



Ekonomicko-matematické metody 6

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.



Úloha lineárního programování

Základní tvar

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{MAX}; \quad (1) \text{ účelová funkce}$$

(MIN)

za podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

(2) omezující podmínky
ve tvaru nerovností

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

(3) podmínky nezápornosti

Příklad 1: Optimální výrobní plán – úloha LP

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

při omezeních

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

$$x_i \geq 0$$

Dualita jako vztah mezi dvěma úlohami lineárního programování

- **Dualitou** v úlohách LP rozumíme vzájemný, přesně definovaný vztah mezi dvojicí úloh LP - **primární a duální úlohou** vycházejících ze **stejných vstupních dat**.
- Dualita je vzájemně **symetrickým vztahem obou úloh** - úloha primární není nadřazena úloze duální ani naopak!
- **Duální úloha k duální úloze je úloha primární.**
- Formální formulace tvaru primární a duální úlohy – **souměrná a nesouměrná dualita.**

Souměrná dualita – zápis pomocí sumací

<i>primární úloha (P)</i>	<i>duální úloha (D)</i>
maximalizovat $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	minimalizovat $f = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$	$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

Souměrná dualita – maticový zápis

<i>Primární úloha (P)</i>	<i>Duální úloha (D)</i>
maximalizovat $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	minimalizovat $f = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Souměrná dualita - postup konstrukce duální úlohy k úloze primární

- maximalizace účelové funkce se mění na minimalizaci, popř. naopak
- ke každému vlastnímu omezení (**P**) se přiřadí jedna duální proměnná y_i , $i = 1, 2, \dots, m$ a dále podmínka :
 $y_i \geq 0$
- ke každé proměnné x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, (**P**) se přiřadí vlastní omezení duální úlohy
- matice strukturních koeficientů (**D**) se mění na **transponovanou** matici strukturních koeficientů (**P**)
- koeficienty pravé strany (**D**) se mění na koeficienty účelové funkce (**P**) a naopak
- smysl nerovností vlastních omezení se v (**D**) mění na opačný!

Souměrná dualita

Příklad 1: „Krmné směsi“

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$ $0,5x_2 \leq 100$ $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$	$0,9y_1 + 0,1y_3 \geq 2000$ $0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,2y_3 \geq 3000$
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$
	EMM 6

Nesouměrná dualita

- U souměrné duality byla v úloze s maximalizací účelové funkce **všechna** vlastní omezení ve tvaru nerovnic se smyslem nerovnosti „ \leq “
- Pro **všechny** proměnné platily podmínky nezápornosti
- V reálných úlohách LP se tato situace často nevyskytuje

Nesouměrná dualita

Příklad 2: „Krmné směsi“

(P) maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \geq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Podmínku \geq vynásobíme -1, a tím změníme znak nerovnosti na \leq , pak je úloha ve tvaru pro souměrnou dualitu

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“

(P)

maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 = 60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 1

- Rozložíme 3. podmínku = ve tvaru rovnosti na dvě nerovnice:

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 60$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

- 1. nerovnici \geq vynásobíme -1

$$-0,1x_1 - 0,2x_2 \leq -60$$

- Pak je úloha ve tvaru pro souměrnou dualitu

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 2

Primární úloha má nyní tvar:

maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$$

$$0,5x_2 \leq 100$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$$

$$-0,1x_1 - 0,2x_2 \leq -60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

4 podmínky $\leq \Rightarrow$ 4 duální proměnné $y_1, y_2, y_3', y_3''!!!$

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 3

Duální úloha je tedy následující:

minimalizovat

$$f = 270y_1 + 100y_2 + 60 \overbrace{(y_3' - y_3'')}^{y_3}$$

za podmínek

$$0,9y_1 + 0,1 \overbrace{(y_3' - y_3'')}^{y_3} \geq 2000$$

$$0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,2 \overbrace{(y_3' - y_3'')}^{y_3} \geq 3000$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_3' \geq 0$$

$$y_3'' \geq 0$$

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 4

- Označíme $y_3 = y_3' - y_3''$, lze (D) zjednodušit
- Pozor! rozdíl dvou nezáporných čísel není vždy nezáporný

