Ekonomicko-matematické metody 7

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Příklad: 3 účelové funkce

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

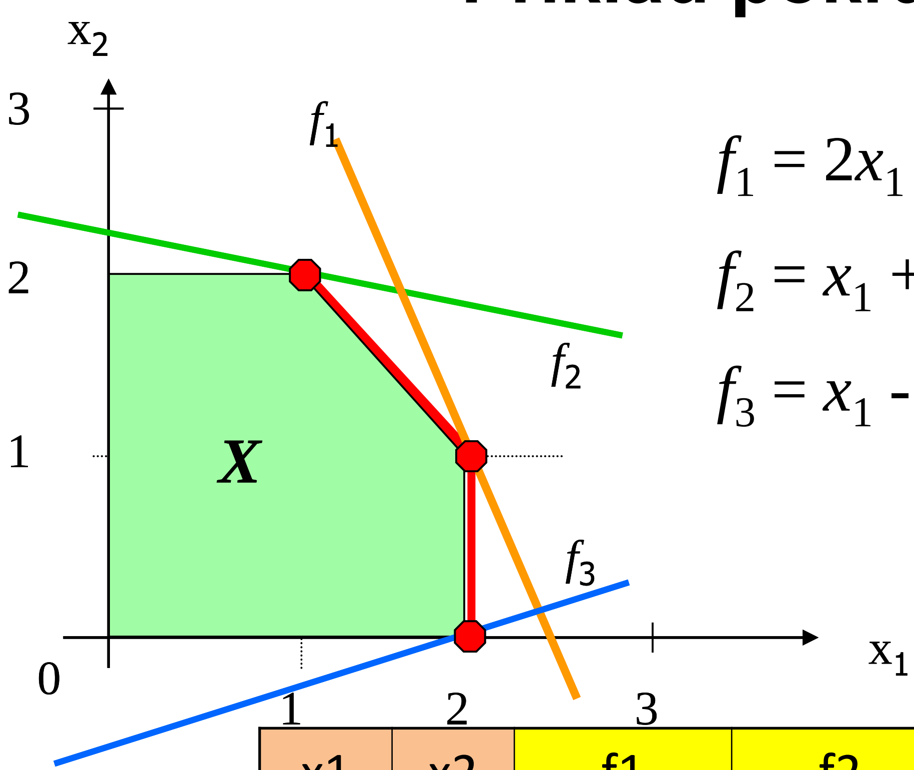
$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \mathrm{MIN};$$

za omezení

$$\left.\begin{aligned} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{X}$$

$$-f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

Příklad pokrač.



$$f_1 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = -2x_1 + f_1$$

$$f_2 = x_1 + 5x_2 \Rightarrow x_2 = -0,2x_1 + f_2$$

$$f_3 = x_1 - 3x_2 \Rightarrow x_2 = 0,33x_1 - 0,33f_3$$

x1	x2	f1	f2	f3
2	1	5	3	-1
1	2	4	11	-5
2	0	4	2	2

Které „řešení" je nejlepší?

VKLP.xls

Vícekriteriální programování

Nelineární VKP: Základní úloha

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \text{MAX};} \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \text{MAX}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \text{MAX}; \end{array}\right\}$$

(1) <u>účelové funkce-</u>

-<u>kritéria</u> (všechny MAX, nebo všechny MIN)

za podmínek

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \boldsymbol{X}$$

$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m$$

(2) <u>omezující podmínky</u>

(mohou chybět)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - <u>varianty - alternativy</u>

Příklad 1: VKNLP

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

za omezení

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array}\right\} \boldsymbol{X}$$

Definice nedominované varianty

- Nechť $\mathbf{x}^{(0)}$ je přípustné řešení vyhovující omezením (2). Řekneme, že přípustné řešení

  $\mathbf{x}^{(1)}$ ***dominuje*** $\mathbf{x}^{(0)}$

  jestliže pro **všechna** kritéria $j = 1,\ldots,m$ platí:

  $f_j(\mathbf{x}^{(1)}) \geq f_j(\mathbf{x}^{(0)})$ a **alespoň pro jedno kritérium** „k“ je:

  $f_k(\mathbf{x}^{(1)}) > f_k(\mathbf{x}^{(0)})$

- Jestliže **neexistuje** přípustné $\mathbf{x}^{(1)}$ takové, že

  $\mathbf{x}^{(1)}$ dominuje $\mathbf{x}^{(0)}$

  potom se $\mathbf{x}^{(0)}$ nazývá

  nedominovaná (Paretovská) varianta (řešení)

Nedominovaná varianta

V úloze VKP obvykle není k dispozici „*optimální řešení*“ $\mathbf{x}^*$ v tom smyslu, že pro **všechna** kritéria f_j

a **všechna** přípustná řešení $\mathbf{x} \in X$ platí:

$$f_j(\mathbf{x}^*) \geq f_j(\mathbf{x})$$

Odstraníte-li všechna dominovaná řešení, zůstanou nedominovaná řešení!

(…stejně jich je obvykle příliš mnoho!)

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \rightarrow \text{MAX};$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX};$$
$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{MAX};$$
za omezení
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 2$$

Příklad 1. Skalarizovaná úloha

Váhy: $v_1 = 0{,}5 \quad v_2 = 0{,}3 \quad v_3 = 0{,}2$

$$v_1 f_1(x_1, x_2) + v_2 f_2(x_1, x_2) + v_3 f_3(x_1, x_2) \rightarrow \text{MAX};$$

tj.

$$0{,}5(2x_1 + x_2^2) + 0{,}3(x_1 + 5x_2) + 0{,}2(x_1 - 3x_2) \rightarrow \text{MAX};$$

tj.

$$1{,}5x_1 + 0{,}5x_2^2 + 0{,}9x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za omezení

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 3 \\ 0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 2 \end{array}\right\} \boldsymbol{X}$$

Vztah mezi Paretovským řešením úlohy VKP a optimálním řešením skalarizované úlohy VKP

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ - **ryze** konkávní funkce (kritéria)

$g_1, g_2, \ldots, g_m$ - konvexní funkce

- Pak platí, že: $\mathbf{x}^*$ je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (1), (2), **právě když** existují váhy kritérií

$v_1, v_2, \ldots, v_k \qquad v_i \geq 0 \qquad \sum v_i = 1$

takové, že $\mathbf{x}^*$ je optimální řešení **skalarizované úlohy**:

$$\boxed{\sum v_j f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \mathbf{MAX;} \quad \text{za omezení (2),}} \qquad (1^*)$$

tj. $\quad \mathrm{x}^* = \underset{\mathrm{x} \in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{k} v_i f_i(\mathrm{x})$

Vícekriteriální lineární programování

VKLP

- Speciální případ: $f_j \quad g_i$ jsou lineární funkce, tj.

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \dots + c_{nj}x_n$$
$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_n$$

- Vektorový tvar úlohy VKLP:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{x} \rightarrow \mathrm{MAX}; \text{ tj.} \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{MAX}; \quad (3)$$

za omezení

$$X = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}\,,\ \mathbf{x} \ge 0 \,\} \quad (4)$$

Vícekriteriální lineární programování
VKLP

Skalarizovaný tvar úlohy VKLP:

$\mathbf{v} = (\, v_1, v_2, \ldots ,v_k \,)$ – vektor vah: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ $v_i \geq 0$
$\sum v_i = 1$

Z vícekriteriální úlohy se skalarizací stane ***jedno******kriteriální*** úloha:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{x} \;\to \mathrm{MAX}; \qquad (3^*)$$

za omezení

$$X = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,,\, \mathbf{x} \geq 0 \,\} \qquad (4)$$

přitom $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} v_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \;=\; \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} v_i c_{ij} x_j$

Vztah mezi Paretovským řešením úlohy VKLP a optimálním řešením skalarizované úlohy VKLP

1. Nechť $\mathbf{x}^*$ je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (3), (4), tj. úlohy VKLP.

   Potom **existuje** vektor vah

   $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots ,v_k)$

   takových, že $\mathbf{x}^*$ je ***optimální řešení*** skalarizované úlohy VKLP, tj.

$$\mathbf{x}^* = \operatorname*{argmax}_{\mathrm{x}\in X} \mathbf{vCx} \qquad (5)$$

2. Nechť pro $\mathbf{x}^* \in X$ a pro vektor **kladných** vah $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots ,v_k)$ platí (5).

