Ekonomicko-matematické metody 6

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Úloha lineárního programování
Základní tvar

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \text{MAX; (MIN)}$$ (1) <u>účelová funkce</u>

za podmínek

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\}$$ (2) <u>omezující podmínky ve tvaru nerovností</u>

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ \ldots\ ,\ x_n \geq 0$$ (3) <u>podmínky nezápornosti</u>

Příklad 1: Optimální výrobní plán – úloha LP

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

při omezeních

$$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \leq 270$$

$$0{,}5x_2 \leq 100$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 60$$

$$x_i \geq 0$$

Dualita jako vztah mezi dvěma úlohami lineárního programování

- **Dualitou** v úlohách LP rozumíme vzájemný, přesně definovaný vztah mezi dvojicí úloh LP - **primární a duální úlohou** vycházejících ze **stejných vstupních dat.**
- Dualita je vzájemně **symetrickým vztahem obou úloh** - úloha primární není nadřazena úloze duální ani naopak!
- **Duální úloha k duální úloze je úloha primární.**
- Formální formulace tvaru primární a duální úlohy – **souměrná a nesouměrná dualita.**

Souměrná dualita – zápis pomocí sumací

primární úloha (P)	*duální úloha (D)*
maximalizovat $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	minimalizovat $f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$	$y_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$

Souměrná dualita – maticový zápis

Primární úloha (P)	*Duální úloha (D)*
maximalizovat $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$	minimalizovat $f = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Souměrná dualita - postup konstrukce duální úlohy k úloze primární

- maximalizace účelové funkce se mění na minimalizaci, popř. naopak
- ke každému vlastnímu omezení (P) se přiřadí jedna duální proměnná $y_i,\ i = 1,2,\ldots,m$ a dále podmínka : $y_i \geq 0$
- ke každé proměnné $x_j,\ j = 1,2,\ldots,n$, (P) se přiřadí vlastní omezení duální úlohy
- matice strukturních koeficientů (D) se mění na **transponovanou** matici strukturních koeficientů (P)
- koeficienty pravé strany (D) se mění na koeficienty účelové funkce (P) a naopak
- smysl nerovností vlastních omezení se v (D) mění na opačný!

Souměrná dualita

Příklad 1: „Krmné směsi“

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \le 270$ $0{,}5x_2 \le 100$ $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 60$	$0{,}9y_1 + 0{,}1y_3 \ge 2000$ $0{,}3y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}2y_3 \ge 3000$
$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$ $y_3 \ge 0$

Nesouměrná dualita

- U souměrné duality byla v úloze s maximalizací účelové funkce **všechna** vlastní omezení ve tvaru nerovnic se smyslem nerovnosti **„≤“**
- Pro **všechny** proměnné platily podmínky nezápornosti
- V reálných úlohách LP se tato situace často nevyskytuje

Nesouměrná dualita

Příklad 2: „Krmné směsi“

(P) maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 &\le 270 \\ 0{,}5x_2 &\ge 100 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 &\le 60 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Podmínku $\geq$ vynásobíme -1, a tím změníme znak nerovnosti na **≤** , pak je úloha ve tvaru pro souměrnou dualitu

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“

(P)

maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \le 270$$

$$0{,}5x_2 \le 100$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 = 60$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 1

- Rozložíme 3. podmínku $=$ ve tvaru rovnosti na dvě nerovnice:

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 60$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 60$$

- 1. nerovnici $\geq$ vynásobíme -1

$$-0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 \leq -60$$

- Pak je úloha ve tvaru pro souměrnou dualitu

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 2

Primární úloha má nyní tvar:

maximalizovat

$$z = 2000x_1 + 3000x_2$$

za podmínek

$$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \leq 270$$

$$0{,}5x_2 \leq 100$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 60$$

$$-0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 \leq -60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

4 podmínky $\leq$ $\Rightarrow$ 4 duální proměnné y_1, y_2, y_3', y_3''!!!

