DOPRAVNÍ ÚLOHA
(klasický dopravní problém)
PRIMÁRNÍ A DUÁLNÍ ÚLOHA

Máme m skladišť (dodavatelů) číslo $i = 1, 2, \dots, m$ s jedním druhem zboží. Skladiště číslo i obsahuje a_i jednotek zboží pro $i = 1, 2, \dots, m$. Dále máme n spotřebitelů (zákazníků, odběratelů) číslo $j = 1, 2, \dots, n$. Spotřebitel číslo j požaduje dodat b_j jednotek zboží pro $j = 1, 2, \dots, n$. Cena přepravy jedné jednotky zboží od dodavatele i ke spotřebiteli j činí c_{ij} peněz pro $i = 1, 2, \dots, m$ a pro $j = 1, 2, \dots, n$. Úkolem je stanovit plán přepravy zboží od dodavatelů ke spotřebitelům tak, aby kapacity skladišť nebyly překročeny, požadavky zákazníků byly uspokojeny a celkové přepravní náklady byly minimální.

Úlohu formulujeme jako *úlohu lineárního programování*. Účelem je stanovit optimální plán přepravy. Jako x_{ij} označme plánované množství zboží, které bude přepraveno od dodavatele i ke spotřebiteli j pro $i = 1, 2, \dots, m$ a pro $j = 1, 2, \dots, n$. **Primární úloha**, která vyjadřuje (tj. modeluje) zadanou dopravní úlohu, je následující:

$$\text{minimalizovat} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{a pro} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Duální úloha je následující:

$$\text{maximalizovat} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

za podmínek

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{a pro} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kde $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ jsou proměnné.

Příklad: Následující tabulka shrnuje zadání klasické dopravní úlohy s $m = 2$ dodavateli a $n = 3$ odběrateli. Levý sloupeček zachycuje kapacity skladišť (a_1, a_2), první řádek zachycuje požadavky zákazníků (b_1, b_2, b_3) a ostatní buňky tabulky zachycují jednotkové přepravní náklady (c_{ij}):

	$b_1 = 2$	$b_2 = 4$	$b_3 = 6$
$a_1 = 4$	$c_{11} = 1$	$c_{12} = 2$	$c_{13} = 3$
$a_2 = 8$	$c_{21} = 4$	$c_{22} = 5$	$c_{23} = 6$

<u>Primární úloha</u> vypadá v tomto případě následovně:

$$\text{minimalizovat} \quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro} \quad i = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro} \quad j = 1,2,3$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1,2 \quad \text{a pro} \quad j = 1,2,3$$

Ekvivalentně lze primární úlohu zapsat následovně:

$$1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} \quad \longrightarrow \quad \min$$

za podmínek

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & = 4 \\
& & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & = 8 \\
x_{11} & & + & x_{21} & & & = 2 \\
& x_{12} & & + & x_{22} & & = 4 \\
& & x_{13} & & + & x_{23} & = 6
\end{array}$$

a

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

<u>Duální úloha</u> vypadá tudíž následovně:

$$4u_1 + 8u_2 + 2v_1 + 4v_2 + 6v_3 \quad \longrightarrow \quad \max$$

za podmínek

$$\begin{array}{lllll}
u_1 & + \; v_1 & & & \leq 1 \\
u_1 & & + \; v_2 & & \leq 2 \\
u_1 & & & + \; v_3 & \leq 3 \\
\quad u_2 + & v_1 & & & \leq 4 \\
\quad u_2 & & + \; v_2 & & \leq 5 \\
\quad u_2 & & & + \; v_3 & \leq 6
\end{array}$$

a

$$u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

Ekvivalentní, stručný zápis duální úlohy je zřejmý:

$$\text{maximalizovat} \quad \sum_{i=1}^{2} a_i u_i + \sum_{j=1}^{3} b_j v_j$$

za podmínek

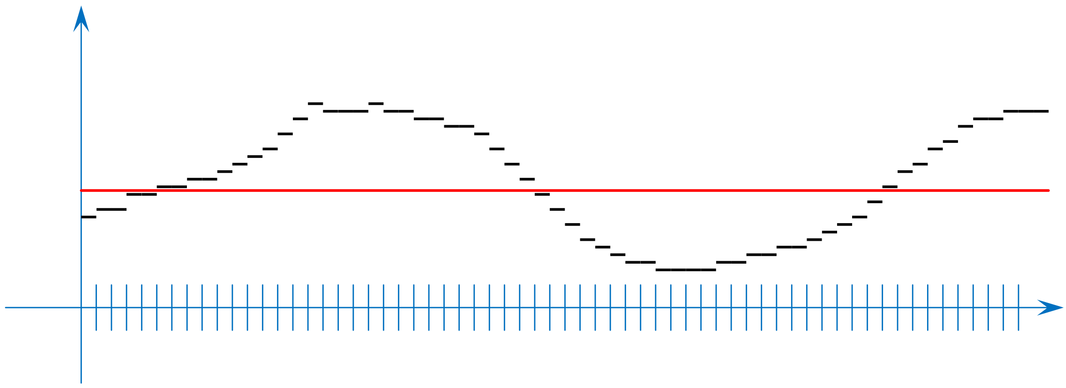
$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2 \quad \text{a pro} \quad j = 1, 2, 3$$

a

$$u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

PŘÍKLAD
DOPRAVNÍ ÚLOHA
TERÉNNÍ ÚPRAVY – VYROVNÁNÍ TERÉNU

úroveň terénu stávající
úroveň terénu požadovaná



kopec = terén nad požadovanou úrovní = „dodavatel / zdroj“ i
údolí = terén pod požadovanou úrovní = „odběratel / spotřebitel“ j
c_{ij} = cena za přepravu jedné jednotky zeminy z i do j = podle vzdálenosti