

**DOPRAVNÍ ÚLOHA**  
(klasický dopravní problém)  
PRIMÁRNÍ A DUÁLNÍ ÚLOHA

Máme  $m$  skladišť (dodavatelů) číslo  $i = 1, 2, \dots, m$  s jedním druhem zboží. Skladiště číslo  $i$  obsahuje  $a_i$  jednotek zboží pro  $i = 1, 2, \dots, m$ . Dále máme  $n$  spotřebitelů (zákazníků, odběratelů) číslo  $j = 1, 2, \dots, n$ . Spotřebitel číslo  $j$  požaduje dodat  $b_j$  jednotek zboží pro  $j = 1, 2, \dots, n$ . Cena přepravy jedné jednotky zboží od dodavatele  $i$  ke spotřebiteli  $j$  činí  $c_{ij}$  peněz pro  $i = 1, 2, \dots, m$  a pro  $j = 1, 2, \dots, n$ . Úkolem je stanovit plán přepravy zboží od dodavatelů ke spotřebitelům tak, aby kapacity skladišť nebyly překročeny, požadavky zákazníků byly uspokojeny a celkové přepravní náklady byly minimální.

Úlohu formulujeme jako *úlohu lineárního programování*. Účelem je stanovit optimální plán přepravy. Jako  $x_{ij}$  označme plánované množství zboží, které bude přepraveno od dodavatele  $i$  ke spotřebiteli  $j$  pro  $i = 1, 2, \dots, m$  a pro  $j = 1, 2, \dots, n$ . **Primární úloha**, která vyjadřuje (tj. modeluje) zadanou dopravní úlohu, je následující:

$$\text{minimalizovat } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{a pro } j = 1, 2, \dots, n$$

**Duální úloha** je následující:

$$\text{maximalizovat } \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

za podmínek

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{a pro } j = 1, 2, \dots, n$$

kde  $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}$  a  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$  jsou proměnné.

**Příklad:** Následující tabulka shrnuje zadání klasické dopravní úlohy s  $m = 2$  dodavateli a  $n = 3$  odběrateli. Levý sloupeček zachycuje kapacity skladů ( $a_1, a_2$ ), první řádek zachycuje požadavky zákazníků ( $b_1, b_2, b_3$ ) a ostatní buňky tabulky zachycují jednotkové přepravní náklady ( $c_{ij}$ ):

	$b_1 = 2$	$b_2 = 4$	$b_3 = 6$
$a_1 = 4$	$c_{11} = 1$	$c_{12} = 2$	$c_{13} = 3$
$a_2 = 8$	$c_{21} = 4$	$c_{22} = 5$	$c_{23} = 6$

**Primární úloha** vypadá v tomto případě následovně:

$$\text{minimalizovat } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i \quad \text{pro } i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij} = b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{pro } i = 1, 2 \quad \text{a pro } j = 1, 2, 3$$

Ekvivalentně lze primární úlohu zapsat následovně:

$$1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} \rightarrow \min$$

za podmínek

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 4$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 8$$

$$x_{11} + x_{21} = 2$$

$$x_{12} + x_{22} = 4$$

$$x_{13} + x_{23} = 6$$

a

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

**Duální úloha** vypadá tudíž následovně:

$$4u_1 + 8u_2 + 2v_1 + 4v_2 + 6v_3 \rightarrow \max$$

za podmínek

$$u_1 + v_1 \leq 1$$

$$u_1 + v_2 \leq 2$$

$$u_1 + v_3 \leq 3$$

$$u_2 + v_1 \leq 4$$

$$u_2 + v_2 \leq 5$$

$$u_2 + v_3 \leq 6$$

a

$$u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

Ekvivalentní, stručný zápis duální úlohy je zřejmý:

$$\text{maximalizovat } \sum_{i=1}^2 a_i u_i + \sum_{j=1}^3 b_j v_j$$

za podmínek

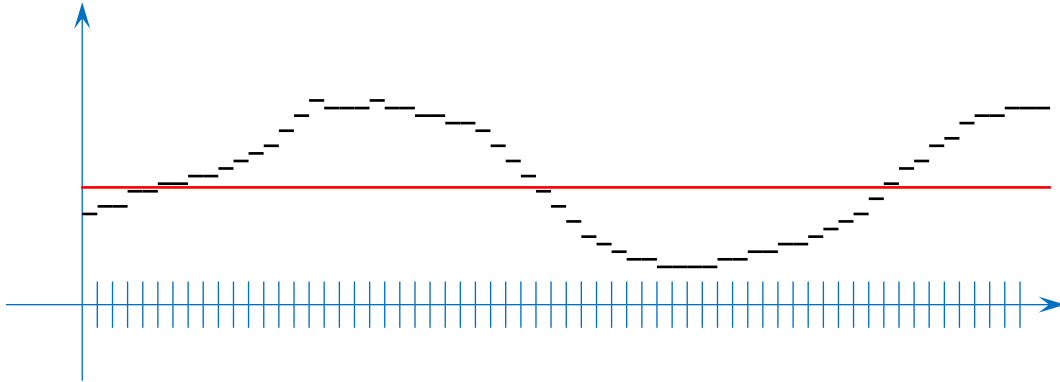
$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \text{pro } i = 1, 2 \quad \text{a pro } j = 1, 2, 3$$

a

$$u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

PŘÍKLAD  
DOPRAVNÍ ÚLOHA  
TERÉNNÍ ÚPRAVY – VYROVNÁNÍ TERÉNU

— úroveň terénu stávající  
— úroveň terénu požadovaná



kopec = terén nad požadovanou úrovní = „dodavatel / zdroj“  $i$

údolí = terén pod požadovanou úrovní = „odběratel / spotřebitel“  $j$

$c_{ij}$  = cena za přepravu jedné jednotky zeminy z  $i$  do  $j$  = podle vzdálenosti