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 3

Duální úloha je tedy následující:

minimalizovat

$$f = 270y_1 + 100y_2 + 60(\overbrace{y_3' - y_3''}^{y_3})$$

za podmínek

$$0{,}9y_1 + \qquad\qquad 0{,}1(\overbrace{y_3' - y_3''}^{y_3}) \geq 2000$$

$$0{,}3y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}2(\underbrace{y_3' - y_3''}_{y_3}) \geq 3000$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$\cancel{y_3' \geq 0}$$

$$\cancel{y_3'' \geq 0}$$

Nesouměrná dualita

Příklad 3: „Krmné směsi“ – řešení 4

- Označíme $y_3 = y_3' - y_3''$, lze (D) zjednodušit
- Pozor! rozdíl dvou nezáporných čísel není vždy nezáporný

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \leq 270$ $0{,}5x_2 \leq 100$ $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 = 60$	$0{,}9y_1 + 0{,}1y_3 \geq 2000$ $0{,}3y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}2y_3 \geq 3000$
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$ y_3 libovolné

Nesouměrná dualita úlohy LP
s rovnicemi ve vlastních omezeních – standardní tvar (maticový zápis)

(P)	(D)
maximalizovat $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$	minimalizovat $f = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq 0$	$\mathbf{y}$ – **libovolné** **(tj. omezení nezápornosti chybí)**

Vztahy mezi (P) a (D) úlohou LP
Věty 1 až 5:

1. Duální úloha k duální úloze LP je úloha primární
2. Mají-li **obě** úlohy (P) a (D) **přípustné řešení**, pak mají **obě** také **řešení optimální**
3. Je-li $\boldsymbol{x}$ libovolné **přípustné řešení** úlohy **(P)**, $\boldsymbol{y}$ libovolné **přípustné řešení** úlohy **(D)**, pak $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
4. Platí-li $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$, pak $\boldsymbol{x}$ je **optimální řešení** úlohy (P) a $\boldsymbol{y}$ je **optimální řešení** úlohy (D)
5. Má-li jedna z úloh (P) a (D) **přípustné řešení**, ale **nemá řešení optimální**, pak druhá úloha **nemá** ***žádné*** **přípustné řešení**

Věta 6: Hlavní věta o dualitě

Má-li jedna z úloh (P) nebo (D) optimální řešení ($\boldsymbol{x}$ nebo $\boldsymbol{y}$), má jej také druhá úloha, přičemž platí, že hodnoty účelových funkcí jsou stejné, tj. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

Příklad 4: Primární a duální úloha …

(P)

$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \to \text{MAX};$

při omezeních

$2\,x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 \le 6$

$4\,x_1 + \quad 2\,x_3 \le 10$

$x_i \ge 0$

(D)

$6\,y_1 + 10\,y_2 \to \text{MIN};$

při omezeních

$2\,y_1 + 4\,y_2 \ge 3$

$3\,y_1 \quad \ge 2$

$6\,y_1 + 2\,y_2 \ge 1$

$y_j \ge 0$

Přípustná řešení (např.):

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1;\ x_2\ ;\ x_3\ ) = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,$ $\qquad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1\ ;,\ y_2\ ) = (1\ ,\ 1)$

Optimální řešení:

$\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} = (2{,}5\ ;\ 0{,}33\ ;\ 0)\ ,\ \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} = (0{,}67\ ;\ 0{,}42),$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = 8{,}17$

Příklad 1: „Krmné směsi“

(P)	(D)
maximalizovat $z = 2000x_1 + 3000x_2$	minimalizovat $f = 270y_1 + 100y_2 + 60y_3$
$0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 \le 270$ $0{,}5x_2 \le 100$ $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 60$	$0{,}9y_1 + 0{,}1y_3 \ge 2000$ $0{,}3y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}2y_3 \ge 3000$
$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$ $y_3 \ge 0$

Ekonomická interpretace duality 1

Prvky primárního modelu (P):

