**DOPRAVNÍ ÚLOHA**

(klasický dopravní problém)

PRIMÁRNÍ A DUÁLNÍ ÚLOHA

Máme $m$ skladišť (dodavatelů) číslo $i=1, 2,…,m$ s jedním druhem zboží. Skladiště číslo $i$ obsahuje $a\_{i}$ jednotek zboží pro $i=1, 2,…,m$. Dále máme $n$ spotřebitelů (zákazníků, odběratelů) číslo $j=1, 2,…,n$. Spotřebitel číslo $j$ požaduje dodat $b\_{j}$ jednotek zboží pro $j=1, 2,…,n$. Cena přepravy jedné jednotky zboží od dodavatele $i$ ke spotřebiteli $j$ činí $c\_{ij}$ peněz pro $i=1, 2,…,m$ a pro $j=1, 2,…,n$. Úkolem je stanovit plán přepravy zboží od dodavatelů ke spotřebitelům tak, aby kapacity skladišť nebyly překročeny, požadavky zákazníků byly uspokojeny a celkové přepravní náklady byly minimální.

Úlohu formulujeme jako *úlohu lineárního programování*. Účelem je stanovit optimální plán přepravy. Jako $x\_{ij}$ označme plánované množství zboží, které bude přepraveno od dodavatele $i$ ke spotřebiteli $j$ pro $i=1, 2,…,m$ a pro $j=1, 2,…,n$. **Primární úloha**, která vyjadřuje
(tj. modeluje) zadanou dopravní úlohu, je následující:

$$minimalizovat \sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}c\_{ij}x\_{ij}$$

za podmínek

$$\sum\_{j=1}^{n}x\_{ij}=a\_{i}  pro i=1, 2,…,m$$

$$\sum\_{i=1}^{m}x\_{ij}=b\_{j}  pro j=1, 2,…,n$$

$$x\_{ij}\geq 0  pro i=1, 2,…,m a pro j=1, 2,…,n$$

**Duální úloha** je následující:

$$maximalizovat \sum\_{i=1}^{m}a\_{i}u\_{i}+\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}v\_{j}$$

za podmínek

$$u\_{i}+v\_{j}\leq c\_{ij}  pro i=1, 2,…,m a pro j=1, 2,…,n$$

kde $u\_{1},u\_{2},…,u\_{m}\in R$ a $v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\in R$ jsou proměnné.

**Příklad:** Následující tabulka shrnuje zadání klasické dopravní úlohy s $m=2$ dodavateli a
$n=3$ odběrateli. Levý sloupeček zachycuje kapacity skladišť ($a\_{1},a\_{2}$), první řádek zachycuje požadavky zákazníků ($b\_{1},b\_{2},b\_{3}$) a ostatní buňky tabulky zachycují jednotkové přepravní náklady ($c\_{ij}$):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | $$b\_{1}=2$$ | $$b\_{2}=4$$ | $$b\_{3}=6$$ |
| $$a\_{1}=4$$ | $$c\_{11}=1$$ | $$c\_{12}=2$$ | $$c\_{13}=3$$ |
| $$a\_{2}=8$$ | $$c\_{21}=4$$ | $$c\_{22}=5$$ | $$c\_{23}=6$$ |

**Primární úloha** vypadá v tomto případě následovně:

$$minimalizovat \sum\_{i=1}^{2}\sum\_{j=1}^{3}c\_{ij}x\_{ij}$$

za podmínek

$$\sum\_{j=1}^{3}x\_{ij}=a\_{i}  pro i=1, 2$$

$$\sum\_{i=1}^{2}x\_{ij}=b\_{j}  pro j=1, 2, 3$$

$$x\_{ij}\geq 0  pro i=1, 2 a pro j=1, 2, 3$$

Ekvivalentně lze primární úlohu zapsat následovně:

$$1x\_{11}+2x\_{12}+3x\_{13}+4x\_{21}+5x\_{22}+6x\_{23} ⟶ min$$

za podmínek

$$1x\_{11}+1x\_{12}+1x\_{13}+1x\_{21}+1x\_{22}+1x\_{23}=4   $$

$$1x\_{11}+1x\_{12}+1x\_{13}+1x\_{21}+1x\_{22}+1x\_{23}=8   $$

$$1x\_{11}+1x\_{12}+1x\_{13}+1x\_{21}+1x\_{22}+1x\_{23}=2   $$

$$1x\_{11}+1x\_{12}+1x\_{13}+1x\_{21}+1x\_{22}+1x\_{23}=4   $$

$$1x\_{11}+1x\_{12}+1x\_{13}+1x\_{21}+1x\_{22}+1x\_{23}=6   $$

a

$$x\_{11},x\_{12},x\_{13},x\_{21},x\_{22},x\_{23}\geq 0$$

**Duální úloha** vypadá tudíž následovně:

$$4u\_{1}+8u\_{2}+2v\_{1}+4v\_{2}+6v\_{3} ⟶ max$$

za podmínek

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 1    $$

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 2    $$

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 3    $$

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 4    $$

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 5    $$

$$1u\_{1}+1u\_{2}+1v\_{1}+1v\_{2}+1v\_{3}\leq 6    $$

a

$$u\_{1},u\_{2},v\_{1},v\_{2},v\_{3}\in R$$

Ekvivalentní, stručný zápis duální úlohy je zřejmý:

$$maximalizovat \sum\_{i=1}^{2}a\_{i}u\_{i}+\sum\_{j=1}^{3}b\_{j}v\_{j}$$

za podmínek

$$u\_{i}+v\_{j}\leq c\_{ij}  pro i=1, 2 a pro j=1, 2, 3$$

a

$$u\_{1},u\_{2},v\_{1},v\_{2},v\_{3}\in R$$

PŘÍKLAD

DOPRAVNÍ ÚLOHA

TERÉNNÍ ÚPRAVY – VYROVNÁNÍ TERÉNU

 úroveň terénu stávající

 úroveň terénu požadovaná

kopec = terén nad požadovanou úrovní = „dodavatel / zdroj“ $i$

údolí = terén pod požadovanou úrovní = „odběratel / spotřebitel“ $j$

$c\_{ij}$ = cena za přepravu jedné jednotky zeminy z $i$ do $j$ = podle vzdálenosti