   Potom $\mathbf{x}^*$ je nedominované (Paretovské) řešení úlohy (3), (4)

Příklad 2. VKLP

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

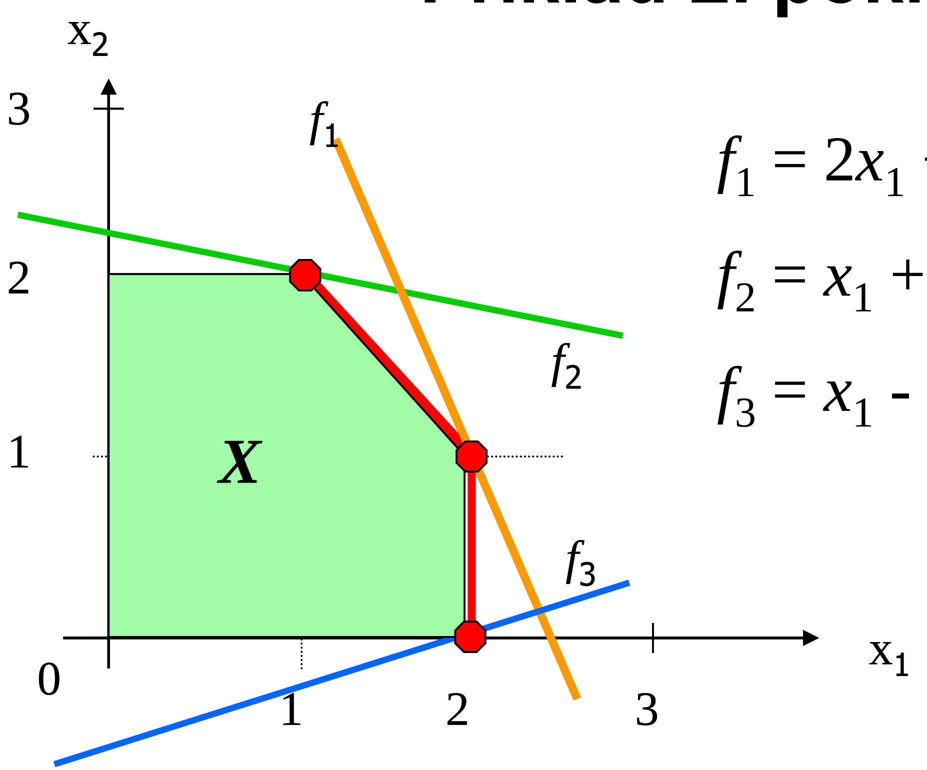
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \mathrm{MAX};$$

za omezení

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array}\right\} \boldsymbol{X}$$

Příklad 2. pokrač.



$$f_1 = 2x_1 + x_2 \;\Rightarrow\; x_2 = -\,2x_1 + f_1$$

$$f_2 = x_1 + 5x_2 \;\Rightarrow\; x_2 = -\,0{,}2x_1 + f_2$$

$$f_3 = x_1 -\; 3x_2 \;\Rightarrow\; x_2 = \;0{,}33x_1 - 0{,}33f_3$$

Paretovská řešení (červená)

$\mathbf{x_1}^* = (x_1^*, x_2^*) = (2 , 1)$ $\mathbf{x_2}^* = (1 , 2)$ $\mathbf{x_3}^* = (2 , 0)$

VKLP.xls

Minimaxová optimalizace

Maximalizuje se nejhorší (minimální) hodnota:

$$\mathbf{min}\{ f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\ldots, f_k(\mathbf{x})\} \to \text{MAX}; \qquad (6)$$

za omezení

$$\left.\begin{array}{l} g_1(\mathbf{x}) \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(\mathbf{x}) \leq b_m \end{array}\right\} \boldsymbol{X}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots ,x_n)$$

Optimální řešení úlohy (6) je nedominované (Paretovské)