- x_1 množství výrobku1 (vyrobené směsi I)
- x_2 množství výrobku2 (vyrobené směsi II)
- z celkový zisk, $z^* = 1\ 020\ 000$,- Kč
- b_1 disponibilní kapacita zdroje1 (rýže), $b_1 = 270$
- b_2 disponibilní kapacita zdroje2 (pšenice), $b_2 = 100$
- b_3 disponibilní kapacita zdroje3 (vloček), $b_3 = 60$
- $\boldsymbol{x}^*$ optimální výrobní program
  $\boldsymbol{x}^* = (240\ ;\ 180)$
- Označme $\boldsymbol{y}^*$ optimální řešení duální úlohy
  $\boldsymbol{y}^* = (666{,}67\ ;\ 0\ ;\ 14000)$

Ekonomická interpretace duality 2

- Podle hlavní věty o dualitě platí:

Rýže
Pšenice
Vločky

$$z^* = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$$

$$z^* = 270\cdot\mathbf{666{,}67} + 100\cdot\mathbf{0} + 60\cdot\mathbf{14000} = 1020000$$

- **Hodnoty duální proměnné** interpretujeme **jako ocenění 1 jednotky příslušného zdroje**
- Jde tu o **marginální ocenění zdrojů**, tzn. nejvyšší cenu jednotky užitého zdroje, za kterou se ještě „vyplatí“ nakoupit tento zdroj, tzv. **stínová cena** („**shadow price**“)
- Je-li skutečná cena jednotky zdroje menší než stínová cena, vyplatí se rozšířit výrobu nákupem tohoto zdroje
- Stínová cena představuje **náklady obětované příležitosti:** nevyčerpaný zdroj má nulovou hodnotu duální proměnné, tj. **nulovou stínovou cenu**. Jeho zvýšení o jednotku proto nezpůsobí zvýšení zisku!

Ekonomická interpretace duality 3

Konkrétně:

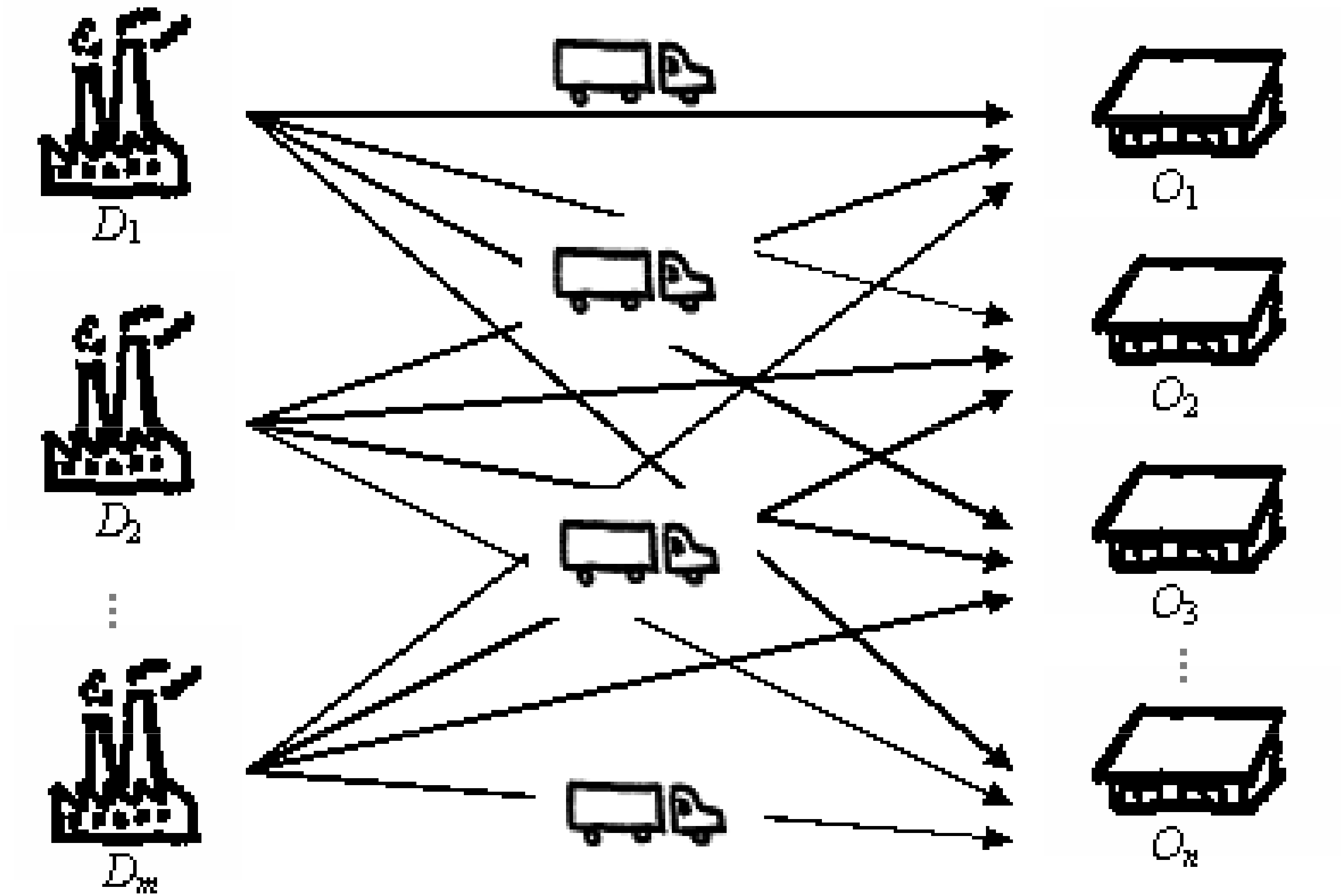
- jednotka 1. zdroje (rýže) se podílí na dalším zisku hodnotou $y_1 = 666{,}67$ Kč
- $y_2 = 0$ znamená, že se 2. zdroj (pšenice) na dalším ev. zisku přímo nepodílí. Tento zdroj není plně využit $\Rightarrow$ jeho zvýšení o jednotku nezpůsobí zvýšení hodnoty účelové funkce (tj. zvýšení zisku)
- jednotka 3. zdroje (vločky) se podílí na dalším zisku hodnotou $y_3 = 14\,000$ Kč (stínová cena)

Ekonomická interpretace duality 4

- **Otázka:** Jak se změní hodnota účelové funkce (zisk), jestliže se kapacita rýže zvýší o jednotku?
- **Odpověď:** Vzroste o hodnotu příslušné duální proměnné y_1 = 2000/3 (ověřte v Excelu – Řešiteli!)
- $y_2 = 0 \Rightarrow$ změna kapacit u 2. zdroje nemá na výsledný zisk žádný vliv. SKUTEČNĚ???!!!
- Kdyby kapacita pšenice (2. zdroj) **výrazně** poklesla (o kolik?), stala by se pak nedostatkovou a to by jistě celkový zisk ovlivnilo $\Rightarrow$ hodnoty duálních proměnných je nutné uvažovat jen v rámci **intervalů stability** jednotlivých zdrojů!

Dopravní problém LP

Dodavatelé Doprava zboží – dopravní cesty Odběratelé



Ekonomický a matematický model dopravního problému (DP)

Prvky DP:

- m dodavatelů (výrobců, zdrojů): $D_1, D_2, \ldots, D_m$
- n odběratelů (spotřebitelů, skladů): $O_1, O_2, \ldots, O_n$
- kapacity jednotlivých dodavatelů: $a_1, a_2, \ldots, a_m$
- požadavky odběratelů: $b_1, b_2, \ldots, b_n$
- náklady na přepravu jedné jednotky zboží z místa zdroje D_i do odběratelského místa O_j: c_{ij}

Cíl řešení DP:

- Naplánovat objemy přepravy x_{ij} mezi D_i a O_j tak, aby byly uspokojeny požadavky všech dodavatelů i odběratelů a celkové přepravní náklady byly minimální!