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$ $0,5x_2 \leq 100$ $0,1x_1 + 0,2x_2 = 60$	$0,9y_1 + 0,1y_3 \geq 2000$ $0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,2y_3 \geq 3000$
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$ y_3 libovolné

EMM 6

Nesouměrná dualita úlohy LP

s rovnicemi ve vlastních omezeních –
standardní tvar (maticový zápis)

(P)	(D)
maximalizovat $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	minimalizovat $f = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq 0$	\mathbf{y} – libovolné (tj. omezení nezápornosti chybí)

Vztahy mezi (P) a (D) úlohou LP

Věty 1 až 5:

1. Duální úloha k duální úloze LP je úloha primární
2. Mají-li **obě** úlohy (P) a (D) **přípustné řešení**, pak mají **obě** také **řešení optimální**
3. Je-li x libovolné **přípustné řešení** úlohy (P), y libovolné **přípustné řešení** úlohy (D), pak $c^T x \leq b^T y$
4. Platí-li $c^T x = b^T y$, pak x je **optimální řešení** úlohy (P) a y je **optimální řešení** úlohy (D)
5. Má-li jedna z úloh (P) a (D) **přípustné řešení**, ale **nemá řešení optimální**, pak druhá úloha nemá **žádné přípustné řešení**

Věta 6: Hlavní věta o dualitě

Má-li jedna z úloh (P) nebo (D) optimální řešení (x nebo y), má jej také druhá úloha, přičemž platí, že hodnoty účelových funkcí jsou stejné, tj. $c^T x = b^T y$

Příklad 4: Primární a duální úloha ...

(P)

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \text{MAX};$$

při omezeních

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$4x_1 + \quad \quad 2x_3 \leq 10$$

$$x_i \geq 0$$

(D)

$$6y_1 + 10y_2 \rightarrow \text{MIN};$$

při omezeních

$$2y_1 + 4y_2 \geq 3$$

$$3y_1 \quad \quad \geq 2$$

$$6y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$y_j \geq 0$$

Přípustná řešení (např.):

$$\mathbf{x}^T = (x_1; x_2; x_3) = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{y}^T = (y_1; y_2) = (1, 1)$$

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{*T} = (2,5; 0,33; 0), \quad \mathbf{y}^{*T} = (0,67; 0,42),$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = 8,17$$

Příklad 1: „Krmné směsi“

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270$ $0,5x_2 \leq 100$ $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60$	$0,9y_1 + 0,1y_3 \geq 2000$ $0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,2y_3 \geq 3000$
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$

Ekonomická interpretace duality 1

Prvky primárního modelu (P):

- x_1 množství výrobku1 (vyrobené směsi I)
- x_2 množství výrobku2 (vyrobené směsi II)
- z celkový zisk, $z^* = 1\,020\,000,-$ Kč
- b_1 disponibilní kapacita zdroje1 (rýže), $b_1 = 270$
- b_2 disponibilní kapacita zdroje2 (pšenice), $b_2 = 100$
- b_3 disponibilní kapacita zdroje3 (vloček), $b_3 = 60$
- x^* optimální výrobní program
 $x^* = (240 ; 180)$
- Označme y^* optimální řešení duální úlohy
 $y^* = (666,67 ; 0 ; 14000)$

Ekonomická interpretace duality 2

- Podle hlavní věty o dualitě platí:

$$z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$$

$$z^* = 270 \cdot 666,67 + 100 \cdot 0 + 60 \cdot 14000 = 1020000$$

Rýže
Pšenice
Vločky

- Hodnoty duální proměnné interpretujeme jako ocenění 1 jednotky příslušného zdroje**
- Jde tu o **marginální ocenění zdrojů**, tzn. nejvyšší cenu jednotky užitého zdroje, za kterou se ještě „vyplatí“ nakoupit tento zdroj, tzv. **stínová cena** („**shadow price**“)
- Je-li skutečná cena jednotky zdroje menší než stínová cena, vyplatí se rozšířit výrobu nákupem tohoto zdroje
- Stínová cena představuje **náklady obětované příležitosti**: nevyčerpaný zdroj má nulovou hodnotu duální proměnné, tj. **nulovou stínovou cenu**. Jeho zvýšení o jednotku proto nezpůsobí zvýšení zisku!