Minimaxová optimalizace:
ekvivalentní tvar

Přidáme novou - umělou proměnnou ***w***

(nejmenší hodnota ze všech kritérií):

$$w \to \mathrm{MAX}; \qquad (7)$$

za omezení

$$f_1(\mathbf{x}) \geq w$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_k(\mathbf{x}) \geq w$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$$

Příklad 3.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \mathrm{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \to \mathrm{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \mathrm{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2$$

Příklad 3. pokrač.

$$w \to \mathrm{MAX};$$

za omezení

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq w \\ x_1 + 5x_2 &\geq w \\ x_1 - 3x_2 &\geq w \end{aligned}\right\} \text{Hodnoty kritérií současně}$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2,\ 0 \leq w$$

Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (2\ ,\ 0)$

VKLP.xls

Cílové programování

- Účelové funkce (kritéria) = cílové funkce f_i
- Předem jsou známy **cílové hodnoty** q_i, kterých mají cílové funkce dosáhnout (nebo ke kterým se mají co nejvíce přiblížit)
- **Optimální řešení** - minimalizuje součet odchylek od cílových hodnot, tj. součet absolutních hodnot rozdílu funkčních a cílových hodnot

Cílové lineární programování
CLP

q_i – zadané cílové hodnoty i-tého kritéria

Minimalizuje se součet (součet kvadrátů) odchylek od cílových hodnot:

$$\sum_{i=1}^{k} \left| c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n - q_i \right| \to \text{MIN};$$

$$\sum_{i=1}^{k} (c_i^{\mathrm{T}} x - q_i)^2 \to \text{MIN}; \qquad (8)$$

za omezení

Pozor! Není úloha LP !!

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}\,,\ \mathbf{x} \ge 0$$

Optimální řešení (8) nemusí být nedominované!

Cílové lineární programování

ekvivalentní úloha

q_i – zadané cílové hodnoty

1. Minimalizuje se součet kladných h_i a záporných d_i - odchylek od **cílových hodnot** q_i , resp.

$$\sum_{i=1}^{k}(d_i + h_i) \to \text{MIN};$$

za omezení

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}\ ,\ \mathbf{x} \ge 0$$

$$-d_i \le c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n - q_i \le h_i\,,\ i = 1,2,\ldots,k.$$

$$h_i \ge 0,\ d_i \ge 0$$

Příklad 4.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \text{MAX};$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \to \text{MAX};$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \text{MAX};$$

za omezení

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2$$

Cílové hodnoty kritérií: $\boxed{q_1 = 3,\ q_2 = 4,\ q_3 = 5}$

Příklad 4: dokončení

$$d_1 + d_2 + d_3 + h_1 + h_2 + h_3 \to \text{MIN};$$

za omezení

$$\left.\begin{aligned} & x_1 + x_2 \le 3 \\ & 0 \le x_1 \le 2,\, 0 \le x_2 \le 2 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{X}$$

$$\left.\begin{aligned} & -d_1 \le 2x_1 + x_2 - \boxed{3} \le h_1 \\ & -d_2 \le x_1 + 5x_2 - \boxed{4} \le h_2 \\ & -d_3 \le x_1 - 3x_2 - \boxed{5} \le h_3 \\ & d_i \ge 0,\, h_i \ge 0,\, i = 1,2,3 \end{aligned}\right\}$$

Rozdíl mezi hodnotami a stanovenými cíli

Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (1{,}222\ ;\ 0{,}555)$

VKLP.xls

Souhrn: 3 metody řešení VKLP

- **Metoda váženého součtu:** váhy mohou představovat relativní významnosti (důležitosti) jednotlivých kritérií

- **Metoda minimaxu:** realizuje pesimistické kompromisní řešení – najde nejlepší z možných špatných situací

- **Cílové programování:** nejpoužívanější metoda – minimalizuje součet odchylek od zadaných cílů:

Např. minimalizace (maximalizace) odchylek od ideálních (bazálních) hodnot jednotlivých kritérií (Předchází řešení úloh LP s individuálními kritérii!)

Všechny úlohy lze řešit v Excelu – Řešiteli (semináře)