) a báze

Mějme bazické řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Jestliže je nedegenerované, potom toto řešení $\boldsymbol{x}$ určuje bázi:

$$B = \{j : x_j \neq 0\}$$

Jestliže bazické řešení $\boldsymbol{x}$ je degenerované, potom do množiny $\{j : x_j \neq 0\}$ přidáme další indexy sloupců matice $\boldsymbol{A}$ tak, aby množina $\{\boldsymbol{a}_j : j \in B\}$ generovala všechny ostatní sloupce matice $\boldsymbol{A}$.

Bazické řešení úlohy (D) a báze

Mějme bazické řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$.

Jestliže je nedegenerované, potom toto řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ určuje bázi:

$$B = \{j : \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = c_j\}$$

Jestliže bazické řešení $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ je degenerované, potom z množiny $\{j : \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = c_j\}$ odebíráme indexy sloupců matice $\boldsymbol{A}$ tak, aby množina $\{\boldsymbol{a}_j : j \in B\}$ byla lineárně nezávislá.

Báze

Báze $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ je:

- **primárně přípustná** právě tehdy, když bazické řešení úlohy (P) určené bází B je primárně přípustné,
- **duálně přípustná** právě tehdy, když bazické řešení úlohy (D) určené bází B je duálně přípustné,
- **optimální** právě tehdy, když je přípustná primárně i duálně zároveň.

Připomeňme základní větu LP:

Základní věta LP:

Jestliže obě úlohy (P) a (D) mají optimální řešení, potom mají i bazická optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}$.

Navíc platí rovnice

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$$

a platí podmínka komplementarity

$$\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{a}_j\right)x_j^* = 0$$

Základní věta lineárního programování

Poznámka k rovnici $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{b}$:

Ekonomická interpretace řešení (duálních proměnných) je obdobná jako v případě úloh v kanonickém tvaru.

Proměnné x_j^* resp. y_i^* mají význam pro citlivostní analýzu: Jak moc se změní společná optimální hodnota, jestliže c_j resp. b_i se změní?

Poznámka: Změna musí být „malá“!
(Malá tak, aby nedošlo ke změně optimální báze.)