Ekonomická interpretace duality 3

Konkrétně:

- jednotka 1. zdroje (rýže) se podílí na dalším zisku hodnotou $y_1 = 666,67$ Kč
- $y_2 = 0$ znamená, že se 2. zdroj (pšenice) na **dalším ev.** zisku přímo nepodílí. Tento zdroj není plně využit \Rightarrow jeho zvýšení o jednotku nezpůsobí zvýšení hodnoty účelové funkce (tj. zvýšení zisku)
- jednotka 3. zdroje (vločky) se podílí na dalším zisku hodnotou $y_3 = 14\ 000$ Kč (stínová cena)

Ekonomická interpretace duality 4

- **Otázka:** Jak se změní hodnota účelové funkce (zisk), jestliže se kapacita rýže zvýší o jednotku?
- **Odpověď:** Vzroste o hodnotu příslušné duální proměnné $y_1 = 2000/3$ (ověřte v Excelu – Řešiteli!)
- $y_2 = 0 \Rightarrow$ změna kapacit u 2. zdroje nemá na výsledný zisk žádný vliv. SKUTEČNĚ???!??!
- Kdyby kapacita pšenice (2. zdroj) **výrazně** poklesla (o kolik?), stala by se pak nedostatkovou a to by jistě celkový zisk ovlivnilo \Rightarrow hodnoty duálních proměnných je nutné uvažovat jen v rámci **intervalů stability** jednotlivých zdrojů!

Dopravní problém LP

Dodavatelé

Doprava zboží – dopravní cesty

Odběratelé



D_1

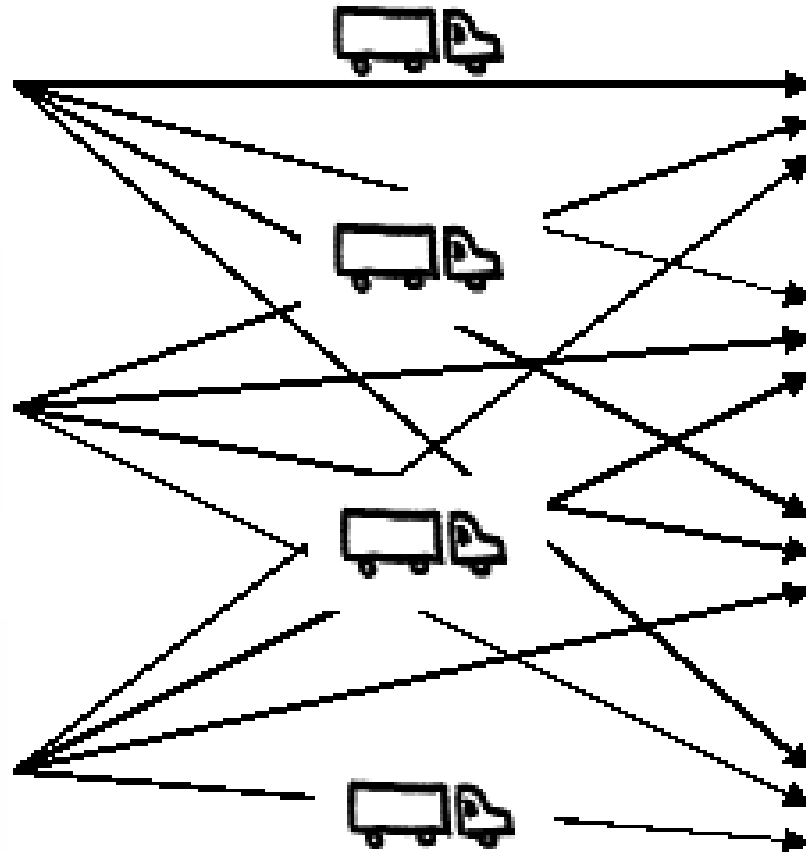


D_2

⋮



D_m



Ekonomický a matematický model dopravního problému (DP)

Prvky DP:

- m dodavatelů (výrobců, zdrojů): D_1, D_2, \dots, D_m
- n odběratelů (spotřebitelů, skladů): O_1, O_2, \dots, O_n
- kapacity jednotlivých dodavatelů: a_1, a_2, \dots, a_m
- požadavky odběratelů: b_1, b_2, \dots, b_n
- náklady na přepravu jedné jednotky zboží z místa zdroje D_i do odběratelského místa O_j : c_{ij}

Cíl řešení DP:

- Naplánovat objemy přepravy x_{ij} mezi D_i a O_j tak, aby byly uspokojeny požadavky všech dodavatelů i odběratelů a celkové přepravní náklady byly minimální!

Matematický model DP 1

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	...	O_n	
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
...
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky odběratelů	b_1	b_2	...	b_n	$\sum b_j$ $\sum a_i$

Matematický model DP 2

- Rozlišujeme:
- **Vyrovnaný dopravní problém**

$$\sum b_j = \sum a_i$$

- **Nevyrovnaný dopravní problém**

$$\sum b_j \neq \sum a_i$$

Každý nevyrovnaný DP lze převést na vyrovnaný!

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP

... při převisu nabídky:

- přidáme do modelu **fiktivního odběratele** O_f , jehož požadavek b_f se bude rovnat danému přebytku, tj.

$$b_f = \sum a_i - \sum b_j$$

... při převisu poptávky:

- doplníme model o **fiktivního dodavatele** D_f , jehož kapacita a_f se bude rovnat chybějícímu množství, tj.

$$a_f = \sum b_j - \sum a_i$$

- **Dopravní náklady od fiktivního dodavatele a k fiktivnímu odběrateli jsou nulové !**

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP: Příklad

Dodavatelé	Odběratelé			Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_3	
D_1	10	13	6	100
D_2	15	18	10	150
D_3	8	12	11	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	500
				550

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP: Příklad - řešení

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_3	O_f	
D_1	10	13	6	0	100
D_2	15	18	10	0	150
D_3	8	12	11	0	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	50	550

Matematický model (vyrovnaného) DP

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Matematický model (nevyrovnaného)

$$\text{DP: } \sum b_j > \sum a_i$$

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

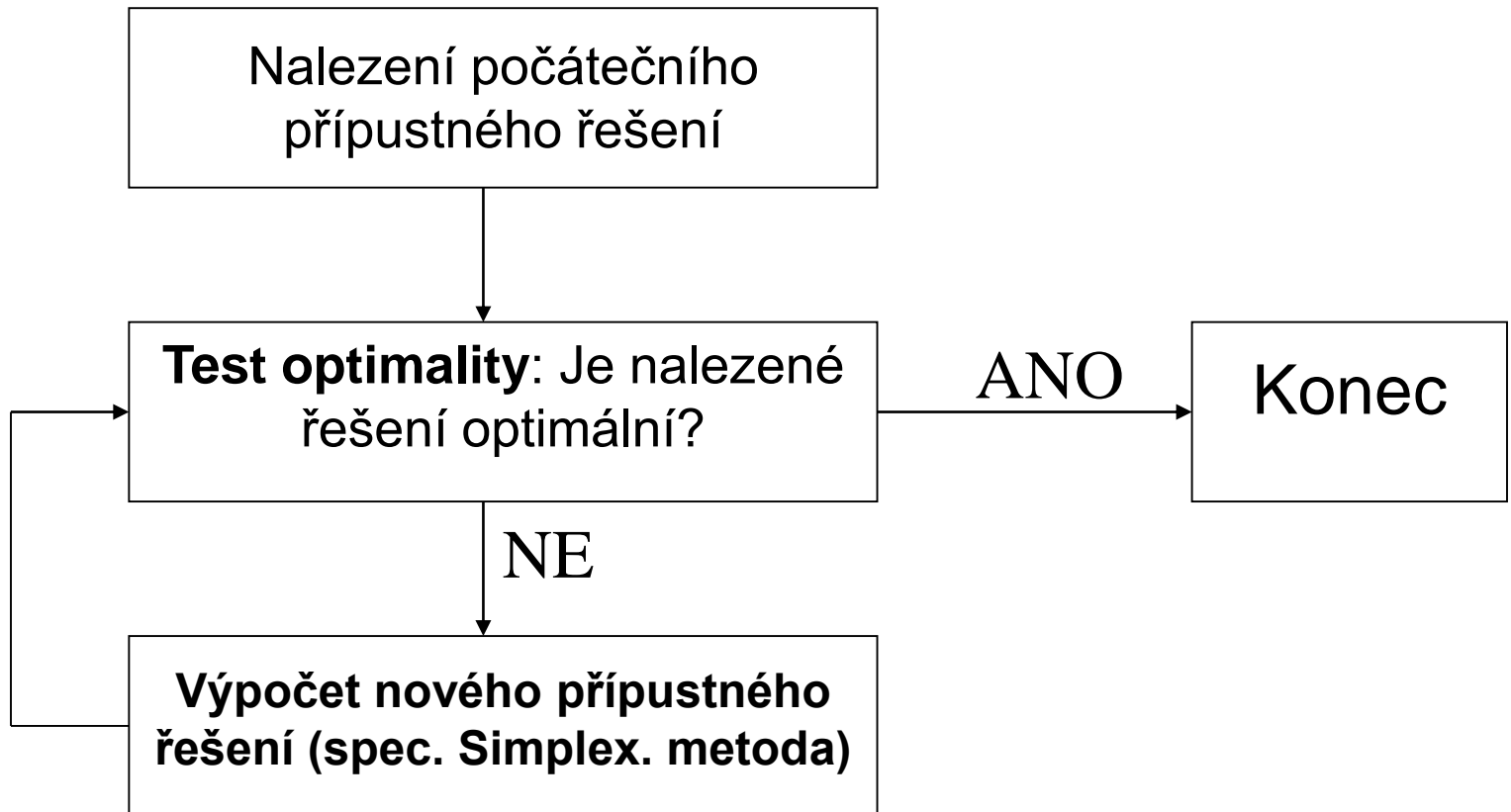
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Řešení vyrovnaného DP