Matematický model DP 1

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	…	O_n	
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky odběratelů	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Matematický model DP 2

- Rozlišujeme:
- **Vyrovnaný dopravní problém**

$$\sum b_j = \sum a_i$$

- **Nevyrovnaný dopravní problém**

$$\sum b_j \neq \sum a_i$$

Každý nevyrovnaný DP lze převést na vyrovnaný!

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP

… při převisu nabídky:

- přidáme do modelu **fiktivního odběratele O_f**, jehož požadavek b_f se bude rovnat danému přebytku, tj.

$$b_f = \sum a_i - \sum b_j$$

… při převisu poptávky:

- doplníme model o **fiktivního dodavatele D_f**, jehož kapacita a_f se bude rovnat chybějícímu množství, tj.

$$a_f = \sum b_j - \sum a_i$$

- **Dopravní náklady od fiktivního dodavatele a k fiktivnímu odběrateli jsou nulové !**

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP: Příklad

Dodavatelé	Odběratelé			Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_3	
D_1	10	13	6	100
D_2	15	18	10	150
D_3	8	12	11	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	**550** **500**

Převod nevyrovnaného DP na vyrovnaný DP: Příklad - řešení

Dodavatelé	Odběratelé O_1	O_2	O_3	$\boldsymbol{O_f}$	Kapacity dodavatelů
D_1	10	13	6	**0**	100
D_2	15	18	10	**0**	150
D_3	8	12	11	**0**	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	**50**	550 550

Matematický model (vyrovnaného) DP

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2\ldots,n,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Matematický model (nevyrovnaného) DP: $\sum b_j > \sum a_i$

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

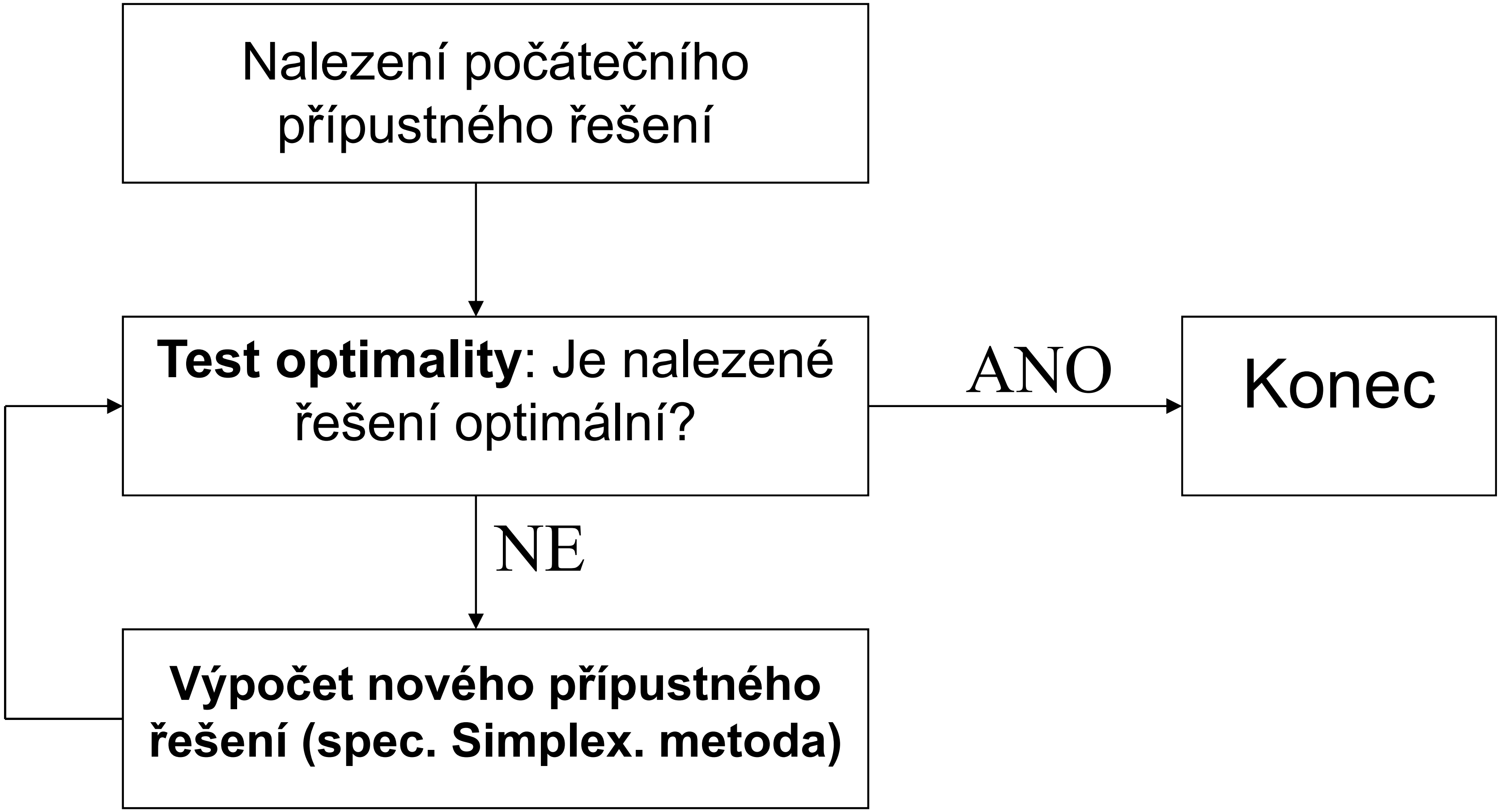
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad j = 1,2.\ldots,n,$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Řešení vyrovnaného DP