DP má vždy optimální řešení!



Nalezení počátečního řešení:

Metoda severozápadního rohu - SZR

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_3	O_f	
D_1	10 100	13	6	0	100
D_2	↓ 15 30 →	18 120	10	0	150
D_3	8	↓ 12 90 →	11 160 →	0 50	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	50	550
					550

Nalezení **optimálního řešení**: speciální Simplexová metoda (Excel-Řešitel)

Pokud a_i a b_j jsou celá čísla, je i optimální řešení celočíselné, tj. x_{ij} jsou celá čísla

DP Příklad: Optimální řešení

Excel - Řešitel

$C_{ij} =$				$c^T x =$	
10	13	6	0	4960	
15	18	10	0		
8	12	11	0		
$x_{ij} =$				$a_i =$	
0	40	60	0	100	100
0	0	100	50	150	150
130	170	0	0	300	300
130	210	160	50		
$b_j =$					
130	210	160	50		

Přiřazovací problém - speciální DP

Přiřadit n objektů na n aktivit tak, aby se maximalizoval celkový užitek:

Maximalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmíněk

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$
$$x_{ij} \geq 0.$$

c_{ij} – dílčí užitek z přiřazení objektu i na aktivitu j

$x_{ij} = 1$ pokud objekt i se přiřadí na aktivitu j ,

$x_{ij} = 0$ jinak

Přiřazovací problém: Příklad 4

c_{ij} – užitek (body) z přiřazení i na j

Objekty c_{ij} x_{ij}	Aktivity			Přiřazené objekty
	A_1	A_2	A_3	
O_1	10	13	6	
	0	1	0	1
O_2	15	18	10	
	1	0	0	1
O_3	8	12	11	
	0	0	1	1
Přiřazené aktivity	1	1	1	3

EMM 6

Přiřazovací problém: Příklad 4

Řešení Excel - Řešitel

$C_{ij} =$					$c^T x =$
10	13	6			39
15	18	10			
8	12	11			
$x_{ij} =$					$a_i =$
0	1	0	1		1
1	0	0	1	=	1
0	0	1	1		1
1	1	1			
$b_j =$				=	
1	1	1			