DP má vždy optimální řešení!



Nalezení počátečního řešení:

Metoda severozápadního rohu - SZR

Dodavatelé	Odběratelé				Kapacity dodavatelů
	O_1	O_2	O_3	O_f	
D_1	10 **100**	13	6	0	100
D_2	↓ 15 **30** →	18 **120**	10	0	150
D_3	8	↓ 12 **90** →	11 **160** →	0 **50**	300
Požadavky odběratelů	130	210	160	50	550 550

Nalezení optimálního řešení: speciální Simplexová metoda (Excel-Řešitel)

Pokud a_i a b_j jsou celá čísla, je i optimální řešení celočíselné, tj. x_{ij} jsou celá čísla

DP Příklad: Optimální řešení

Excel - Řešitel

$c_{ij} =$ $\quad$ $c^T x =$ 4960

10	13	6	0
15	18	10	0
8	12	11	0

$x_{ij} =$ $\quad$ $a_i =$

0	40	60	0	100		100
0	0	100	50	150	=	150
130	170	0	0	300		300
130	210	160	50			

$b_j =$ $\quad$ =

130	210	160	50

Přiřazovací problém - speciální DP

Přiřadit n objektů na n aktivit tak, aby se maximalizoval celkový užitek:

Maximalizovat
$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2.\ldots,n,$$
$$x_{ij} \geq 0.$$

c_{ij} – dílčí užitek z přiřazení objektu i na aktivitu j

x_{ij} = 1 pokud objekt i se přiřadí na aktivitu j,

x_{ij} = 0 jinak

Přiřazovací problém: Příklad 4

c_{ij} – užitek (body) z přiřazení i na j

Objekty c_{ij} x_{ij}	Aktivity A_1	A_2	A_3	Přiřazené objekty
O_1	10 0	13 1	6 0	1
O_2	15 1	18 0	10 0	1
O_3	8 0	12 0	11 1	1
Přiřazené aktivity	1	1	1	3 3

Přiřazovací problém: Příklad 4

Řešení Excel - Řešitel

c_{ij} =

10	13	6
15	18	10
8	12	11

$c^T x$ =

39

x_{ij}=

0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	1	1
1	1	1	

=

a_i =

1
1
1

b_j = =

1	1	1

DP_PP.xls